Textos Académicos

GEOMETRÍA ANALÍTICA

e introducción al Cálculo Vectorial

John Alexander Pérez Sepúlveda
Juan Guillermo Paniagua Castrillón

FONDO EDITORIAL ITM

GEOMETRÍA ANALÍTICA
E INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO VECTORIAL

GEOMETRÍA ANALÍTICA
E INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO VECTORIAL

John Alexander Pérez Sepúlveda
Juan Guillermo Paniagua Castrillón

ITM
Institución Universitaria
Acreditada en Alta Calidad

Pérez S., John Alexander
Geometría Analítica e introducción al Cálculo Vectorial / John Alexander Pérez S., Juan Guillermo Paniagua C.--1a ed. – Medellín : Instituto Tecnológico Metropolitano, 2016.
242 p. – (Textos académicos)

Incluye referencias bibliográficas
ISBN 978-958-8743-97-4

1. Geometría analítica 2. Vectores I. Paniagua C., Juan Guillermo II. Tít. III. Serie

516.3 SCDD 21 ed.

Catalogación en la publicación - Biblioteca ITM

Edición: diciembre 2016
Hechos todos los depósitos legales

AUTORES
John Alexander Pérez Sepúlveda
Juan Guillermo Paniagua Castrillón

Editado en Medellín, Colombia
Fondo Editorial ITM
Calle 73 No. 76 A 354 (vía El Volador)
Tel: (574) 440 5197 - 440 5246
http://fondoeditorial.itm.edu.co/
www.itm.edu.co

Indice general

Introducción

La geometría analítica es una rama de la matemática que estudia las figuras geométricas, a través de herramientas básicas del análisis matemático y del álgebra. Los problemas geométricos allí planteados son estudiados y solucionados mediante la asociación de ecuaciones y curvas, en un sistema coordenado.

El contenido del libro ha sido organizado y estructurado en ocho capítulos, en función de lograr una buena aprehensión e integración de los conceptos, de tal manera que el estudiante adquiera y potencie el desarrollo de las competencias necesarias para su desempeño profesional. El capítulo uno comprende las nociones preliminares de sistemas coordenados y distancia. El segundo capítulo estudia los vectores desde el punto de vista geométrico y algebraico. En el tercer capítulo se estudia la línea recta y las superficies planas. El cuarto capítulo presenta los cambios en el sistema coordenado de referencia, a través de las transformaciones de coordenadas por traslación y rotación. En el quinto capítulo, se estudia la representación del sistema cartesiano en coordenadas polares. En el capítulo seis se definen las cónicas como lugares geométricos en términos de distancias y como lugares geométricos en el plano, además de la ecuación general de segundo grado y su vinculación con ellas. El capítulo siete comprende el estudio de las diferentes superficies en el espacio y su construcción a través de curvas en el plano. Por último, en el octavo capítulo, se estudia la representación de puntos del sistema de coordenadas cartesiano en otros sistemas de referencia como el de coordenadas cilíndricas y esféricas.

En cada capítulo se presentan los conceptos fundamentales necesarios para la comprensión de las temáticas desarrolladas, haciendo énfasis en la visualización geométrica de estos y las operaciones. De igual forma, en cada uno de los apartados se presentan ejemplos totalmente desarrollados y gran variedad de ejercicios propuestos, correspondientes a las temáticas tratadas en cada capítulo, de tal manera que se posibilite un aprendizaje significativo y se adquieran las competencias en el estudiante.

Esperamos que este libro sea de gran ayuda para profesores y estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría analítica y brinde las herramientas necesarias para la comprensión de conceptos en cursos posteriores y más avanzados.

CAPÍTULO 1

COORDENADAS CASTESIANAS

CAPÍTULO 1
COORDENADAS CASTESIANAS

Hasta Descartes (1591−1661), la geometría, que trata de las líneas y formas, y el álgebra, que trata de números, se consideraban como aspectos totalmente independientes de la matemática. Descartes demostró que casi todos los problemas en la geometría se traducen en problemas de Álgebra, en lo que respecta a preguntas acerca de la longitud de un segmento, y utilizando un sistema de coordenadas para describir el problema.

Descartes encontró una nueva forma de estudiar la geometría. Había sido perturbado por los métodos de los geómetras griegos durante mucho tiempo. Se propuso mejorar el manejo de líneas y figuras planas por medio de una gráfica. El gráfico fue hecho marcando unidades en una línea horizontal, el eje x, y una línea vertical, el eje y, perpendiculares entre sí. Figuras y líneas pueden ser dibujadas en el gráfico, y de acuerdo con su posición, describirla con números.

Todas la leyes de la geometría euclidiana mantienen su verdad en la nueva geometría coordenada. Uno de los avances de la geometría de Descartes con respecto a la euclidiana es que la longitud de un segmento de línea recta puede ser fácilmente determinado y expresado con un número.

El **OBJETIVO** de este capítulo es que el estudiante logre:

- Identificar cantidades escalares
- Aprender a reconocer un sistema coordenado, en la recta, en el plano, en el espacio
- Graficar puntos en los diferentes sistemas coordenados
- Calcular magnitudes (distancias entre dos puntos) de segmentos en cada sistema coordenado
- Identificar y realizar operaciones con segmentos
- Resolver algunos problemas de aplicación

A continuación, se desarrollarán las características de estos sistemas coordenados y la forma de determinar la longitud de segmentos de línea recta.

1.1 Coordenadas cartesianas en una dimensión

Consideremos la recta horizontal $X'X$ y sea O un punto fijo sobre la recta. El punto O se llama origen del sistema coordenado. Se toma una longitud adecuada como unidad de medida, dividiendo la recta a ambos lados de O. A cada punto de la recta $X'X$ corresponde un número real. Por convención, si el punto está al lado derecho de O, tiene coordenada positiva; si está al lado izquierdo, tiene coordenada negativa. A esta recta se le denomina recta real o eje x (Ver Figura 1.1).

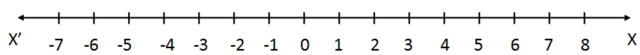


Figura 1.1: Sistema coordenado unidimensional

Cada punto P sobre la recta tiene una coordenada x, representado de la forma $P(x)$. Por ejemplo, en la Figura 1.2, el punto A tiene por coordenada $A(-3)$ y el punto Q, tiene coordenada $Q(\frac{3}{2})$

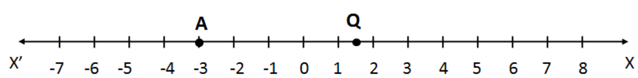


Figura 1.2: Coordenada unidimensional de un punto

1.1.1 Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos sobre el sistema cartesiano unidimensional $P(x_1)$ y $Q(x_2)$, la distancia entre P y Q, representada por $|\overline{PQ}|$ está definida por:

$$|\overline{PQ}| = |x_2 - x_1| \tag{1.1.1}$$

Ejemplo 1.1.1 *Hallar la distancia entre los puntos $A(-3)$ y $B(6)$*

Solución

La situación se muestra en la Figura 1.3
La distancia entre los puntos $A(-3)$ y $B(6)$ es:

$$|\overline{AB}| = |x_2 - x_1| = |(6) - (-3)| = 9 \ unidades$$
$$|\overline{BA}| = |x_1 - x_2| = |(-3) - (6)| = 9 \ unidades$$

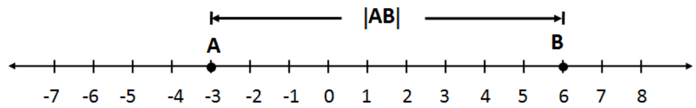


Figura 1.3: Distancia entre puntos A y B

1.1.2 División de un segmento en una razón dada

Consideremos los puntos $P(x_1)$ y $Q(x_2)$, extremos del segmento $\overline{PQ}$. Supongamos que se requiere hallar un punto que divida al segmento en una razón r dada a partir de P. Sea $R(x)$, el punto que cumple con esa condición (Ver Figura 1.4).

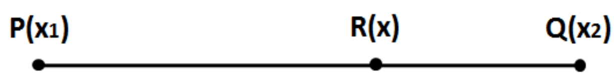


Figura 1.4: División de un segmento en una razón dada

La razón r, a partir de P es:

$$r = \frac{|\overline{PR}|}{|\overline{RQ}|}$$

como $|\overline{PR}| = |x - x_1|$ y $|\overline{RQ}| = |x_2 - x|$, tenemos:

$$r = \frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|}$$

Por otro lado, note que $x_1 < x < x_2$ [1], luego,

$$r(x_2 - x) = x - x_1$$

$$rx_2 - rx = x - x_1$$

$$rx_2 + x_1 = x + rx$$

$$rx_2 + x_1 = x(1 + r)$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$$

entonces, si $P(x_1)$ y $Q(x_2)$ son los extremos del segmento $\overline{PQ}$ en el sistema coordenado unidimensional.

[1] Por tanto, $x - x_1 > 0 \quad y \quad x_2 - x > 0$

La coordenada del punto $R(x)$ que divide a este segmento en la razón $r = \dfrac{|\overline{PR}|}{|\overline{RQ}|}$ es:

$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1 + r} \tag{1.1.2}$$

Si $R(x)$ es punto medio del segmento $\overline{PQ}$, $r = 1$, entonces:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{1.1.3}$$

Ejemplo 1.1.2 *Hallar las coordenadas del punto que está a $\frac{2}{3}$ de la distancia de $A(-4)$ a $B(2)$.*

Solución

Sea $P(x)$ el punto, entre A y B, que se encuentra a partir de A en la razón

$$r = \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PB}|} \quad \text{, entonces} \quad r = \frac{\frac{2}{3}|\overline{AB}|}{\frac{1}{3}|\overline{AB}|} = 2,$$

así

$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1 + r} = \frac{-4 + (2)(2)}{1 + 2} = \frac{-4 + 4}{3} = 0$$

Luego, la coordenada del punto es $P(0)$ o $P = (0)$ (Ver Figura 1.5).

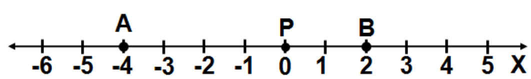


Figura 1.5: Coordenadas del punto P

Ejercicios Sección 1.1.1

1. Hallar la distancia entre los pares de puntos dados en cada ítem:

a) $A(-2)$, $B(1)$

b) $P\left(\frac{5}{2}\right)$, $Q(-3)$

c) $R\left(-\frac{2}{3}\right)$, $S\left(-\frac{1}{4}\right)$

2. La distancia entre dos puntos A y B es 8. Si uno de los puntos es $A(-3)$, hallar la coordenada del otro punto.

3. Hallar los puntos de trisección y el punto medio del segmento cuyos extremos son $P(-12)$ y $Q(-\frac{1}{5})$.

4. El extremo de un segmento es $M\left(\frac{3}{2}\right)$ y su punto medio es $N(-2)$. Hallar la coordenada del otro extremo del segmento.

5. Si P, Q, R y S son cuatro puntos distintos cualesquiera de una recta, demostrar que para todas las ordenaciones posibles de estos puntos sobre la recta, se verifica la igualdad:
$$|\overline{PQ}| + |\overline{QR}| + |\overline{RS}| = |\overline{PS}|$$

1.2 Coordenadas cartesianas en dos dimensiones

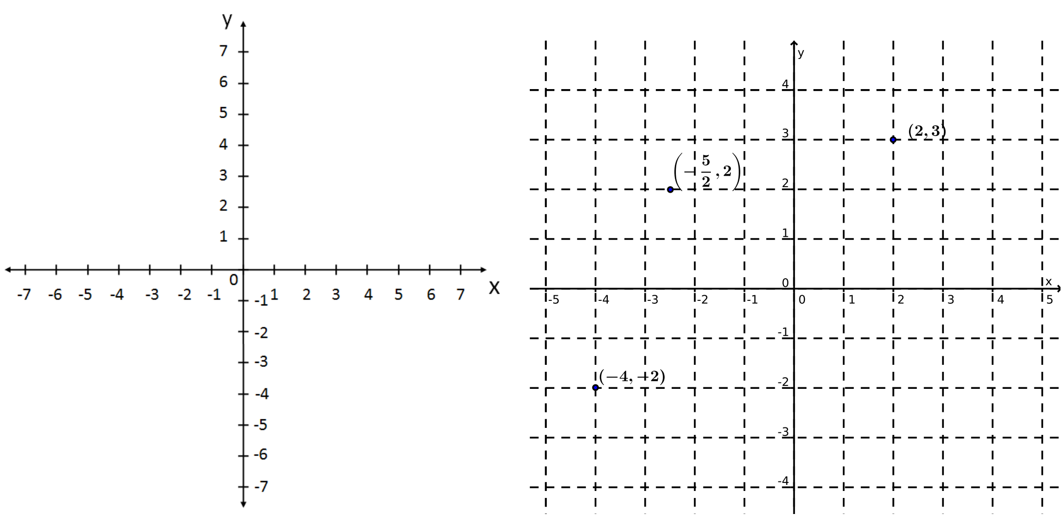


Figura 1.6: Sistema coordenado bidimensional (izquierda), ubicación de puntos en el sistema coordenado rectangular bidimensional (derecha)

Al realizar estudios analíticos de propiedades geométricas, se encuentran muchas limitaciones al trabajar en un sistema coordenado unidimensional, ya que todos los puntos están restringidos a estar sobre una línea recta. Ahora, consideremos un sistema de coordenadas donde un punto pueda moverse en diferentes direcciones sobre un plano. A este sistema se le llama sistema coordenado bidimensional.
Iniciaremos el estudio de estos sistemas coordenados con el sistema coordenado rectangular.
Este sistema está formado por dos rectas $X'X$ y $Y'Y$, perpendiculares entre sí, llamadas ejes coordenados. Las rectas se cortan en el punto O, llamado origen de coordenadas. A la recta $X'X$ se le llama eje x o eje de abscisas y a la recta $Y'Y$ se le llama eje y o eje de ordenadas (Ver Figura 1.6).
Las coordenadas de un punto P en el sistema coordenado rectangular es de la forma (x, y) y se representa $P(x, y)$, donde x es la distancia del punto al eje x y y, la distancia del punto al eje y. Observe en la Figura 1.6 derecha, la ubicación de los puntos C, D y E, con sus respectivas coordenadas cartesianas.

Se debe adoptar una escala apropiada en cada eje coordenado para poder representar adecuadamente puntos de coordenadas conocidas. Ambos ejes coordenados pueden tener escalas iguales o diferentes.

1.2.1 Distancia entre dos puntos

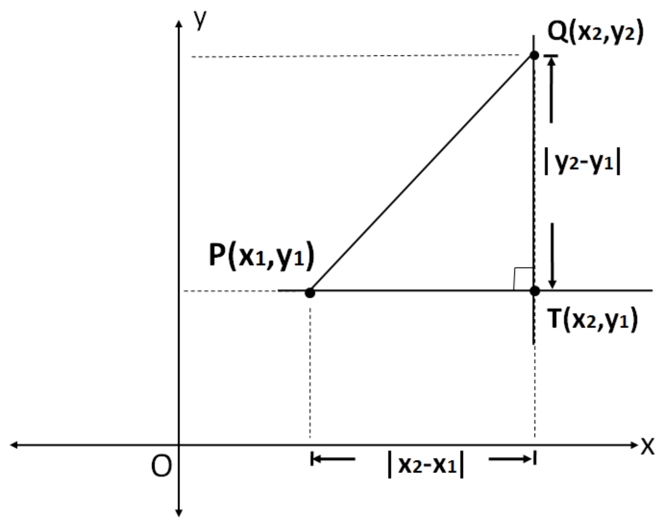


Figura 1.7: Distancia entre puntos en el sistema coordenado rectangular

Consideremos dos puntos en el sistema coordenado rectangular $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$. Construimos un triángulo rectángulo, trazando por P una paralela al eje x y por Q una paralela al eje y, de tal manera que el segmento $\overline{PQ}$ sea la hipotenusa (Ver Figura 1.7). La distancia del punto P al punto T es $|\overline{PT}| = |x_2 - x_1|$ y la distancia del punto Q al punto T es $|\overline{QT}| = |y_2 - y_1|$.
Aplicando el teorema de pitágoras tenemos:

$$(|\overline{PQ}|)^2 = (|\overline{PT}|)^2 + (|\overline{QT}|)^2$$

$$(|\overline{PQ}|)^2 = (|x_2 - x_1|)^2 + (|y_2 - y_1|)^2$$

Luego,

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1.2.1}$$

Así, dados dos puntos sobre el sistema cartesiano bidimensional $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, la distancia entre P y Q, es la representada por $|\overline{PQ}|$ en la ecuación (1.2.1).

Ejemplo 1.2.1 *Hallar la distancia entre los puntos* $A(2,-5)$ *y* $B(-4,-1)$.

Solución

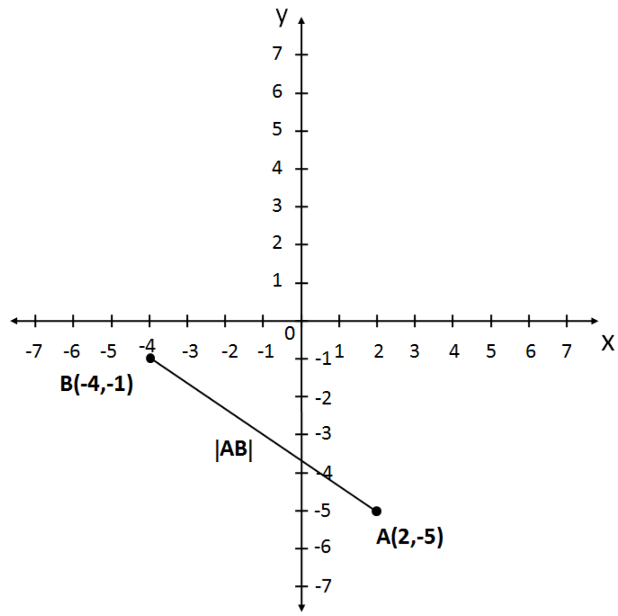


Figura 1.8: Distancia entre puntos A y B

La distancia entre los puntos $A(2,-5)$ y $B(-4,-1)$ (Ver Figura 1.8) es:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{((-4) - (2))^2 + ((-1) - (-5))^2}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-6)^2 + (4)^2}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{52}$$

$$|\overline{AB}| = 2\sqrt{13}\ unidades$$

1.2.2 División de un segmento en una razón dada

Consideremos los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, extremos del segmento $\overline{PQ}$ en el sistema coordenado rectangular bidimensional, y $R(x, y)$ que divide a este segmento en la razón dada r, donde $r = \frac{|\overline{PR}|}{|\overline{RQ}|}$. Trazando perpendiculares a los ejes coordenados a partir de P, Q y R, obtenemos P_x, P_y, R_x, R_y. Q_x y Q_y (Ver Figura 1.9).

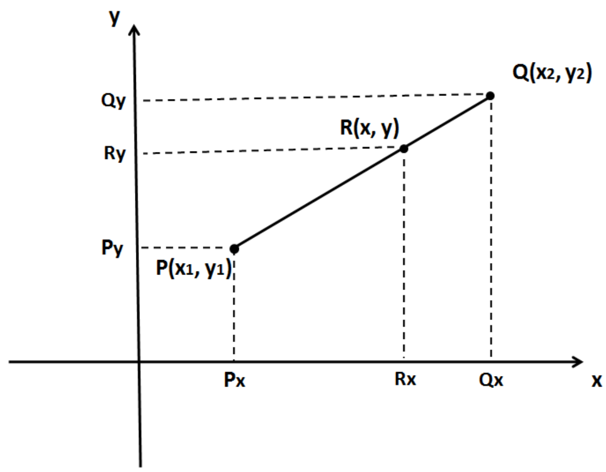


Figura 1.9: División de un segmento en una razón dada

Se sabe de la geometría plana, que cuando tres paralelas cortan a dos o más transversales, los segmentos obtenidos son proporcionales, entonces:

$$\frac{|\overline{PR}|}{|\overline{RQ}|} = \frac{|\overline{P_xR_x}|}{|\overline{R_xQ_x}|} = \frac{|\overline{P_yR_y}|}{|\overline{R_yQ_y}|}$$

Luego:

$$r = \frac{|\overline{P_xR_x}|}{|\overline{R_xQ_x}|} \qquad r = \frac{|\overline{P_yR_y}|}{|\overline{R_yQ_y}|}$$

Reemplazando los valores de las distancias de los segmentos tenemos:

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \qquad r = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

Despejando a x y y de cada expresión obtenemos:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \tag{1.2.2}$$

Así, dados $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ los extremos del segmento $\overline{PQ}$ en el sistema coordenado rectangular bidimensional. Las coordenadas del punto $R(x, y)$ que divide a este segmento en la razón dada $r = \frac{|\overline{PR}|}{|\overline{RQ}|}$ están dadas por (1.2.2).
Si $R(x, y)$ es punto medio de $\overline{PQ}$, $r = 1$, entonces:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{1.2.3}$$

Ejemplo 1.2.2 *Hallar las coordenadas del punto que está a* $\frac{3}{4}$ *de la distancia de* $R(-1,3)$ *a* $T(2,-5)$

Solución

Sea $Q(x,y)$ las coordenadas del punto buscado, la razón r está dada por:

$$r = \frac{|\overline{RQ}|}{|\overline{QT}|}$$

Luego,

$$r = \frac{\frac{3}{4}|\overline{RT}|}{\frac{1}{4}|\overline{RT}|}$$
$$r = 3$$

Por tanto, las coordenadas del punto son:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

Reemplazando los valores dados tenemos:

$$x = \frac{-1+(3)(2)}{1+3} \qquad y = \frac{3+(3)(-5)}{1+3}$$

$$x = \frac{-1+6}{4} \qquad y = \frac{3-15}{4}$$

$$x = \frac{5}{4} \qquad y = \frac{-12}{4}$$

$$x = \frac{5}{4} \qquad y = -3$$

Las coordenadas del punto buscado son: $Q(\frac{5}{4}, -3)$ (Ver Figura 1.10).

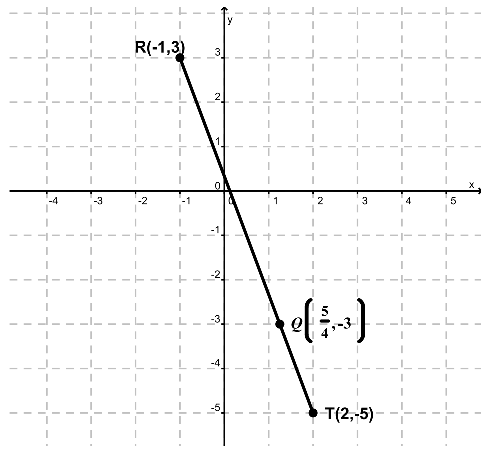


Figura 1.10: Coordenadas del punto Q

Ejemplo 1.2.3 *Hallar las coordenadas del baricentro del triángulo, cuyos vértices son:* $A(-2,3)$, $B(1,-2)$ *y* $C(-1,-3)$

Solución

El baricentro de un triángulo es el punto de cruce entre las medianas[2]. Este punto se encuentra a los $\frac{2}{3}$ sobre la mediana, medidos a partir del vértice. El triángulo formado por los puntos A, B y C se muestra en la Figura 1.11.

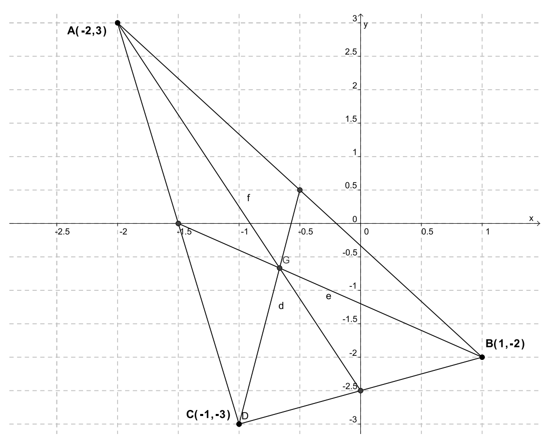


Figura 1.11: Ubicación de los puntos A, B y C y del baricentro en el triángulo ABC

Hallamos las coordenadas del punto medio de uno de los lados. Para el segmento $\overline{AB}$, si el punto $R(x,y)$ es el punto medio, tenemos:

[2]Las medianas son los segmentos de recta que unen cada vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad\qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$x = \frac{-2 + (1)}{2} \qquad\qquad y = \frac{3 + (-2)}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} \qquad\qquad y = \frac{1}{2}$$

$$R\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Ahora, sobre la mediana $\overline{CR}$ buscamos el punto $T(x_3, y_3)$, con $r = \frac{\frac{2}{3}|\overline{CR}|}{\frac{1}{3}|\overline{CR}|} = 2$

$$x_3 = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad\qquad y_3 = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

$$x_3 = \frac{-1 + (2)(-\frac{1}{2})}{1 + 2} \qquad\qquad y_3 = \frac{-3 + (2)(\frac{1}{2})}{1 + 2}$$

$$x_3 = \frac{-1 - 1}{3} \qquad\qquad y_3 = \frac{-3 + 1}{3}$$

$$x_3 = -\tfrac{2}{3} \qquad\qquad y_3 = -\tfrac{2}{3}$$

Entonces, las coordenadas del baricentro son $G\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Verifíquese que este punto coincide para cada mediana (Ver Figura 1.11).

Ejercicios Sección 1.2.1

1. Hallar la distancia entre los puntos dados

   a) $P(-1, 2)$, $Q(2, -4)$

   b) $C\left(\frac{2}{5}, -2\right)$, $D(-1, 1)$

   c) $T\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{2}\right)$, $R\left(\frac{2}{5}, \frac{-1}{4}\right)$

   d) $C(4, \sqrt{3})$, $D(2, -1)$

2. Hallar el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son $(-1, 3)$, $(4, 8)$, $(3, -4)$ y $(2, -6)$.

3. Dados los puntos $A(2, y)$, $B(-8, 4)$ y $C(5, 3)$ Determinar y para que ABC sea un triángulo rectángulo con ángulo recto en A.

4. Determine las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 que dividen al segmento en tres partes iguales, cuyos extremos son $A(3,-1)$ y $B(0,8)$.

5. El baricentro del triángulo ABC es el punto $G(4,0)$, y $M(2,3)$ es el punto medio de lado $\overline{BC}$. Encuentre las coordenadas del vértice A.

1.3 Coordenadas cartesianas en tres dimensiones

Al estudiar la geometría analítica plana, se tienen en cuenta puntos que están localizados en un solo plano. Esta restricción, al igual que en el caso unidimensional, hacen que algunas figuras no puedan estudiarse. Consideremos un sistema en el cual un punto pueda moverse en direcciones diferentes en un plano y fuera de él. A este sistema se le llama *sistema coordenado tridimensional*.

Al situar un punto en un lugar diferente al del plano coordenado, su posición es determinada por su distancia perpendicular a él. Esto hace que sea necesario introducir otra dimensión adicional a la del plano coordenado. De los sistemas coordenados tridimensionales, describiremos las características del más usado: el *sistema coordenado rectangular tridimensional*.

El sistema coordenado tridimensional rectangular está formado por el plano coordenado xy, al cual se le traza un tercer eje perpendicular a dicho plano y que pasa por el origen de coordenadas, llamado eje z (Ver Figura 1.12). Al eje x se le denomina eje de abscisas, al eje y, eje de ordenadas; y al eje z, altura o cota.

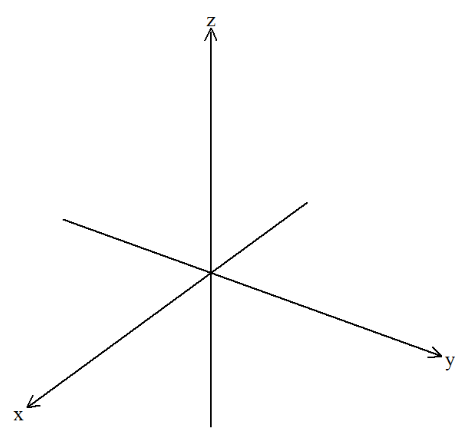


Figura 1.12: Sistema coordenado tridimensional rectangular

Tomando como referencia la Figura 1.12, el eje x es positivo a la izquierda y negativo a la derecha; el eje y, positivo a la derecha y negativo a la izquierda; y el eje z, positivo hacia arriba y negativo hacia abajo.

La designación de los ejes x, y, y z es de libre albedrío. Por convención, se adoptará el llamado *sistema derecho*, el cual ubica los ejes a partir del eje x, y en sentido antihorario se ubican consecutivamente el eje y y el eje z (Ver figura 1.13).

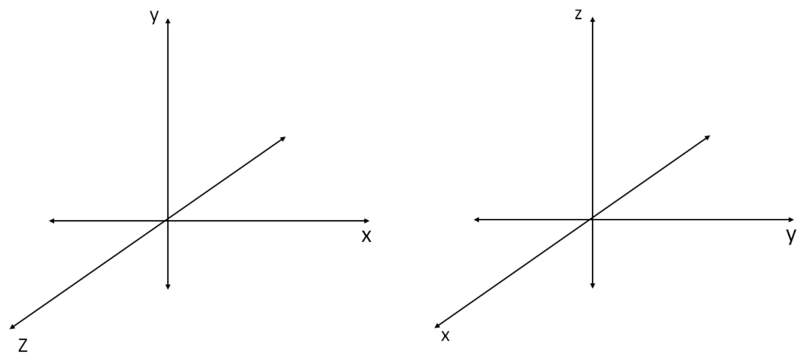


Figura 1.13: Sistema coordenado derecho

Las coordenadas de un punto P en el sistema coordenado rectangular tridimensional es de la forma (x, y, z) y se representa $P(x, y, z)$, donde x es la distancia del punto al eje x, y la distancia del punto al eje y; y z la distancia del punto al eje z. Observe en la Figura 1.14, la ubicación de los puntos P, Q y R, con sus respectivas coordenadas cartesianas.

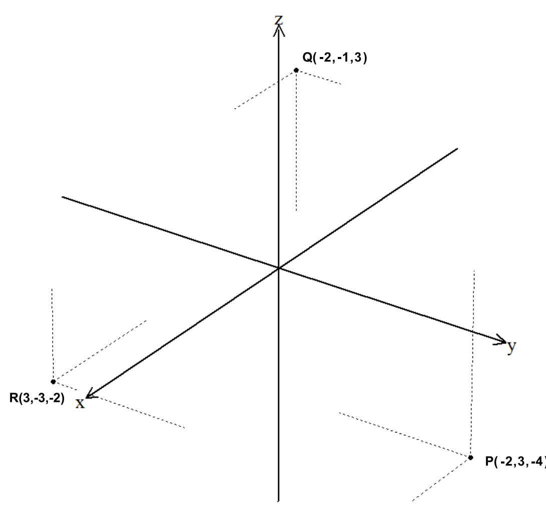


Figura 1.14: Ubicación de puntos en el sistema coordenado rectangular tridimensional

1.3.1 Distancia entre dos puntos

Consideremos dos puntos en el sistema coordenado rectangular tridimensional $Q(x_1, y_1, z_1)$ y $R(x_2, y_2, z_2)$. Los puntos $A(x_1, y_1, 0)$ y $T(x_2, y_2, 0)$, son la proyección de Q y R en el plano xy, respectivamente (Ver Figura 1.15).

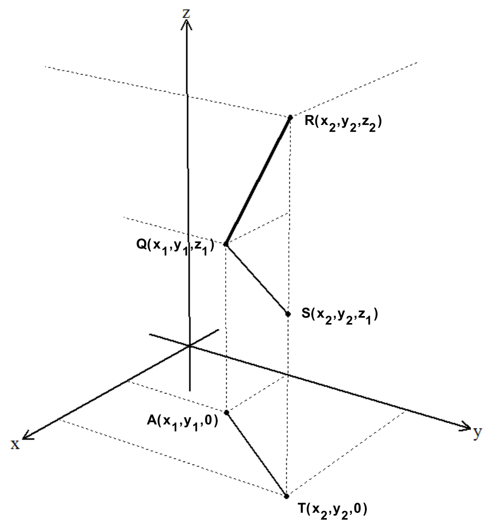


Figura 1.15: Distancia entre puntos en el sistema coordenado rectangular tridimensional

Como A y T son puntos en el plano xy, la distancia de A a T es:

$$|\overline{AT}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Al trazar el segmento $\overline{QS}$ paralelo al segmento $\overline{AT}$ obtenemos el triángulo rectángulo QRS. Aplicando el teorema de pitágoras tenemos:

$$(|\overline{QR}|)^2 = (|\overline{QS}|)^2 + (|\overline{SR}|)^2$$

además

$$|\overline{QS}| = |\overline{AT}|$$

y

$$|\overline{RS}| = |z_2 - z_1|$$

luego:

$$(|\overline{QR}|)^2 = (\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2})^2 + (|z_2 - z_1|)^2$$
$$(|\overline{QR}|)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$
$$|\overline{QR}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Entonces, dados dos puntos sobre el sistema cartesiano tridimensional $Q(x_1, y_1, z_1)$ y $R(x_2, y_2, z_2)$, la distancia entre Q y R, representada por $|\overline{QR}|$, está dada por:

$$|\overline{QR}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{1.3.1}$$

Ejemplo 1.3.1 *Hallar la distancia entre los puntos* $R(3, -2, 4)$ *y* $S(-1, 3, -5)$

Solución

La distancia entre los puntos $R(3, -2, 4)$ y $S(-1, 3, -5)$ es:

$$|RS| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$|RS| = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (3 - (-2))^2 + (-5 - 4)^2}$$

$$|RS| = \sqrt{(-4)^2 + (5)^2 + (-9)^2}$$

$$|RS| = \sqrt{122}\ unidades$$

La ubicación de los puntos R y S se muestra en la Figura 1.16.

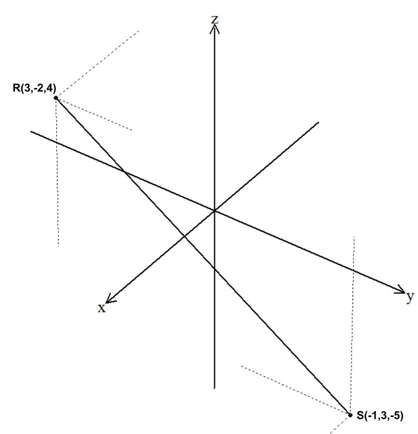


Figura 1.16: Distancia entre puntos R y S

1.3.2 División de un segmento en una razón dada

De forma análoga al sistema coordenado rectangular bidimensional, se encuentran las coordenadas de un punto que divide un segmento en una razón dada en el sistema rectangular tridimensional.
Sean $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ los extremos del segmento $\overline{PQ}$ en el sistema coordenado rectangular tridimensional. Las coordenadas del punto $R(x, y, z)$ que divide a este segmento en la razón dada, $r = \dfrac{|\overline{PR}|}{|\overline{RQ}|}$ son:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \qquad z = \frac{z_1 + rz_2}{1 + r} \tag{1.3.2}$$

Ejemplo 1.3.2 *Hallar las coordenadas del punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos* $A(-1,3,-4)$ *y* $B(2,-2,6)$

Solución

En el punto medio $r = 1$, entonces las coordenadas del punto medio $S(x, y, z)$ son:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r} \qquad z = \frac{z_1 + rz_2}{1+r}$$

Sustituyendo los valores tenemos:

$$x = \frac{-1+2}{2} \qquad y = \frac{3-2}{2} \qquad z = \frac{-4+6}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \qquad y = \frac{1}{2} \qquad z = 1$$

Luego, las coordenadas del punto medio S son: $S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ (Ver Figura 1.17).

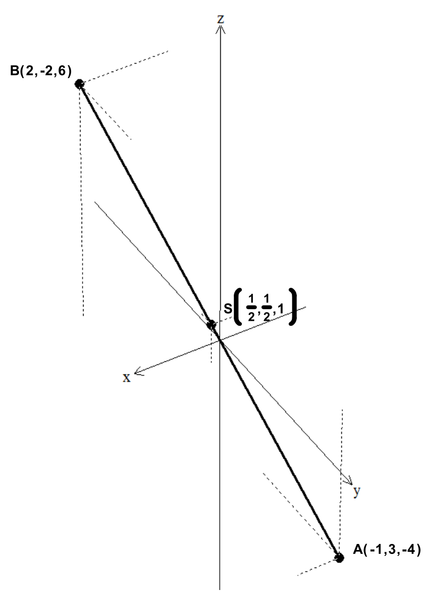


Figura 1.17: Coordenadas del punto medio S

Ejercicios Sección 1.3.1

1. Hallar al distancia entre los puntos dados

a) $D(-1,2,3)$, $C(4,3,8)$

b) $T(0,1,-3)$, $R(4,-2,-1)$

c) $P\left(\frac{1}{2},-3,1\right)$, $Q(-\frac{3}{4},\frac{2}{3},-2)$

d) $A(1,-\frac{2}{5},0)$, $B(1,-6,2)$

2. Probar que los puntos $A(2,0,1)$, $B(3,1,5)$ y $C(4,2,9)$ son colineales.

3. Encontrar las coordenadas del punto P que divide al segmento $\overline{AB}$ en una razón de 2, sabiendo que $A(2,5,-1)$ y $B(3,0,-2)$.

4. Calcular los vértices de un triángulo donde son dados el baricentro $G(2,2,3)$ y los puntos medios de dos lados $M_1(1,2,4)$ y $M_2(2,3,3)$.

Ejercicios Capítulo 1

1. Hallar la distancia entre los pares de puntos dados:

a) $A(-2,3)$, $B(1,5)$

b) $P(5,-1)$, $Q(2,0)$

c) $C(0,-3)$, $B(2,0)$

d) $T(-1,-3)$, $V(-4,-5)$

e) $T(-1,2,5)$, $V(4,5,-9)$

f) $P(0,2,0)$, $Q(4,0,2)$

g) $M(-2,4,3)$, $N(-1,-2,-3)$

h) $S(0,-1,3)$, $U(3,-1,4)$

2. Hallar las coordenadas del baricentro de los triángulos cuyos vértices se dan:

a) $A(5,7)$, $B(1,-3)$, $C(-5,1)$

b) $P(2,-1)$, $Q(6,7)$, $R(-4,-3)$

c) $A(3,6)$, $B(-5,2)$, $C(7,-6)$

d) $A(3,6,-1)$, $B(-5,2,2)$, $C(7,-6,-2)$

e) $M(1,-2,-1)$, $N(3,1,1)$, $O(-1,4,5)$

3. Demostrar, mediante la fórmula de distancia, que los puntos dados son o no colineales.

a) $(-1,3)$, $(2,-2)$, $(3,-1)$

b) $(0,4)$, $(3,-2)$, $(-2,8)$

c) $(-2,3)$, $(-6,1)$, $(-10,-1)$

d) $(1,2)$, $(-3,10)$, $(4,-4)$

e) $(-2,-3,-2)$, $(-3,1,4)$, $(2,3,-1)$

4. Hallar el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son: $(1,3)$, $(3,6)$, $(2,-2)$, $(5,-4)$

5. Demostrar que los puntos $P(-2,4,-3)$, $Q(4,-3,-2)$ $R(-3,-2,4)$ son los vértices de un triángulo equilátero.

6. Demuestre que los puntos $A(6,3,4)$, $B(2,1,-2)$ y $C(4,-1,10)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

7. Demuestre que los puntos $M(3,5,2)$, $N(2,3,-1)$ y $P(6,1,-1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

8. Demuestre que el punto $A(1,-2)$ equidista de los puntos $P(-11,3)$, $R(6,10)$ y $T(1,11)$.

9. Hallar las coordenadas del punto $R(x_2, y_2)$, sabiendo que el punto $Q(9,2)$ está a $\frac{3}{7}$ de la distancia de $P(6,8)$ a R.

10. Hallar las coordenadas de los vértices de un triángulo, sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son: $(-2,1)$, $(5,2)$ y $(2,-3)$.

11. El segmento que une $P(-2,-1)$ con $Q(3,3)$ se prolonga hasta R. Sabiendo que $QR = 3PQ$, hallar las coordenadas de R.

12. Hallar las coordenadas de los vértices de un triángulo, sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son: $(3,2)$, $(-1,-2)$ y $(5,-4)$.

13. Demostrar en forma analítica que las rectas que unen los puntos medios de los lados adyacentes del cuadrilátero $P(-3,2)$, $Q(5,4)$, $R(7,-6)$ y $S(-5,-4)$ forman otro cuadrilátero, cuyo perímetro es igual a la suma de las diagonales del primero.

14. Hallar el área del polígono cuyos vértices son: $(2,5)$, $(7,1)$, $(3,-4)$ y $(-2,3)$.

15. Hallar el área del polígono cuyos vértices son: $(1,5)$, $(-2,4)$, $(-3,-1)$, $(2,-3)$ y $(5,1)$.

16. Calcular el centro de una circunferencia circunscrita a un triángulo de vértices $A(5,-6)$, $B(1,2)$ y $C(3,-4)$.

17. Un triángulo equilátero tiene vértices $A(x,y)$, $B(3,1)$ y $C(-1,-1)$. Calcular el vértice A.

18. Sean $M_1(2,-1)$, $M_2(1,-2)$ y $M_3(-1,3)$ los puntos medios de los lados de un triángulo. Hallar los vértices del triángulo.

19. Dados dos vértices $A(9,-5,12)$ y $B(6,1,19)$ del paralelogramo $ABCD$ y $P(4,-1,7)$ el punto de intersección de sus diagonales, determinar los vértices C y D.

20. Hallar el volumen de la pirámide de base $OABC$ y P el vértice superior. Dados $O(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(2,2,0)$, $C(0,2,0)$ y $P(1,1,9)$.

Bibliografía

[1] KINDLE, Joseph H. Teoría y problemas de geometría analítica plana y del espacio. Primera edición. México: Libros McGraw-Hill, 1970. 150 p. Serie de compendios Schaum.

[2] SERGE LANG, Linear Algebra, Third Edition, Springer Editorial Board, 2000.

[3] LEHMANN, Charles H. Geometría analítica. Primera edición. México: Editorial Limusa, 1980. 495 p.

[4] LEITHOLD, Louis. El cálculo. Séptima edición. México, Oxford university press, 1999. 1360 p.

[5] HAWKING, STEPHEN. Dios creó los números: Los descubrimentos matemáticos que cambiaron la historia. Barcelona: Crítica (2010).

[6] STEWART, James. Cálculo. Trascendentes tempranas. Sexta edición. México: Cengage Learning, 2008. 1280 p.

[7] URIBE C, Julio. Geometría analítica y vectorial. Tercera edición. Medellín: Universidad Nacional de Colombia. Sede Medellín. Facultad de Ciencias, 2000. 505 p.

[8] WOOTON, William. BECKENBACH, Edwin. FLEMING, Frank. Geometría analítica moderna. Primera edición. México: Publicaciones cultural S.A., 1979. 440 p.

Índice de figuras

Indice alfabético

John Alexander Pérez

Posdoctorado en el Programa de Pesquisador de Pós-Doutorado (PPPD), del Instituto de Matemática Aplicada Estadística y Computación Científica (IMECC) de la Universidad Estatal de Campinas (UNICAMP) y Doctor en Matemática Aplicada de la misma universidad. Asimismo, posee una Maestría en Matemática Aplicada de la Universidad EAFIT; es Especialista en Matemática Avanzada de la Universidad Nacional de Colombia y Matemático de la misma universidad. Actualmente es profesor asociado del Instituto Tecnológico Metropolitano –ITM-

jhonperez@itm.edu.co

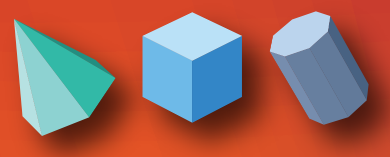
Juan Guillermo Paniagua

Maestría en Ingeniería de la universidad EAFIT, Maestría en Educación y Desarrollo Humano en el convenio CINDE–Universidad de Manizales; asimismo, es Especialista en Didáctica de las Ciencias, de la Universidad Pontificia Bolivariana, Especialista Tecnológico en Diseño de Redes a Gas, del Instituto Tecnológico Pascual Bravo e Ingeniero Mecánico de la Universidad de Antioquia. Actualmente es profesor asistente del Instituto Tecnológico Metropolitano –ITM-.

juanpaniagua@itm.edu.co

TEXTOS ACADÉMICOS

Geometría Analítica e introducción al Cálculo Vectorial



Este texto presenta una compilación de conceptos básicos de la geometría analítica y del nivel introductorio al cálculo vectorial. Está complementado con variados ejemplos que le brinda al estudiante la posibilidad de aprender de una manera sencilla y que le sirve como aprestamiento para cursos más avanzados. Asimismo, propone ejercicios con el fin de afianzar los conceptos aprendidos. En suma, el libro, consideramos es una base fundamental de la matemática para la fundamentación de un tecnólogo o ingeniero.

This text presents a compilation of basic concepts of analytical geometry and introductory level vector calculus. The text is complemented with several examples, which gives the student the possibility to learn in a simple manner and at the same time is the basis for more advanced courses. In addition, this text contains exercises in order to strengthen the concepts learned. Ultimately, we see this book as a basic foundation of mathematics for the grounding of a technologist or an engineer.

ITM
Institución Universitaria
Acreditada en Alta Calidad

ISBN: 978-958-8743-97-4