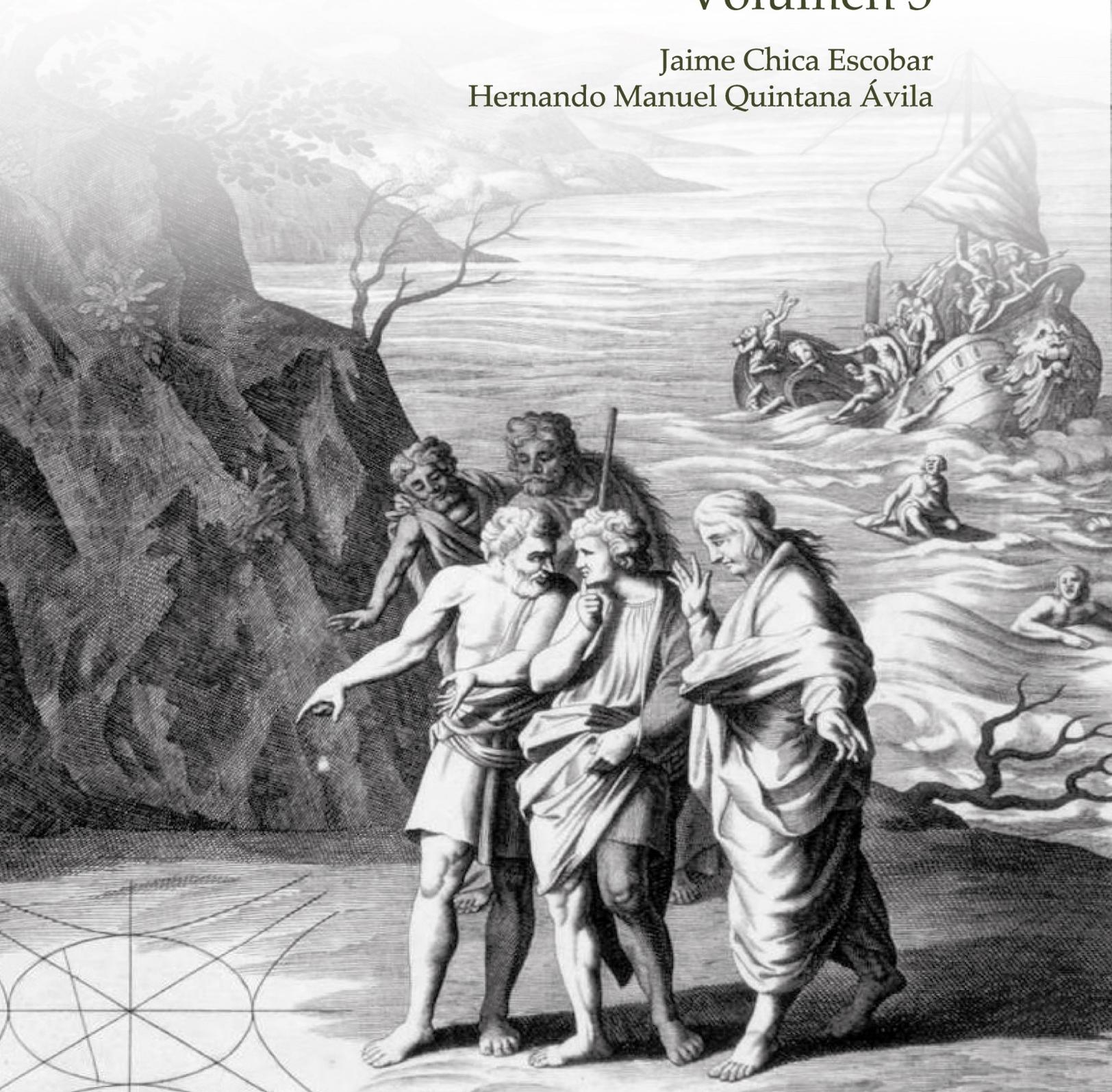


Tratado de las Secciones Cónicas: La Hipérbola

Volumen 3

Jaime Chica Escobar
Hernando Manuel Quintana Ávila



Aristippus Philosophus Socraticus, naufragio cum ejectus ad Rhodiensium litus animadvertisset Geometrica schemata descripta, exclamavisse ad comites ita dicitur, Bene speremus, Hominum enim vestigia video.
Vitruv. Architect. lib. 6. Pref.

FONDO[®]
EDITORIAL
ITM

Tratado de las Secciones Cónicas

La Hipérbola

Volumen 3

JAIME CHICA ESCOBAR
HERNANDO MANUEL QUINTANA ÁVILA



Chica Escobar, Jaime

Tratado de las Secciones Cónicas: La Hipérbola / Jaime Chica Escobar, Hernando Manuel Quintana Ávila. – 1ª ed. – Medellín : Instituto Tecnológico Metropolitano, 2019. 223 p. – (Textos Académicos)

Incluye referencias bibliográficas

1. Secciones cónicas 2. Hipérbola I. Quintana Ávila, Hernando Manuel II. Tít. III. Serie

516.15 SCDD 21 ed.

Catalogación en la publicación – Biblioteca ITM

Tratado de las Secciones Cónicas: La Hipérbola
© Instituto Tecnológico Metropolitano

Edición: diciembre 2019

Epub: ISBN 978-958-5414-97-6

Impresa: ISBN 978-958-5414-95-2

Pdf: ISBN 978-958-5414-96-9

Hechos todos los depósitos legales

Autores

JAIME CHICA ESCOBAR

HERNANDO MANUEL QUINTANA ÁVILA

Directora editorial

SILVIA INÉS JIMÉNEZ GÓMEZ

Comité editorial

JORGE AUBAD ECHEVERRI, PhD.

JORGE IVÁN BRAND ORTÍZ, PhD.

SILVIA INÉS JIMENÉZ GÓMEZ, MSc.

EDUARD EMIRO RODRÍGUEZ RAMÍREZ, MSc.

VIVIANA DÍAZ, Esp.

Correctora de textos

LILA MARÍA CORTÉS FONNEGRA

Asistente editorial

VIVIANA DÍAZ

Diagramador

JONATHAN TABORDA HERNÁNDEZ

Diseño de la carátula

ALFONDO TOBÓN BOTERO

Editado en Medellín, Colombia

Sello Editorial Fondo Editorial ITM

Instituto Tecnológico Metropolitano

Calle 73 No. 76A 354

Tel.: (574) 440 5100 Ext. 5197-5382

www.itm.edu.co

<https://fondoeditorial.itm.edu.co/>

Las opiniones expresadas en el presente texto no representan la posición oficial del ITM, por lo tanto, son responsabilidad del autor quien es igualmente responsable de las citaciones realizadas y de la originalidad de su obra. En consecuencia, el ITM no sería responsable ante terceros por el contenido técnico o ideológico expresado en el texto, ni asume responsabilidad alguna por las infracciones a las normas de propiedad intelectual.



Índice general

Agradecimientos	IV
Prólogo	VI
Presentación	X
3. La Hipérbola	1
3.1. Definición	1
3.2. Características y puntos notables de la hipérbola	2
3.3. Ecuaciones analíticas	12
3.4. Comparación entre los semiejes transverso (a) y conjugado (b)	14
3.5. Expresión de los radios focales. Otra forma de definir la $\mathcal{H}_{g,g-F-\epsilon}$	15
3.6. Regiones que determina la $\mathcal{H}_{g,g-F-\epsilon}$ en el plano	25
3.7. El <i>latus rectum</i> de la hipérbola	31
3.8. Ecuación de la hipérbola con centro en $C(h, k)$	36
3.8.1. Ecuación de la hipérbola con centro en $C(h, k)$ y eje focal paralelo al eje x	36
3.8.2. Ecuación de la hipérbola de centro en $C(h, k)$ y eje focal paralelo al eje y	38
3.9. Ejercicios	50
3.10. Construcciones de la hipérbola trazadas por puntos y métodos continuos	50
3.10.1. Primera construcción de la hipérbola trazada por puntos	50
3.10.2. Primera construcción de la hipérbola trazada por un método continuo	52
3.10.3. Segunda construcción de la hipérbola trazada por un método continuo	53
3.10.4. Segunda construcción de la hipérbola trazada por puntos	55
3.10.5. Tercera construcción de la hipérbola trazada por puntos	57
3.11. Asíntotas de la hipérbola	57
3.12. Ejercicios	61
3.13. Hipérbolas conjugadas	63
3.14. Tangente a la hipérbola por un punto de la curva. Propiedad óptica (o focal) de la curva	65
3.15. Ángulo de inclinación de la tangente	72
3.16. Tangente a la hipérbola conjugada por un punto de la curva	73
3.17. Construcción de la tangente por un punto de la hipérbola	75
3.18. Propiedad de las tangentes desde los extremos de una cuerda focal	76



3.19. Ecuación de la hipérbola referida a sus asíntotas	79
3.20. La hipérbola equilátera (o rectangular)	90
3.21. Propiedades de la hipérbola equilátera	91
3.22. Valores de la función $f(x, y) = a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2$	98
3.23. Intersección de una recta y una hipérbola. Tangentes a una hipérbola de pendiente dada	100
3.24. Problemas sobre tangentes a la hipérbola	104
3.25. Rectas tangente, normal, subnormal y subtangente en la hipérbola	105
3.26. Ecuaciones paramétricas de la hipérbola	108
3.27. La cuadratura de la hipérbola	116
3.28. El radio de curvatura en un punto de la hipérbola.	119
3.29. La evoluta de la hipérbola	122
3.30. Construcción de las tangentes a una hipérbola paralelas a una recta dada	126
3.31. Tangentes a una hipérbola desde un punto $P_0(x_0, y_0) \in \text{ext } \mathcal{H}$	132
3.32. Otra forma de encontrar las ecuaciones analíticas de las tangentes...	136
3.33. Una construcción de la hipérbola y de las tangentes, tanto desde un punto...	139
3.34. 1ª y 2ª teoremas de Poncelet para la hipérbola...	142
3.35. Diámetros de la hipérbola	146
3.36. Semiejes conjugados de la hipérbola	154
3.37. Los teoremas de Apollonius para la hipérbola	156
3.38. Construir los ejes de una hipérbola conociendo la posición y longitud...	162
3.39. Otros lugares geométricos asociados a dos puntos del plano	170
3.39.1. Primer lugar geométrico: círculo de Apollonius	173
3.39.2. Segundo lugar geométrico: circunferencia de centro en el punto medio de \overline{AB} .	181
3.39.3. Tercer lugar geométrico: recta perpendicular a \overline{AB}	183
Apéndices	195
A. Introducción a las cónicas de Apollonius	197
A.1. Contenido de la obra	197
Bibliografía	201
Índice alfabético	202

A la memoria de **Giovanny Atehortúa Gutiérrez** y su familia.

A **Johannes Kepler (1571-1630)** con motivo del 400 aniversario de la publicación de su *Harmonices Mundi* (1619-2019).

No han pasado ni dieciocho meses desde que vi el primer rayo de luz, ni tres meses desde que amaneció, y muy pocos días desde que el Sol, en todo su esplendor, lo más admirable que se puede ver, brilló repentinamente ante mí. Nada me detiene; no me voy a culpar por mi furia sagrada; triunfaré sobre la humanidad cuando confiese honestamente que he robado los vasos de oro de los egipcios para construirle un tabernáculo a mi Dios lejos de los confines de Egipto. Si me perdonáis, me alegraré; si os ponéis furiosos conmigo, podré soportarlo; la suerte está hechada, el libro está escrito para que se lea ahora o en el futuro. No me importa quién lo lea; puede esperar un siglo hasta que surja un lector, dado que Dios ha esperado seis mil años para que alguien observara su obra.

Johannes Kepler, *Harmonices Mundi*, libro V, 1619.



Agradecimientos

Esta obra está dedicada al Dr. Dario Valencia R. quien por muchos años fue profesor de la Facultad de Minas de la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín, y a través de lecciones maravillosas e inolvidables nos introdujo en el mundo de la geometría analítica, a transformar los problemas de geometría en problemas de álgebra, utilizando el instrumento de las coordenadas, como ya lo había enseñado René Descartes (1596 - 1650), matemático y filósofo francés del siglo XVII. Ambos autores desean agradecer a Jonathan Tabora Hernández por la diagramación, elaboración del índice, apéndice y edición de la presente monografía en el software computacional \LaTeX .



Prólogo

El tercer gigante matemático de la Antigüedad griega, al lado de Euclides (325 a.C - 265 a.C) y Arquímedes (287 a.C - 212 a.C) fue Apollonius (262 a.C - 200 a.C), quien nació en Perga al sur de Asia Menor. Siendo joven fue a Alejandría donde estudió con los sucesores de Euclides y luego pasó la mayor parte de su vida en la universidad de esa ciudad.

Debe su fama a la extraordinaria y monumental obra: *Secciones Cónicas*, trabajo con el que ganó el título entre sus contemporáneos de «El mejor geómetra».

Las secciones cónicas de Apolonio son 8 libros que contienen aproximadamente 400 proposiciones. Son una investigación profunda de estas curvas: parábola, elipse e hipérbola, que sustituyó trabajos anteriores sobre el mismo tema. Los antiguos griegos las obtenían como secciones de un cono circular recto en un plano que corte al eje del cono. Como se comprende, Apolonio dedujo la mayor parte de las propiedades de las cónicas sin utilizar coordenadas ni ecuaciones de las curvas, como lo hacemos ahora, ya que dicho estudio solo empezó a hacerse después de la creación de la geometría analítica por parte de los matemáticos franceses Rene Descartes (1596 - 1650) y Pierre de Fermat (1601 - 1665).

Estas tres monografías que presentamos: la parábola (1), la elipse (2) y la hipérbola (3), recogen cada una por separado, un estudio de las propiedades geométricas básicas de estas curvas, empezando por la construcción de ellas, todas obtenidas utilizando geometría analítica, es decir, las ecuaciones analíticas de las curvas.

Existe un mecanismo que veremos aplicado a todo lo largo de esta obra. El primer paso, consiste en traducir toda propiedad geométrica que define a una figura, en una relación analítica equivalente a aquella. Cuando esto se hace, se dice que se ha puesto en una *ecuación* (o *ecuaciones*) el primitivo enunciado geométrico. Transformar y resolver la ecuación, constituye el siguiente paso, tarea esta, que corresponde al análisis, esto es, al álgebra y el cálculo infinitesimal. El tercer paso, consiste en interpretar geoméricamente sobre la figura primitiva, las consecuencias derivadas del proceso analítico.

Hay un punto de vista común que utilizamos en las tres monografías para definir las cónicas: dada una recta $\mathcal{D}\mathcal{D}$ llamada *directriz*, un punto F no contenido en $\mathcal{D}\mathcal{D}$ que llamaremos *foco* y un número real $\epsilon > 0$, denominado *excentricidad*, la cónica de directriz $\mathcal{D}\mathcal{D}$, foco F y excentricidad ϵ es el conjunto

de los puntos P del plano (el plano $\mathcal{D}\mathcal{D}$ y F) en los que se cumple que:

$$\frac{PF}{PD} = \epsilon$$

- Cuando $\epsilon = 1$ la cónica se llama *parábola*
- Cuando $\epsilon < 1$ la cónica se llama *elipse*
- Cuando $\epsilon > 1$ la cónica se llama *hipérbola*

Hay que señalar que estas curvas tienen gran importancia en la técnica: en muchos diseños de ingeniería se aplican las parábolas, en óptica se utilizan en la construcción de telescopios, en la ingeniería de los radares, en telecomunicaciones, etc.

Pero el lugar donde juegan un papel esencial es en la *Ley de Gravitación Universal* de Newton (Isaac Newton 1643 - 1727) y en las *Leyes de Kepler* (Johannes Kepler 1571 - 1630) que rigen el movimiento de los planetas alrededor del Sol. La 1.^a de ellas dice expresamente que «la órbita de todo planeta alrededor del Sol es una elipse, con el Sol en uno de sus focos».

Es posible demostrar que las leyes de Kepler son equivalentes a la Ley de Gravitación Universal. O sea, partiendo de las Leyes de Kepler se puede demostrar la Ley de Gravitación Universal y viceversa. Este es uno de los problemas más importantes que ha resuelto la mente humana y que resolvió Newton utilizando el cálculo que acababa de inventar.

El contenido de cada una de estas monografías puede resumirse así:

- Definición de la curva
- Diferentes construcciones de ellas, bien sea por puntos o por métodos continuos
- Ecuaciones analíticas y análisis de la extensión de cada curva
- Intersección de una cónica con una recta
- Propiedades ópticas de cada curva
- Recta tangente a una cónica y de pendiente dada
- Ecuación de tangentes y normales por un punto
- Construcción de la tangente en un punto de la curva
- Subtangentes y subnormales en un punto. Propiedades
- Polo y polar de una cónica
- Diámetros y sus propiedades; diámetros conjugados
- Ecuación de la cónica referida a un par de diámetros conjugados
- Distintas ecuaciones paramétricas de las cónicas. Ecuación en coordenadas polares
- Longitud de arco y cuadratura de cada curva. Radio de curvatura y ecuación de la evoluta

Para el tratamiento del último punto es indispensable el uso de herramientas del cálculo: derivadas e integrales.

También debe señalarse que en las monografías se emplean ecuaciones de rectas, circunferencias y álgebra de vectores. El tratamiento de estos temas se supone conocido por el lector.

Finalmente quedan pendientes tres problemas:

1. Estudio analítico de las secciones obtenidas al cortar un cono con un plano.
2. Los lugares geométricos representados por la ecuación general de segundo grado en dos variables:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (1)$$

3. Los lugares geométricos representados por la ecuación general de segundo grado en tres variables:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0 \quad (2)$$

Para el estudio de los dos últimos problemas, especialmente el tercero, es indispensable el empleo de valores y vectores propios de una matriz, tema que se estudia en un curso de Álgebra Lineal.

La primera ecuación puede representar una cónica no centrada, o sea, trasladada y rotada en el plano que puede ser:

- Una circunferencia
- Una elipse
- Una parábola
- Una hipérbola

O una cónica degenerada:

- Dos rectas paralelas
- Dos rectas concurrentes
- Una recta
- Un punto
- Φ (vacío), o sea que $\nexists (x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen la ecuación (2).

La ecuación puede representar una superficie cuádrica no centrada, o sea, trasladada y rotada a un punto del espacio y puede representar:

- Un cono circular recto
- Un cono elíptico
- Un cono hiperbólico
- Una esfera
- Un elipsoide
- Un hiperboloide de una hoja
- Un hiperboloide de dos hojas
- Un paraboloides hiperbólico

O una cuádrica degenerada:

- Dos planos paralelos
- Dos planos que se cortan
- Un plano
- Un punto
- Φ , esto es, ningún punto del espacio satisface (2).



Presentación

Este libro es la última de las monografías que hemos redactado sobre las *cónicas*. Se trata ahora de la *hipérbola*, la más extraña de las tres curvas y que es la única que tiene dos ramas y dos asíntotas.

Manteniendo el mismo punto de vista, la curva se presenta como el lugar de los puntos cuyo cociente de distancias a una recta fija (la directriz) y a un punto fijo (el foco) se mantiene constante y ahora $\epsilon > 0$.

El texto contiene un estudio geométrico de la curva, su extensión, ecuaciones analíticas y el trazado o construcción por puntos o de manera continua.

También incluye: ecuaciones de tangentes, de normales, propiedades ópticas de la curva. Además, obtención de las ecuaciones de las asíntotas, construcción de tangentes por un punto de la curva y por un punto exterior a la curva, ecuaciones de la hipérbola referida a las asíntotas, así como el estudio de la hipérbola conjugada de una hipérbola dada y la hipérbola equilátera y su construcción.

El estudio continua con los diámetros conjugados de la curva, la ecuación de Chasles de la hipérbola respecto a dos diámetros conjugados, los teoremas de Apollonius y Poncelet para la hipérbola y finalmente el radio de curvatura y la evoluta de la curva, nociones que son importantísimas en dinámica.

Conviene señalar, por último, que esta monografía contiene muchísimo más material de lo que generalmente se encuentra en los libros que circulan en nuestro medio y es un texto dirigido a estudiosos de la geometría analítica que hallarán en sus páginas lecciones que los prepararán para adentrarse con éxito en la cinemática y la dinámica en general.

El material gráfico de línea presente en esta obra fue elaborado por los autores.

La Hipérbola

3.1. Definición

Dada una recta $\mathcal{D}\mathcal{D}$ que llamaremos *directriz*, un punto F ($F \notin \mathcal{D}\mathcal{D}$), denominado *foco* y un escalar $\epsilon > 1$ que llamaremos *excentricidad*, el lugar de los puntos P en el plano para los cuales,

$$(\text{distancia al foco}) \div (\text{distancia a la directriz}) = \epsilon \quad (\text{véase Fig. 3.1}).$$

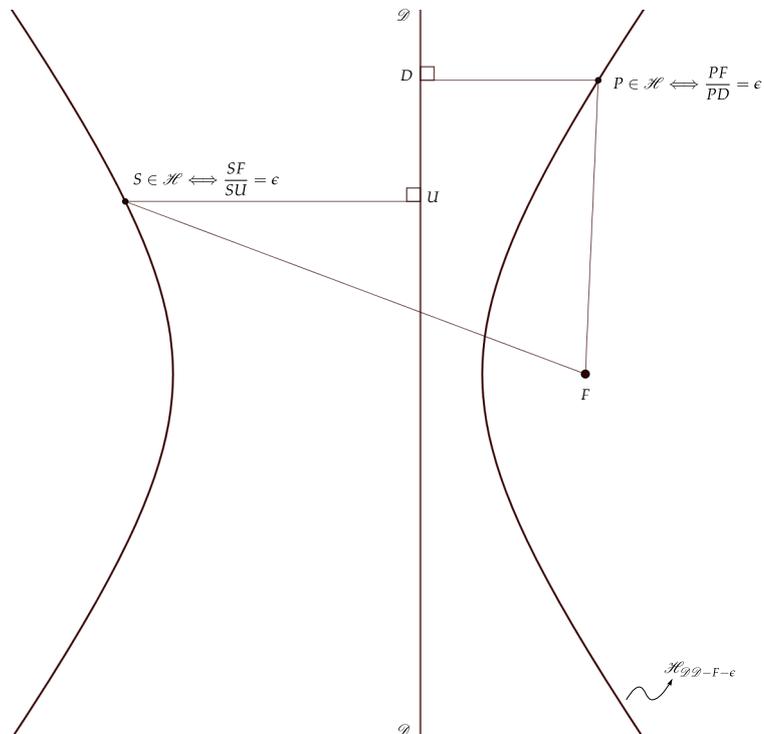


Figura 3.1. La hipérbola $\mathcal{H}_{\mathcal{D}\mathcal{D}-F-\epsilon}$



se llama la hipérbola, de directriz $\mathcal{D}\mathcal{D}$, foco F y excentricidad ϵ , (denotada por $\mathcal{H}_{\mathcal{D}\mathcal{D}-F-\epsilon}$).
 Más precisamente

$$\mathcal{H}_{\mathcal{D}\mathcal{D}-F-\epsilon} = \left\{ P / \frac{PF}{PD} = \epsilon; \epsilon > 1 \text{ (constante)} \right\}$$

3.2. Características y puntos notables de la hipérbola

Al trazar desde F , la recta \overleftrightarrow{FQ} perpendicular a la directriz $\mathcal{D}\mathcal{D}$, (véase Fig. 3.2).
 Se pueden establecer algunas características y puntos importantes de la Hipérbola:

- (1) Sobre la recta \overleftrightarrow{FQ} hay dos puntos V y V' de la curva llamados los vértices de la Hipérbola.
- (2) Hay una región \mathcal{R} del plano (véase Fig. 3.2) donde no hay puntos de la curva y que esta consta de dos ramas infinitas que no se cierran y simétricas respecto a dos ejes perpendiculares xy del plano que se cortan en O (O : punto medio de $\overleftrightarrow{VV'}$).

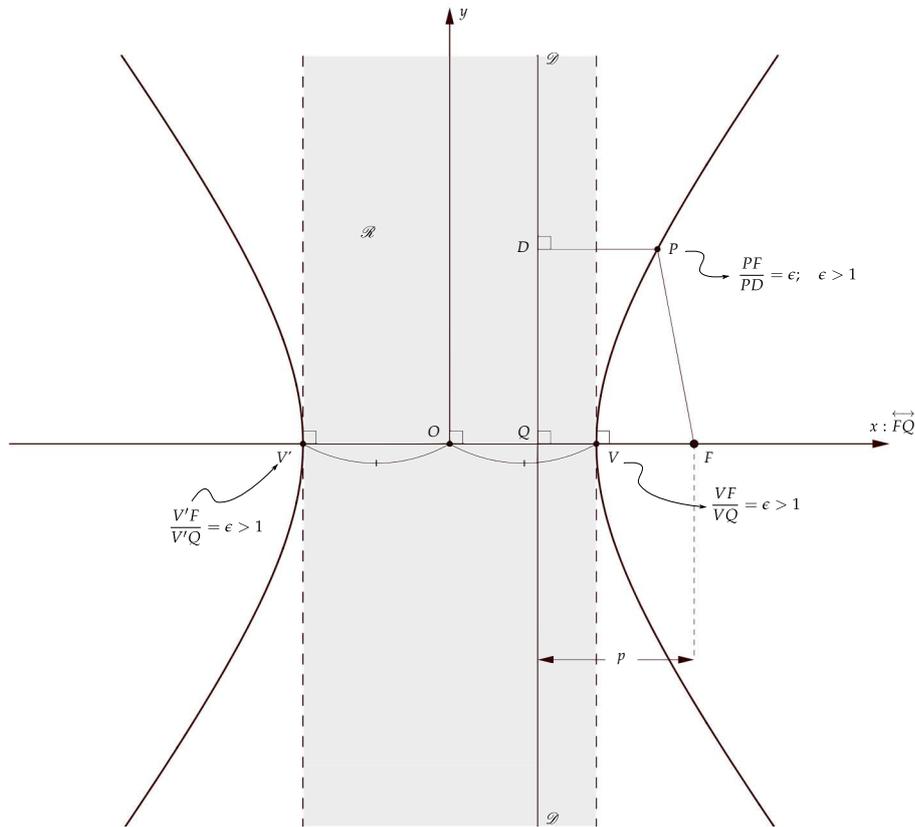


Figura 3.2. La $\mathcal{H}_{\mathcal{D}\mathcal{D}-F-\epsilon}$ tiene puntos V y V' en la \overleftrightarrow{FQ} , dos ramas y no tiene puntos en \mathcal{R}

Todo lo establecido en (1) y (2) se justifica a continuación en las propiedades (i, ii, ..., v).
 Llamaremos p a la distancia foco-directriz, es decir,

$$p = d(F, \mathcal{D}\mathcal{D}) = FQ$$

Propiedades 3.1.

- (i) Existe un punto $V \in \mathcal{H}$ en la recta \overleftrightarrow{FQ} , V entre F y Q .



Demostración. Tomemos un punto P en el eje x , ($x : FQ$), P entre F y Q y llamemos $\delta = PF$ (véase Fig. 3.3a).

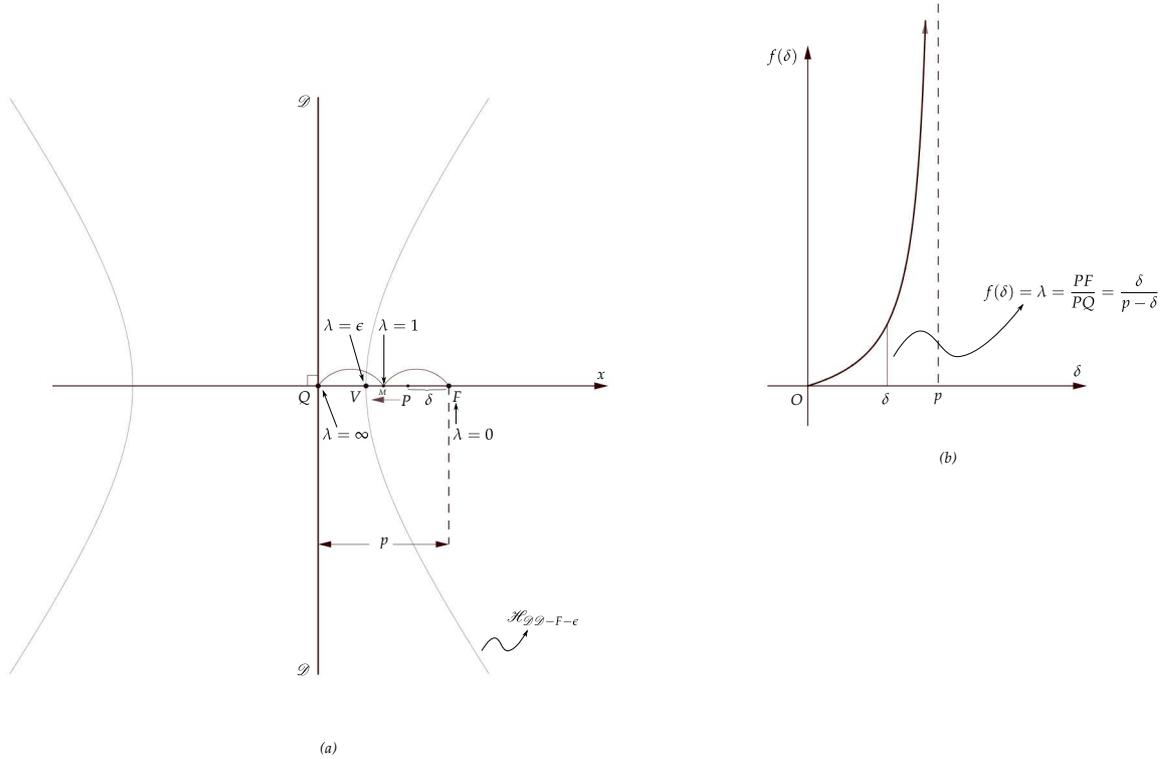


Figura 3.3. Existe un punto $V \in \mathcal{H}$ en la recta FQ , V entre F y Q

Vamos a estudiar como varía $\lambda = \frac{PF}{PQ}$ cuando P se mueve sobre QF .

$$\lambda = \frac{PF}{PQ} = \frac{\delta}{p - \delta} = f(\delta)$$

Como,

$$f'(\delta) = \frac{(p - \delta) \cdot 1 - \delta(-1)}{(p - \delta)^2} = \frac{p}{(p - \delta)^2} > 0$$

y

$$f''(\delta) = \frac{(p - \delta)^2 \cdot 0 - p \cdot 2(p - \delta) \cdot (-1)}{(p - \delta)^4} = \frac{2p}{(p - \delta)^3} > 0,$$

la gráfica de $f(\delta)$ es como se indica en la (Fig. 3.3b).

Cuando P se desplaza de $F \rightarrow Q$, $f(\delta) = \lambda = \frac{PF}{PQ}$ crece. Es claro que:

- Si P se toma en F , $\lambda = 0$.
- Si P se acerca a Q , $\lambda \rightarrow \infty$.



para \mathcal{H} .

Ya teníamos que $\frac{P'F}{P'D} = \epsilon$ y que

$$P'F = \sqrt{\left(x + \frac{\epsilon^2 p}{\epsilon^2 - 1}\right)^2 + y^2}$$

y

$$P'D = x + \frac{p}{\epsilon^2 - 1}$$

Si $P'(-x, y)$ es el simétrico de $P(x, y)$ con respecto al eje y , se tiene que $P' \in \mathcal{H}_{\mathcal{D}\mathcal{D}'-F-\epsilon}$, esto es

$$\frac{P'F}{P'D} = \epsilon$$

Ahora por la fórmula de distancia,

$$PF' = \sqrt{\left(x + \frac{\epsilon^2 p}{\epsilon^2 - 1}\right)^2 + y^2} = P'F$$

y

$$PD' = x + \frac{p}{\epsilon^2 - 1} = P'D$$

Luego,

$$\frac{PF'}{PD'} = \frac{P'F}{P'D} = \epsilon$$

con lo que se establece que $\mathcal{D}'\mathcal{D}'$ y F' son otra directriz y otro foco de $\mathcal{H}_{\mathcal{D}\mathcal{D}'-F-\epsilon}$. ■

3.3. Ecuaciones analíticas

Lo que sigue ahora es obtener las ecuaciones analíticas de \mathcal{H} .

Consideremos el sistema de coordenadas cartesianas ortogonales XY con origen en el foco F y eje X el eje de simetría $\overleftrightarrow{F'F}$ de la curva, (véase Fig. 3.12).

Tomemos un punto $P \in \mathcal{H}$ de coordenadas (X, Y) respecto al sistema XY . Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{PF}{PD} &= \epsilon, \quad \epsilon > 1 \\ PF &= \sqrt{X^2 + Y^2}; \quad PD = X + p \end{aligned}$$

Así que,

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = \epsilon(X + p)$$

Elevando al cuadrado,

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= \epsilon^2 X^2 + \epsilon^2 p^2 + 2\epsilon^2 X \\ (\epsilon^2 - 1)X^2 + 2\epsilon^2 pX - Y^2 &= -\epsilon^2 p^2 \\ \left(X^2 + 2\frac{\epsilon^2 p}{\epsilon^2 - 1}X\right) - \frac{Y^2}{\epsilon^2 - 1} &= -\frac{\epsilon^2 p^2}{\epsilon^2 - 1} \end{aligned}$$

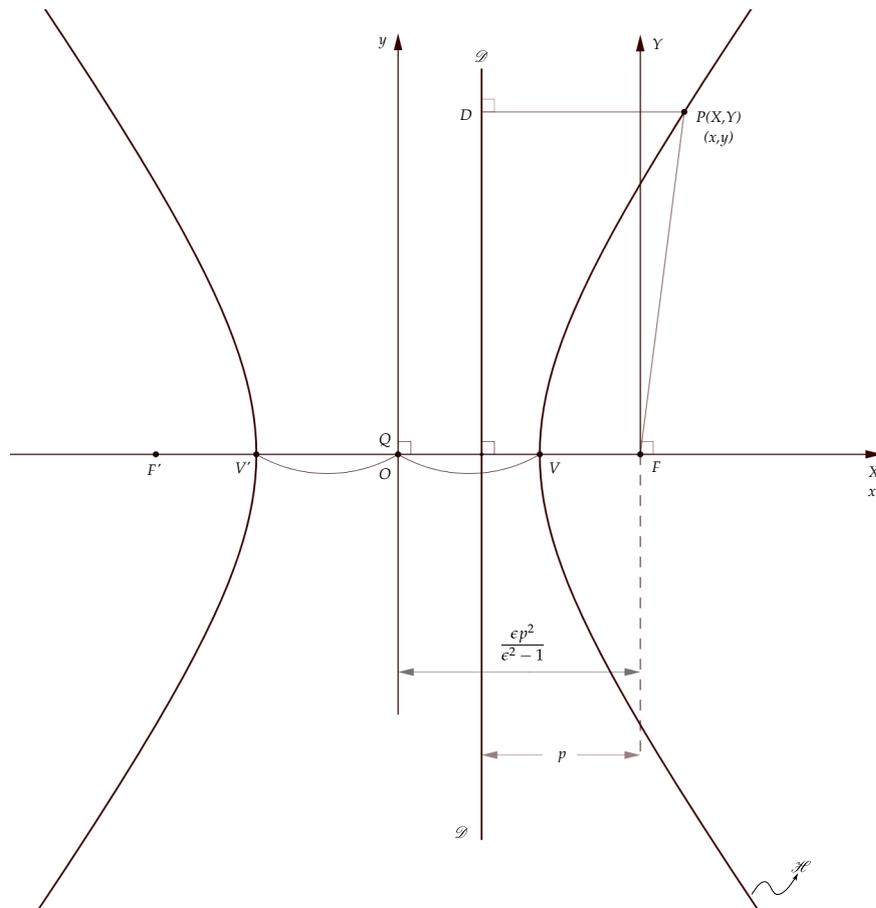


Figura 3.12

Completando un trinomio cuadrado perfecto,

$$\left(X^2 + 2\frac{\epsilon^2 p}{\epsilon^2 - 1}X + \frac{\epsilon^4 p^2}{(\epsilon^2 - 1)^2} \right) - \frac{Y^2}{\epsilon^2 - 1} = -\frac{\epsilon^2 p^2}{\epsilon^2 - 1} + \frac{\epsilon^4 p^2}{(\epsilon^2 - 1)^2}$$

O sea que,

$$\left(X + \frac{\epsilon^2 p}{\epsilon^2 - 1} \right)^2 - \frac{Y^2}{\epsilon^2 - 1} = \frac{\epsilon^2 p^2}{\epsilon^2 - 1} \left(\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - 1} - 1 \right)$$

y finalmente:

$$\left(X + \frac{\epsilon^2 p}{\epsilon^2 - 1} \right)^2 - \frac{Y^2}{\epsilon^2 - 1} = \frac{\epsilon^2 p^2}{\epsilon^2 - 1} \quad (3.3)$$

Realicemos una traslación de ejes al punto O (O punto medio de $\overline{V'V}$).

Las coordenadas de O con respecto al sistema XY son:

$$\left(-\frac{\epsilon^2 p}{\epsilon^2 - 1}, 0 \right)$$

Quedan así definidos unos nuevos ejes xy paralelos a los ejes XY con origen en O .



Las ecuaciones de la transformación son:

$$\left. \begin{aligned} X &= x - \frac{\epsilon^2 p}{\epsilon^2 - 1} \\ Y &= y \end{aligned} \right\}$$

que llevamos a (3.3) obteniendo:

$$x^2 - \frac{y^2}{\epsilon^2 - 1} = \frac{\epsilon^2 p^2}{(\epsilon^2 - 1)^2}$$

En esta ecuación, (x, y) son las coordenadas de P en el sistema xy .

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\epsilon p}{\epsilon^2 - 1}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\epsilon p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}\right)^2} = 1 \quad (3.4)$$

Si llamamos

$$a = \frac{\epsilon p}{\epsilon^2 - 1} = OV = \frac{VV'}{2} \quad \text{y} \quad b = \frac{\epsilon p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}$$

la ecuación (3.4) se escribe así:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ecuación de la hipérbola \mathcal{H} respecto a los ejes xy con origen en O (O punto medio de $\overline{V'V}$).

A veces se dice que \mathcal{D} y F son la directriz y el foco de la rama derecha y que \mathcal{D}' y F' son la directriz y el foco de la rama izquierda. Pero es claro que \mathcal{D} y F son directriz y foco de la rama izquierda y que \mathcal{D}' y F' son directriz y foco de la rama derecha.

En la hipérbola se acostumbra llamar el eje x *eje transverso*; al eje y *eje conjugado* o imaginario.

Los puntos V' y V donde las ramas cortan el eje transversal se llaman *vértices* de la hipérbola y el número real $\overline{V'V} = 2a$, se llama el *eje transversal*; $2b$ es el *eje conjugado* (imaginario). La circunferencia $\mathcal{C}(O, a)$ se denomina la *circunferencia principal* y las circunferencias $\mathcal{C}(F, 2a)$ y $\mathcal{C}(F', 2b)$ se llaman *circunferencias focales* de la curva.

3.4. Comparación entre los semiejes transversal (a) y conjugado (b)

Como $\epsilon > 1$, $a = \frac{\epsilon p}{\epsilon^2 - 1}$ y $b = \frac{\epsilon p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}$, a y b son positivos pero no puede afirmarse nada sobre la relación entre a y b . O sea, puede ocurrir que $a > b$, que $a < b$ o aún que $a = b$, en cuyo caso la hipérbola se llama *equilátera*.

Ahora, $\epsilon > 1$, luego $\epsilon^2 > 1$ y $\epsilon^2 - 1 > 0$. Puede ocurrir:

i) que $\epsilon^2 - 1 > 1$ (véase Fig. 3.13). Entonces $\sqrt{\epsilon^2 - 1} < \epsilon^2 - 1$, de donde:

$$\frac{\epsilon p}{\epsilon^2 - 1} < \frac{\epsilon p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}},$$

esto es, $a < b$.

ii) que $\epsilon^2 - 1 < 1$ (véase Fig. 3.14). Entonces $\epsilon^2 - 1 < \sqrt{\epsilon^2 - 1}$, o sea que:

$$\frac{\epsilon p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} < \frac{\epsilon p}{\epsilon^2 - 1},$$

esto es, $b > a$.

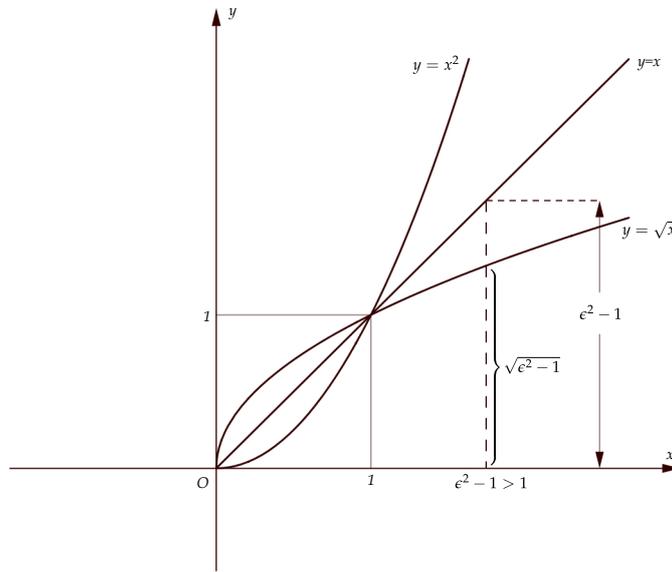


Figura 3.13

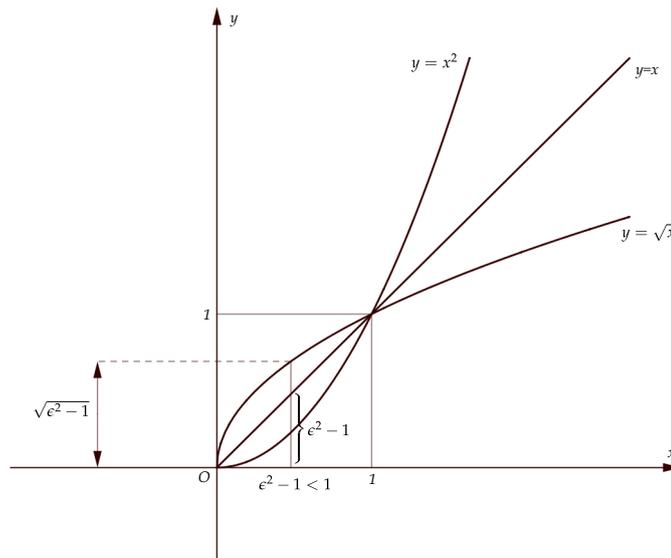


Figura 3.14

3.5. Expresión de los radios focales. Otra forma de definir la $\mathcal{H}_{\mathcal{D}\mathcal{D}-F-\epsilon}$

Consideremos la $\mathcal{H}_{\mathcal{D}\mathcal{D}-F-\epsilon}$, que referida a los ejes xy con origen en O (O es punto medio de $\overline{V'V}$) tiene por ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde,

$$a = \frac{\epsilon p}{\epsilon^2 - 1} \quad \text{y} \quad b = \frac{\epsilon p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}$$



Además,

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

lo que nos demuestra que $H \in \mathcal{H}_{\mathcal{D}\mathcal{D}-F-\epsilon}$.

Finalmente tomemos $0 < x_1 < a$ y consideremos en la perpendicular al eje x por $(x_1, 0)$ el punto $P(x_1, y)$ (véase Fig. 3.22).

$$g(x_1, y) = PF' - PF = \sqrt{(x_1 + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x_1 - c)^2 + y^2}$$

Si avanzamos por la perpendicular al eje x trazada por $(x_1, 0)$, g solo depende de y y de nuevo $g' < 0$.

O sea que g decrece, lo cual significa que si estamos en el punto $(x_1, 0)$ del eje O_x y subimos por la perpendicular al eje x , g decrece y como $0 < g(x_1, 0) < 2a$, no hay puntos P en la región \mathcal{R} para los cuales $g(P) = PF' - PF = 2a$, (véase Fig. 3.22).



3.6. Regiones que determina la $\mathcal{H}_{\mathcal{D}\mathcal{D}-F-\epsilon}$ en el plano

Según lo establecido por los teoremas (3.2), (3.3)

$$P \in \mathcal{H}_{\mathcal{D}\mathcal{D}-F-\epsilon} \iff |PF' - PF| = 2a.$$

Vamos a utilizar esta propiedad para demostrar que la hipérbola \mathcal{H} divide el plano en tres regiones distintas: $\text{int } \mathcal{H}$, \mathcal{H} y $\text{ext } \mathcal{H}$ (véase Fig. 3.23).

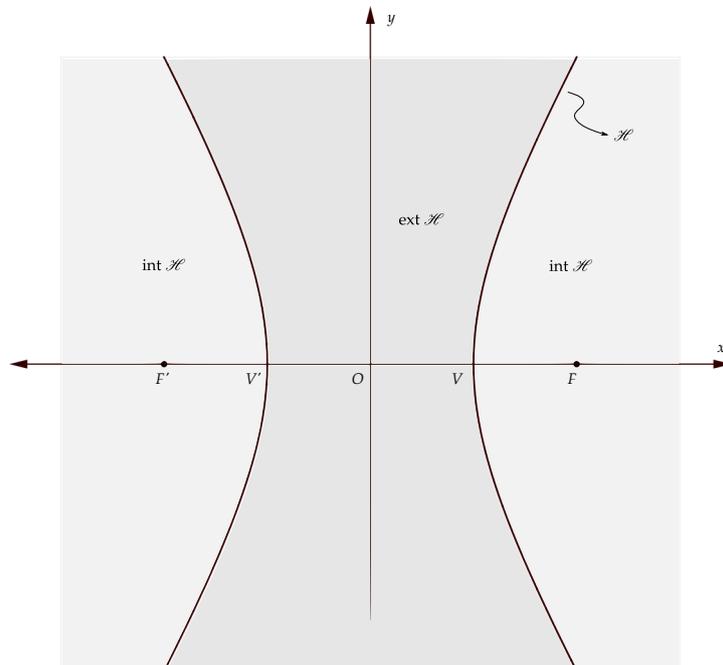


Figura 3.23



Tomemos un punto R en la rama izquierda de la hipérbola de la Fig. 3.27 y veamos que dicho punto es el centro de una circunferencia \mathcal{C}^v , que es tangente a \mathcal{C} y \mathcal{C}' , y que deja a \mathcal{C} afuera.

Basta con probar que:

$$RN = RN'$$

Como R está en la hipérbola,

$$RO' - RU = UU' = 5$$

También:

$$RN = RO + ON = RO + 4$$

$$RN' = RO' - N'O = RO' - 1$$

Restando ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} RN' - RN &= (RO' - 1) - (RO + 4) \\ &= (RO' - RO) - 5 = 5 - 5 = 0 \end{aligned}$$

de donde:

$$RN = RN'$$

Ejercicio 3.1. Se tienen dos circunferencias $\mathcal{C}(O, R)$ y $\mathcal{C}'(O', r)$ con $r < R$ tangentes exteriormente.

- (i) Encuentre el lugar de los puntos P que son centro de una circunferencia tangente exteriormente a \mathcal{C} y \mathcal{C}' .
- (ii) Encuentre el lugar de los puntos P que son centro de una circunferencia tangente interiormente a \mathcal{C} y \mathcal{C}' .

3.7. El latus rectum de la hipérbola

Consideremos la hipérbola \mathcal{H} de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La cuerda focal AB perpendicular trazada por el foco F se llama el *latus rectum* (lado recto) de la hipérbola y la longitud AB se puede calcular así, (véase Fig. 3.28).

$$AB = 2FA \tag{3.10}$$

Como $A \in \mathcal{H}$,

$$\frac{(\epsilon a)^2}{a^2} - \frac{FA^2}{b^2} = 1$$

esto es,

$$\frac{FA^2}{b^2} = \epsilon^2 - 1$$

O sea que:

$$FA = b\sqrt{\epsilon^2 - 1}$$

que llevamos a (3.10):

$$AB = 2b\sqrt{\epsilon^2 - 1}$$

Pero,

$$b = \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}$$



- $9y^2 - 4x^2 = 36$
- $9x^2 - 4y^2 = 36$
- $4x^2 - y^2 = 4$
- $x^2 - 9y^2 = 9$
- $81y^2 - 4x^2 = 36$
- $4x^2 - 81y^2 = 36$
- $49x^2 - 4y^2 = 196$
- $49y^2 - 4x^2 = 196$

3.8. Ecuación de la hipérbola con centro en $C(h, k)$ y eje focal paralelo a los ejes xy

3.8.1. Ecuación de la hipérbola con centro en $C(h, k)$ y eje focal paralelo al eje x

Los elementos de la curva respecto a los ejes XY paralelos a los ejes xy y con origen en C están representados en la Fig. 3.31.

Si a y b son los semiejes de la curva, se ecuación respecto a los ejes XY es:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad (3.11)$$

Ahora, como los ejes XY y xy son paralelos, las ecuaciones de transformación de coordenadas son:

$$\begin{aligned} x &= X + h \\ y &= Y + k \end{aligned}$$

lo que es lo mismo que:

$$\begin{aligned} X &= x - h \\ Y &= y - k \end{aligned}$$

que llevamos a (3.11):

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

la cual es la ecuación de la curva respecto a los ejes xy con origen en O que podemos escribir así:

$$b^2(x^2 - 2hx + h^2) - a^2(y^2 - 2yk + k^2) - a^2b^2 = 0$$

o

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2hx + 2a^2ky + b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

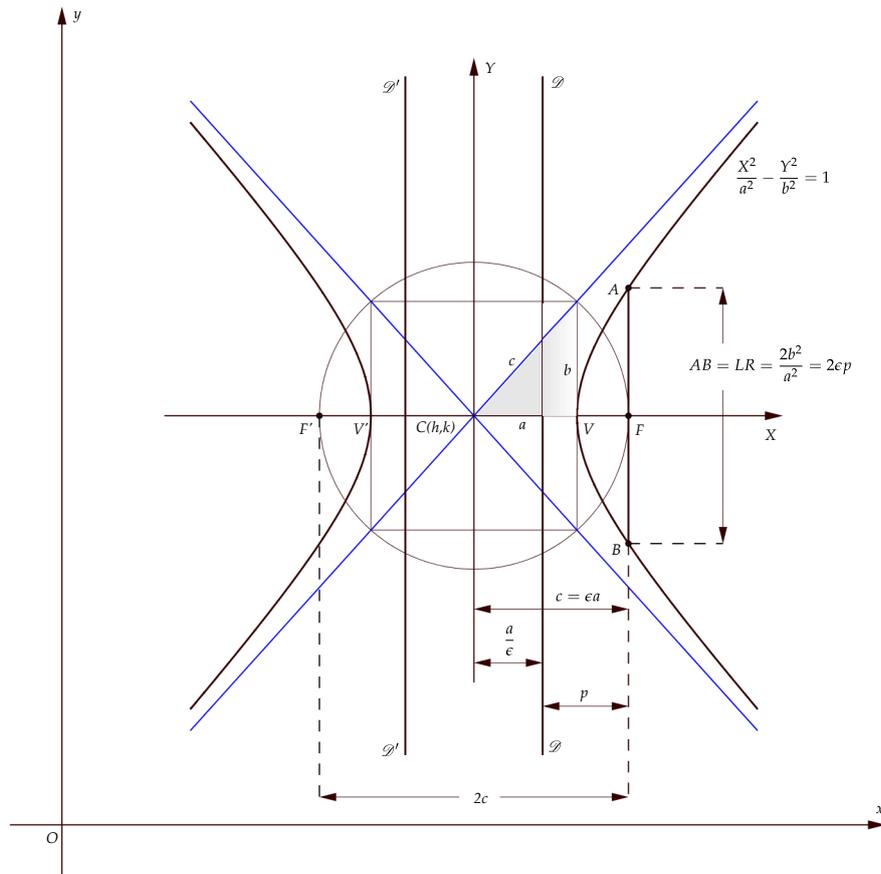


Figura 3.31. Elementos de la hipérbola $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ de centro en $C(h,k)$ y focos ubicados sobre el eje X .

que corresponde a un caso particular de la ecuación general de segundo grado en dos variables¹:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en la cual,

$$A = b^2, \quad C = -a^2, \quad B = 0; \quad A, C \neq 0; \quad AC < 0; \quad A > 0; \quad C < 0$$

De nuevo, si se conocen a y b , la excentricidad y la distancia p se obtienen así:

$$\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}; \quad p = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

El lado recto AB es:

$$AB = 2\epsilon p = 2\frac{b^2}{a}$$

Si lo que se conocen son ϵ y p , otra vez a y b se obtiene así:

$$a = \frac{\epsilon p}{\epsilon^2 - 1}, \quad b = \frac{\epsilon p}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$$

¹Cf. Chica, J; Quintana, H. M. (2018), *La ecuación general de segundo grado en dos y tres variables*. Medellín: Fondo Editorial ITM. 2018. <https://fondoeditorial.itm.edu.co/libros-electronicos/ecuacion-general/mobile/index.html>



3.8.2. Ecuación de la hipérbola de centro en $C(h, k)$ y eje focal paralelo al eje y

La ecuación de la curva respecto a los ejes XY , con origen en $C(h, k)$ es:

$$\frac{Y^2}{b^2} - \frac{X^2}{a^2} = 1 \tag{3.12}$$

y sus elementos: focos, vértices, directrices, etc están representados en la Fig. 3.32.

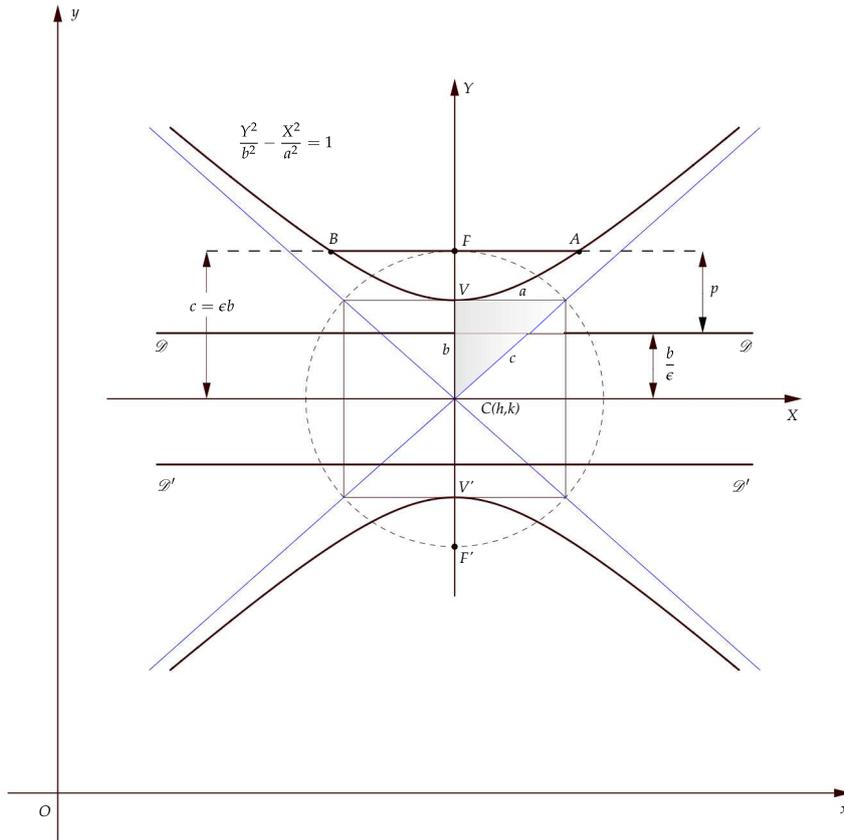


Figura 3.32. Elementos de la hipérbola $\frac{Y^2}{b^2} - \frac{X^2}{a^2} = 1$, de centro en $C(h, k)$ focos ubicados sobre el eje Y .

Las ecuaciones de transformación de coordenadas de ejes XY a xy son:

$$\begin{aligned} x &= X + h \\ y &= Y + k \end{aligned}$$

O sea que:

$$\begin{aligned} X &= x - h \\ y &= y - k \end{aligned}$$

que llevamos a (3.12):

$$\frac{(y - k)^2}{b^2} - \frac{(x - h)^2}{a^2} = 1$$

y que podemos escribir así:

$$a^2(y^2 - 2ky + k^2) - b^2(x^2 - 2hx + h^2) - a^2b^2 = 0$$



3.9. Ejercicios

- (1) Encontrar la ecuación de la curva que describe una partícula que se mueve de modo que en todo momento la diferencia de su distancia a los puntos $(-5, 4)$ y $(5, 0)$ es 6. Dibuje la curva.
- (2) Una partícula se mueve en el plano de modo que en todo instante la diferencia de su distancia a los puntos $(0, -13)$ y $(0, 13)$ es 24. Trace la curva.
- (3) Hallar la ecuación de la curva que describe un punto que se mueve de modo que en todo momento su distancia al punto $(-2, -3)$ es $\frac{5}{4}$ de su distancia a la recta $x = -\frac{19}{5}$.
- (4) Hallar la ecuación de la curva que describe una partícula sabiendo que en todo momento su distancia al punto $(1, 1)$ es $\frac{5}{4}$ de su distancia a la recta $\frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1$.
- (5) Hallar la ecuación de la curva que describe una partícula sabiendo que en todo momento su distancia al punto $(2, 3)$ es $\frac{4}{3}$ de su distancia a la recta $x + y = 1$.
- (6) Una partícula se mueve de modo que en todo momento su distancia al origen es $\frac{3}{2}$ de su distancia a la recta $x - y = 1$. Encuentre la ecuación de la curva que describe y localice todos los elementos.

3.10. Construcciones de la hipérbola trazadas por puntos y métodos continuos

3.10.1. Primera construcción de la hipérbola trazada por puntos

Supongamos que conocemos los focos F', F y los vértices V' y V (véase Fig. 3.39). Se toma N en el eje transversal y a la derecha de F .

Con centro en F y radio NV se traza el arco de circunferencia $\mathcal{C}(F; NV)$. En seguida, con centro en F' y radio NV' se traza el arco de circunferencia $\mathcal{C}(F'; NV')$. Los dos arcos se cortan en M .

Veamos que M está en la rama superior derecha de la $\mathcal{H}_{\mathcal{G}_{-F-c}}$.

En efecto,

$$MF' - MF = NV' - NV = V'V = 2a < 2c$$

Esto demuestra que los arcos se cortan y que, M está en la curva.

- Si N se toma en F , los arcos serán tangentes exteriormente en V , la circunferencia de centro en F tiene radio $c - a$.

La circunferencia de centro en F' tiene radio $c + a$. Como la suma de los radios es $2c + F'F$, las circunferencias son tangentes exteriormente en V , y el punto se determina en el vértice de la curva, ya que en este caso:

$$\begin{aligned} NV &= FV = c - a \\ NV' &= FV' = c + a \end{aligned}$$

Luego,

$$NV' - NV = FV' - FV = 2a$$

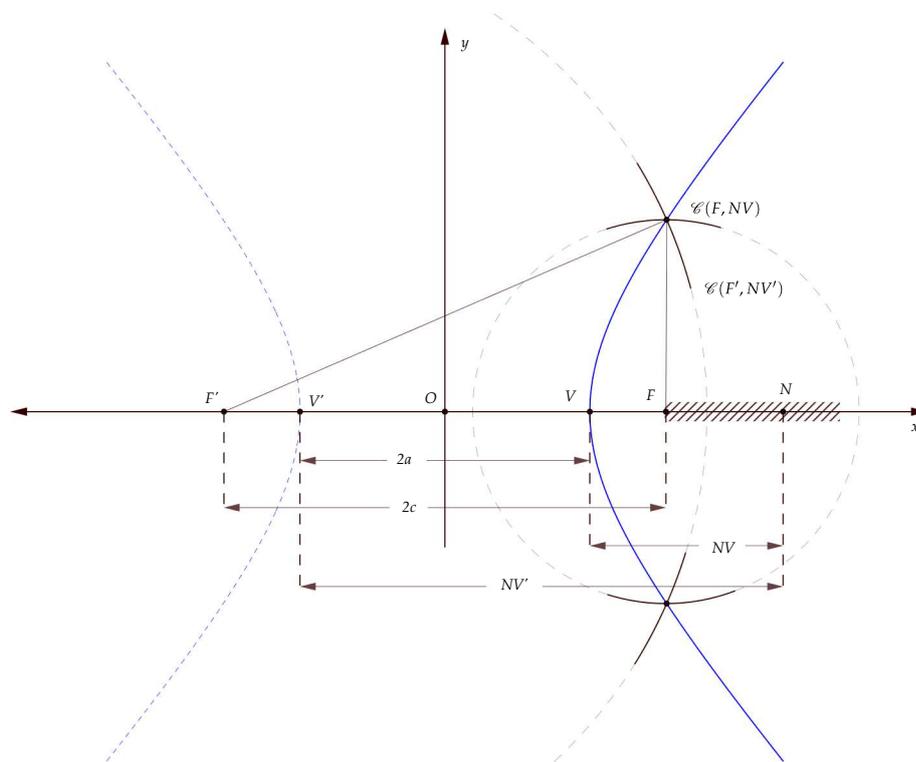


Figura 3.39. Construcción de la hipérbola por puntos.

- Si \tilde{N} se toma entre V y F , los arcos de las circunferencias $\mathcal{C}(F, \tilde{N}V)$ y $\mathcal{C}(F', \tilde{N}V')$ no se cortan, ya que si esto sucede, se tendría el $\triangle PF'F$ (véase Fig. 3.40), y entonces,

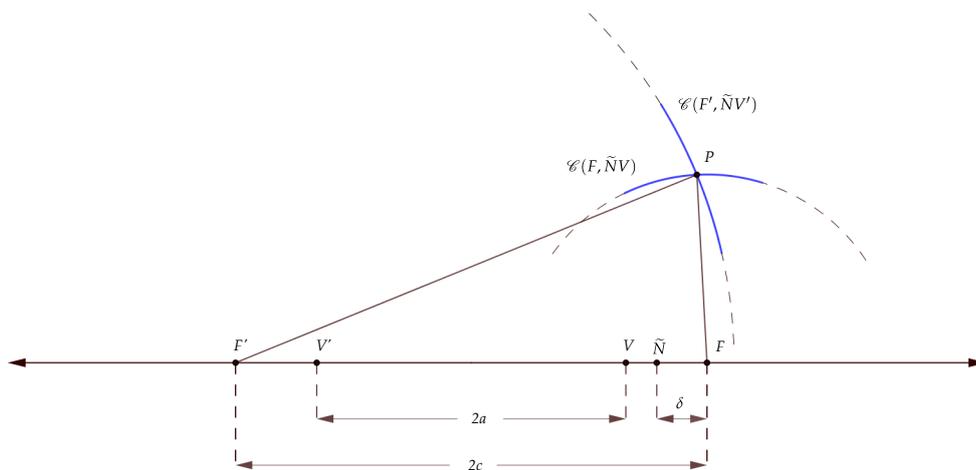


Figura 3.40

$$PF' + PF = \tilde{N}V' + \tilde{N}V > F'F,$$



Lo cual es contradictorio, dado que:

$$\begin{aligned} \tilde{NV} + \tilde{NV}' &= \tilde{NV} + 2a + \tilde{NV} = 2\tilde{NV} + 2a \\ &= 2(c - a - \delta) + 2a = 2c - 2\delta < 2c = FF' \end{aligned}$$

esto es,

$$\tilde{NV} + \tilde{NV}' < FF'$$

3.10.2. Primera construcción de la hipérbola trazada por un método continuo

Podemos dibujar la hipérbola por un trazo continuo utilizando el siguiente mecanismo.

Se tienen localizados en el plano los focos F, F' y los vértices V y V' (véase Fig. 3.41). Por tanto, se conocen a y c , y con ellos el cálculo de b .

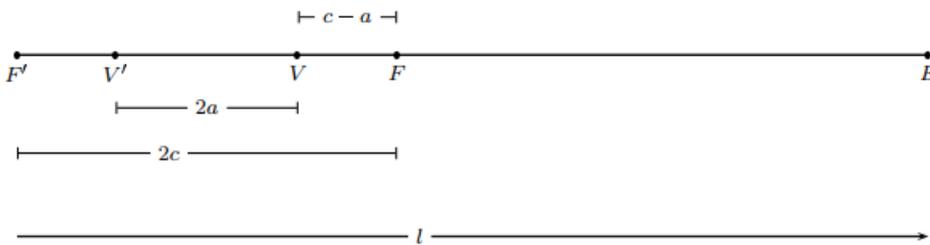


Figura 3.41

Tenidos a y b , podemos calcular e y p y la hipérbola está completamente definida.

Se une F con F' y se toma en la prolongación un punto E , con FE suficientemente grande. Seguidamente se construye una varilla $F'E$ de longitud $l = 2c + FE$, articulada en F' de modo que puede girar alrededor de F' y se toma una cuerda de longitud $L = 2(c - a) + FE$. Un extremo de la cuerda se fija en el extremo E de la varilla y el otro se fija en F a una tachuela que clavamos en el plano y, por tanto, no está fija en la varilla (véase Fig. 3.42).

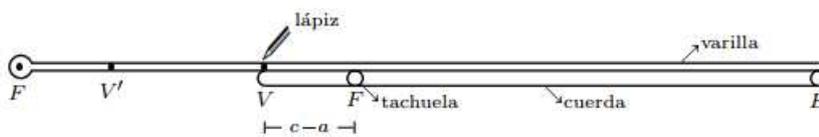


Figura 3.42

Al tensionar la cuerda por medio de un lápiz, esta aparece como en la Fig. 3.42. Cuando la varilla ha girado un ángulo θ , la cuerda aparece como en la Fig. 3.43.

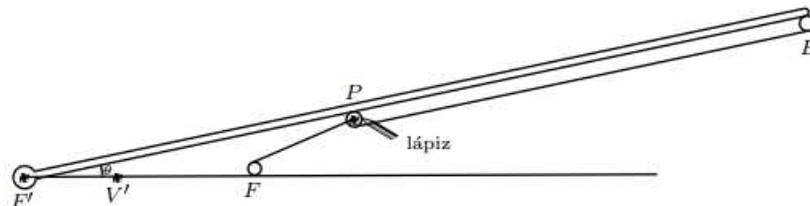


Figura 3.43



La cuerda es la línea FPE , donde se ha utilizado el mismo lápiz para mantenerla tensa. Así que:

$$PF + PE = L$$

como,

$$l = 2c + FE$$

y

$$L = 2(c - a) + FE$$

se tiene que:

$$l - L = 2a$$

En la posición mostrada,

$$L = PF + PE$$

y se tiene que,

$$\begin{aligned} PF' - PF &= (PF' + PE) - (PF + PE) \\ &= l - L = 2a \end{aligned}$$

Lo cual prueba que el punto P está en la hipérbola de focos F, F' y vértices V, V' .

Así que girando la varilla y manteniendo tensa la cuerda con el lápiz, la punta de este, describe de manera continua la hipérbola.

Cuando $\theta \rightarrow 0$, el mecanismo queda como se muestra en la Fig. 3.44.



Figura 3.44

Se obtiene así, un punto M que podemos demostrar que coincide con el punto V .

En efecto, cuando $\theta \rightarrow 0$, PE se convierte en ME y PF se convierte en MF . Luego,

$$L = MF + ME = MF + (MF + FE) = 2MF + FE$$

Pero:

$$L = 2(c - a) + FE = 2VF + FE$$

Entonces:

$$2VF + FE = 2MF + FE,$$

esto es, $VF = MF$, lo cual demuestra que M coincide con V .

3.10.3. Segunda construcción de la hipérbola trazada por un método continuo

El siguiente procedimiento permite, situados F', F, V' y V construir la hipérbola por un método continuo.

Se utilizan dos cuerdas c_1 y c_2 y dos tachuelas que se clavan en los focos. El mecanismo se dispone inicialmente como en la Fig. 3.45. Las cuerdas PFH y $PF'H$ se unen en P a la punta de un lápiz y se hacen pasar a través de dos tachuelas como se muestra en la Fig. 3.45.

Inicialmente P coincide con el vértice V . Para trazar la parte superior de la rama derecha se hace deslizar el punto P de modo que las cuerdas queden tensas y que los extremos H de ambas cuerdas



3.10.4. Segunda construcción de la hipérbola trazada por puntos

Supongamos que hemos localizado los vértices V' y V y que conocemos un punto Q de la curva, para el cual se conocen $VN = h$ y $NQ = k$ (véase Fig. 3.48).

(Esto la determina, ya que, conocidos a, h y $k (h \geq a)$), los demás elementos de la curva se obtienen así: como $Q(h, k)$ está en la curva,

$$\frac{(h + a)^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} = 1$$

De aquí se determina b en términos de a que es conocido.

El cálculo de ϵ y p se determina a partir de las expresiones:

$$a = \frac{\epsilon p}{\epsilon^2 - 1} \quad \text{y} \quad b = \frac{\epsilon p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}$$

respectivamente.

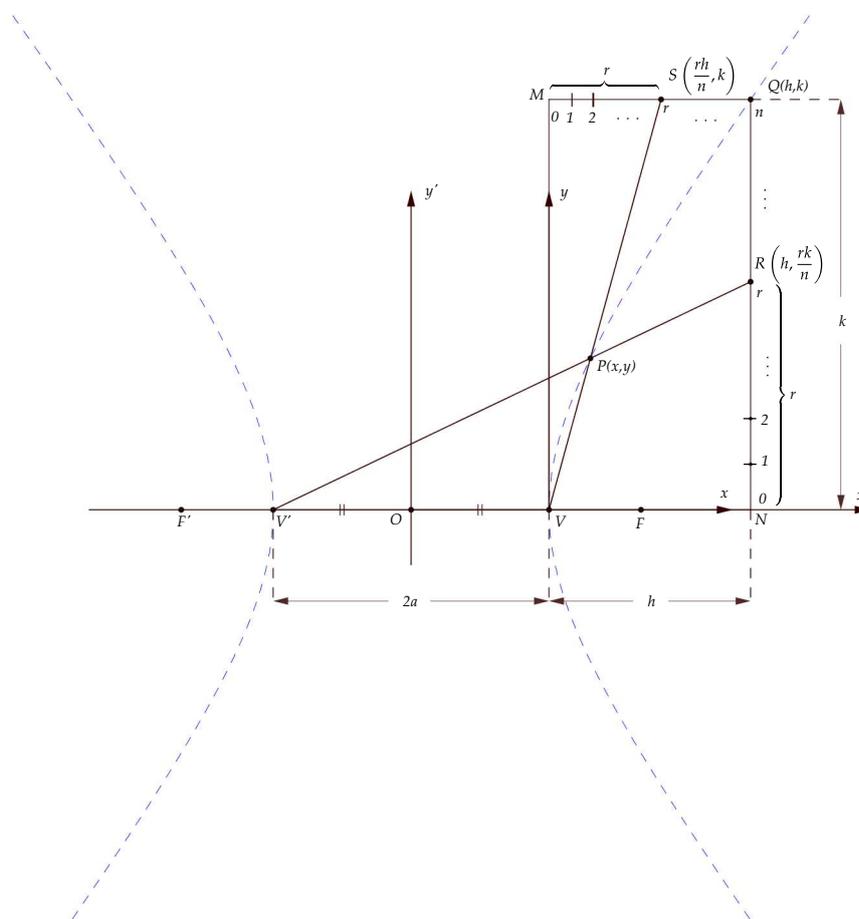


Figura 3.48. Construcción de puntos $P \in \mathcal{H}$ si se conocen los vértices V' y V , un punto $Q(h, k) \in \mathcal{H}$ con $VN = h$ y $NQ = k$

De las ecuaciones anteriores se obtienen ϵ y p , y la curva está determinada.

Se construye el rectángulo $MVNQ$ y se dividen los segmentos MQ y NQ en n partes iguales como se indica en la Fig. 3.48.

Se trazan rayos desde V al punto de división r° de MQ y desde V' al correspondiente punto de



3.10.5. Tercera construcción de la hipérbola trazada por puntos

Conocidos los focos F' y F , y el eje transversal $2a$, trazamos la circunferencia $\mathcal{C}(F'; 2a)$ (véase Fig. 3.49).

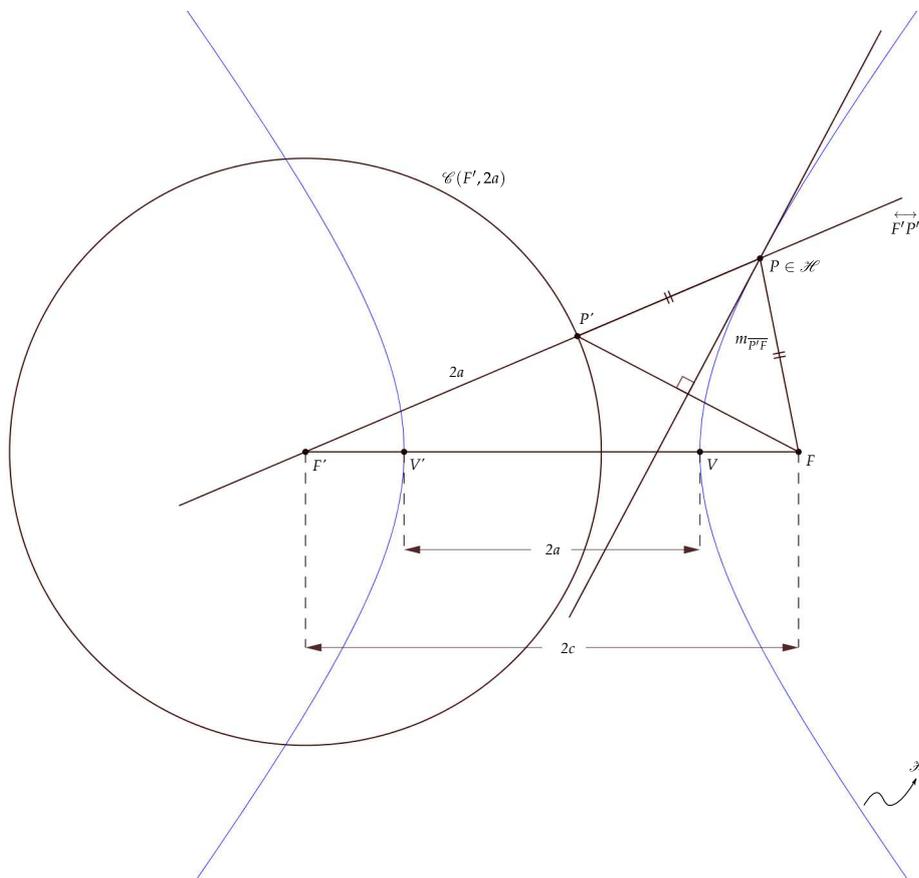


Figura 3.49. Construcción de un punto $P \in \mathcal{H}$, conocidos F', F y el eje transversal $2a$

Se toma un punto $P' \in \mathcal{C}(F'; 2a)$, se unen F' y P' y prolongamos el segmento $\overline{F'P'}$. Luego unimos P' con F y construimos $m_{\overline{P'F}}$ (la mediatriz de $\overline{P'F}$) la cual corta a $\overleftrightarrow{F'P'}$ en el punto P .

Vamos a demostrar que P es un punto de la hipérbola (posteriormente probaremos que la $m_{\overline{P'F}}$ es la tangente a la hipérbola por P).

Unimos P con F . Entonces:

$$\begin{aligned} PF' - PF &= P'F' + P'P - PF \\ &= P'F' = 2a, \end{aligned}$$

lo que nos demuestra que P está en la hipérbola.

3.11. Asíntotas de la hipérbola

Vamos a demostrar que las rectas:

$$y = \frac{b}{c}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{c}x$$



son asíntotas de la hipérbola;

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Establezcamos primero que la tangente $y = \frac{b}{a}x$ está por encima de la curva (véase Figura 3.50).

$$\begin{aligned} y_r - y_k &= AB - PB = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \\ &= \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \frac{b}{a}x \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ahora, como $a \leq x$,

$$\frac{a^2}{x^2} \leq 1$$

de donde:

$$1 - \frac{a^2}{x^2} < 1$$

y, por tanto,

$$\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} < 1,$$

esto es,

$$1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} > 0$$

y regresando a (3.34), $y_r - y_h > 0$, o sea que $y_r > y_k$.

En virtud de (3.34),

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} y_r - y_k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{a}x \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \right) \left(1 - \sqrt{1 + \frac{a^2}{x^2}} \right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} \\ &= \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{1 - \left(\frac{a^2}{x^2} \right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} \\ &= \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \frac{a^2}{x^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} = 0 \end{aligned}$$

Lo cual prueba que la recta $y = \frac{b}{a}x$ es una asíntota de la rama superior derecha. Que las rectas $y = \pm \frac{b}{a}x$ son asíntotas de la curva, se establece teniendo en cuenta la simetría de la misma respecto a los ejes x y y .

La propiedad anterior permite graficar rápidamente la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Basta dibujar el rectángulo $MNKS$ de lados $2a$ y $2b$. Las rectas \overleftrightarrow{SN} y \overleftrightarrow{MR} son las asíntotas de la curva. Las ramas ya

pueden dibujarse teniendo en cuenta que los vértices V' y V de la curva son los puntos medios de \overline{MS} y \overline{NR} respectivamente (véase Fig. 3.50).

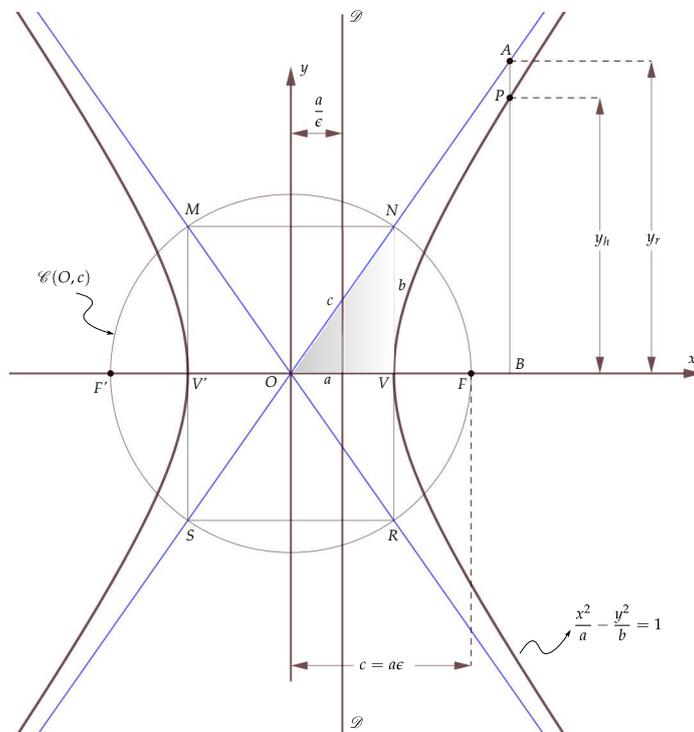


Figura 3.50

Los focos están en la intersección del eje x con la $\mathcal{C}(0; c = a\epsilon)$.

Tenidos a y b , ϵ y p se obtienen al resolver el sistema

$$a = \frac{\epsilon p}{\epsilon^2 - 1}; \quad b = \frac{\epsilon p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}$$

Ejemplo 3.2. Una hipérbola contiene el punto $P(3,4)$ y tiene por asíntotas las rectas:

$$\ell_1 : 3x - 2y + 1 = 0 \quad (3.35)$$

$$\ell_2 : 3x + 2y - 7 = 0 \quad (3.36)$$

Hallar su centro, sus semiejes, ϵ , p , localizar los focos y los vértices y por último trazar la curva.

Solución. Lo primero es dibujar las asíntotas y hallar el centro (véase Fig. 3.51).

El centro se obtiene haciendo simultáneas a (3.35) y (3.36). Sumando ambas ecuaciones:

$$6x - 6 = 0,$$

de donde $x = 1$, que llevada a (3.35) nos da $y = 2$.

De la posición de $P(3,4)$ respecto a las asíntotas se desprende que el eje focal es paralelo al eje x . Así que la ecuación de la curva es de la forma:

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} - \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1$$



de donde:

$$a^2 = \frac{20}{9}$$

y, por tanto,

$$b^2 = \frac{9}{4}a^2 = \frac{9}{4} \cdot \frac{20}{9} = 5$$

Así que,

$$a = \frac{\sqrt{20}}{3} \quad y \quad b = \sqrt{5}$$

Tenidos a y b , como:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \epsilon a,$$

$$\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

Dado que,

$$b = \frac{\epsilon p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}$$

$$p = \frac{b\sqrt{\epsilon^2 - 1}}{\epsilon} = \frac{b\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}}}{\epsilon}$$

O sea que:

$$p = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Se deja al lector completar el trabajo algebraico restante.

3.12. Ejercicios

- (1) Las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola son: $2x - y = 0$ y $2x + y - 8 = 0$. La curva pasa por $P(7, 12)$. Halle los semiejes, localice los focos, los vértices, etc y finalmente dibuje la curva.
- (2) El mismo problema anterior, solo que ahora las asíntotas son $4x - y + 4 = 0$ y $4x + y - 12 = 0$. La curva pasa por el punto $P(1, 11)$.
- (3) El mismo enunciado. Ahora las asíntotas son $2x - 3y - 2 = 0$ y $2x + 3y + 10 = 0$. El origen $O(0, 0)$ se sabe que es un punto de la curva.
- (4) En cada uno de los problemas que siguen se dan algunos elementos de una hipérbola. Se pide encontrar los restantes, dibujar la curva y hallar la ecuación.
 - (i) La hipérbola tiene centro $C(2, 3)$, $a = 2$, $b = 3$ y el eje transversal (o eje de los focos) es paralelo al eje x .
 - (ii) Centro en $C(-2, 4)$, $a = 2$, $b = 7$ y eje focal paralelo al eje y .
 - (iii) Vértices en $(-3, -5)$ y $(-3, 7)$; $b = 5$.

Apéndices

Introducción a las *cónicas* de Apollonius

La única evidencia fiable sobre la vida de Apollonius es proporcionada por sus propios prefacios a varios libros de las *Cónicas*, especialmente los prefacios a los libros I y II¹.

Él nació en Perge, en Pamphylia (una importante ciudad griega sobre la costa sureste del Asia Menor) al rededor del 240 B. C., y publicó el trabajo por el que se hizo famoso: las *Cónicas*, probablemente no mucho después del 200 B. C. Tal fecha es garantizada por la mención de Apollonius en el prefacio al libro II donde afirma «*Philonides el geómetra, a quien yo le presenté a usted [Eudemus] en Ephesus*». Este Philonides fue posteriormente un prominente filósofo Epicúreo y hombre de estado: es conocido por su biografía fragmentaria que ha sobrevivido en papiro² y dos inscripciones³; él fue conocido personalmente, en su madurez, con el monarca Seleucida Antiochus IV Epiphanos (quién reinó entre el 175-163 B. C.) y Demetrius I Soter (162-150 B. C.). Desde entonces Eudemus (el hombre a quien Apollonius se dirige en los prefacios de los libros I y II de las *Cónicas*) fue el primer maestro de Philonides, y las *Cónicas* necesitaron haber sido publicadas tempranamente en el segundo siglo B. C. Desde entonces, posteriormente, Apollonius se dirige a Eudemus en el prefacio del libro II cuando él le envía éste a través de la mano de su hijo (también llamado Apollonius), las *Cónicas* que fueron un trabajo de la edad madura de Apollonius, por tanto su fecha de nacimiento puede ser aproximadamente inferida.

Nosotros sabemos del prefacio al libro I que Apollonius estaba viviendo en Alejandría cuando él compuso la versión original de las *Cónicas*.

A.1. Contenido de la obra

Los contenidos de las *Cónicas* son un conjunto bosquejado por Apollonius mismo en la carta prefatoria del libro I. Apollonius dice aquí que el trabajo en su totalidad está compuesto por 8 libros, los primeros 4, él dice, tendrán que ser considerados un «un curso en los *Elementos*» (ἀγωγή στοιχειώδη); mientras que los cuatro restantes son «a la manera de adiciones» (περιουσιαστικώτερα), «tópicos espe-

¹ *Apollonii Pergaei Quae Graece Exstant*. I. L. Heiberg. Vol. I. pp. 2-4, 192. B. G. Teubneri. 1891.

² Publicado por Crönert, «Der Epikureer Philonides». La edición por Gallo, *Fragmmenti Biografici de Papiri II*. pp. 23-166, mejora a Crönert en varios lugares, ninguno de los cuales son relevantes aquí. Cf. Toomer, «The mathematician Zenodorus».

³ La relevancia de este para la biografía en el papiro fue anunciada por Köhler, «Ein Nachtrag zum Lebenslauf des Epikureers Philonides». Para una biografía posterior, cf. Fraser, *Ptolemaic Alexandria* vol. II. pp. 601-2, n. 320.



ciales», tendría uno que decir. Apollonius hace un repaso de los libros en su «curso en los *Elementos*», de la siguiente manera:

- Libro I: contiene la generación de las tres secciones cónicas y las secciones opuestas⁴ y una investigación «más completa y general» de las propiedades características, o συμπτώματα, de todas aquellas secciones⁵.
- Libro II: se ocupa de las propiedades de los diámetros, los ejes y las asíntotas, como también «otras cosas necesarias y útiles para determinar los límites de la posibilidad» (διορισμους)⁶.
- Libro III incluye teoremas «útiles para la síntesis de los lugares sólidos y para determinar los límites de la posibilidad».
- Libro finalmente, este se ocupa de estudiar de cuántas otras muchas maneras se pueden hallar otras secciones cónicas y las circunferencias de un círculo.

Excepto por la descripción del libro IV, que da una ilustración parcial del contenido del libro, aquellas descripciones son lo mejor bosquejadas y dan un conteo completo de los libros I-III. Aunque Apollonius dice que en el libro II se observan las propiedades de los diámetros y los ejes, v.gr., es en el libro I donde muchos de los teoremas sobre los diámetros son probados—perteneciente entre otros, que toda sección cónica tendrá un número infinito de diámetros, que todos los diámetros de la parábola son paralelos, que todos los diámetros de la elipse o hipérbola son concurrentes, que para todo diámetro de una elipse o hipérbola existen un diámetro conjugado y que el diámetro conjugado de una elipse es la media proporcional entre el diámetro original y su parámetro, o *latus rectum* (un hecho empleado una y otra vez por Halley).

Esto no dice que las descripciones de los libros I-III son completamente informativas sobre sus contenidos. El libro I contiene mucho más de lo que Apollonius dice; sin embargo, este verdaderamente contiene la generación de las secciones y sus συμπτώματα, que Apollonius elige para enfatizar en su carta prefatoria. Aquellas y el concepto de sección cónica, una concepción que es demostrable geoméricamente, y despista la sencillez con que los resultados claves en las *Cónicas* pueden ser reescritos algebraicamente, a lo sumo por lectores modernos quienes conocen el tratamiento algebraico. Para dar un ejemplo de como Apollonius por sí mismo trata el tema, consideremos el enunciado y diagrama de *Cónicas*, I. 13, la proposición en la que la elipse es definida:

Si un cono es cortado por un plano a través de su eje y es también cortado por otro plano que por un lado encuentra ambos lados del eje triangular y que por otro lado, cuando se prolonga, es o paralelo a la base o lo contrario, y si el plano que contiene la base del cono y el plano de corte se encuentran en una línea recta perpendicular o a la base del triángulo axial o perpendicular a este, entonces alguna línea [recta] es trazada—paralela a la sección común de los planos [base y corte]—de la sección del cono para el diámetro de la sección que será igual en un cuadrado a alguna área aplicada a una línea recta [el parámetro] (para el que el diámetro de la sección tendrá el mismo radio como el cuadrado sobre la línea recta trazada—paralela a la sección del diámetro—del vértice del cono a la base del triángulo tendrá el rectángulo que es contenido por la línea recta que corta [sobre la base] por esta línea recta en la dirección de los lados del triángulo [axial]), un área que tendrá como amplitud la línea recta de la sección para el diámetro y cuya área es deficiente (elleipon) por una figura semejante y situada semejantemente al rectángulo contenido por el diámetro y el parámetro. Y tal sección será llamada una elipse (ἑλλειψις)⁷.

⁴ Aquellas son las que nosotros llamamos las dos ramas de la hipérbola. Una hipérbola, para Apollonius, es únicamente una de aquellas ramas. Para una discusión más detallada, cf. Fried, M. N. *A note on the Opposite Sections and conjugate sections in Apollonius of Perga's Conica*. The St. John's Review, 47 (1), 91-114, 2004.

⁵ συμπτώματα: Propiedad.

Hecho geométrico que es la consecuencia de condiciones realizadas por una figura. Cf. Mugler, Charles. *Dictionnaire historique terminologie géométriques des grecs*. Paris. Librairie C. Klincksieck. 1958. p. 393.

⁶ Los «límites de las posibilidades» son, hablando en términos generales, las condiciones bajo las cuales un problema tendrá una solución a todas o a lo sumo una solución. Cf. Michael N. Fried. *Edmund Halley's reconstruction of the lost book of Apollonius's Conics*. Springer. 2011. p. 8. n. 24.

⁷ cf. Apollonius of Perga. *Treatise on Conic Sections*. Editen in modern notation. T L. Heath. Cambridge University Press. 1896.

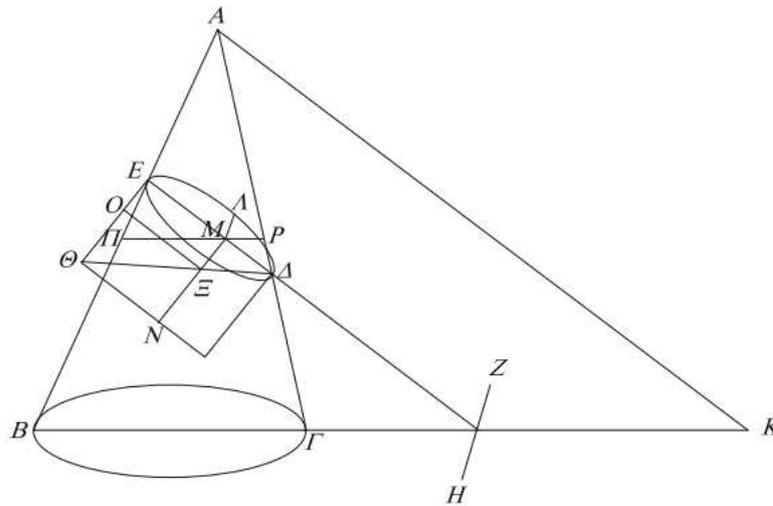


Figura A.1

En la fig.A.1, entonces, un cono teniendo por base $B\Gamma$ y vértice A es primero cortado por un plano $AB\Gamma$ a través del eje (i.e., la línea de A al centro de la base circular $B\Gamma$), produciendo el «triángulo axial» $AB\Gamma$; este es cortado, a continuación, por un segundo plano, $\Delta E\Lambda$, que encuentra los dos lados del triángulo axial y que, prolongado, intersecta el plano $AB\Gamma$ que encuentra el plano de la base del cono. La sección del cono producida por el plano $\Delta E\Lambda$ es la *elipse*. Para definir el $\sigma\upsilon\mu\pi\tau\omega\mu\alpha$ de la elipse nosotros primero necesitamos determinar el parámetro $E\Theta$. Este es la línea que tendrá el mismo radio de ΔE como el cuadrado sobre AK tendrá al rectángulo contenido por BK y $K\Gamma$ ⁸. Y con tal, el $\sigma\upsilon\mu\pi\tau\omega\mu\alpha$ es este: sea ΛM trazado de la elipse por la línea ΔE , que es el diámetro de la elipse⁹, así que este paralelo a HZ . Entonces $sq\Lambda M = \text{rect}E\Theta$, $EM - \text{rect}O\Theta$, $O\Xi$, donde el rectángulo posterior es semejante y semejantemente situado al que está contenido por el parámetro $E\Theta$ y el diámetro ΔE .

La primera cosa que uno observa sobre esta proposición es que es muy larga—imposiblemente larga para la mayoría de los lectores modernos—. Una razón obvia para la longitud es que esta es enteramente establecida en palabras: no hay símbolos que formalizen y condensen los enunciados y afirmaciones. Después del enunciado, las letras son introducidas; sin embargo, ellas no son introducidas como símbolos, sino únicamente como punteros de partes del diagrama. Las matemáticas griegas están ligadas a los diagramas. Una parte inseparable de la prop. I. 13, entonces, es su diagrama¹⁰. Y así el enunciado es muy largo porque, más que un enunciado, este es una descripción que apela a nuestra habilidad para visualizar operaciones geométricas, relaciones, y objetos con la ayuda de diagramas. Alguien quien lea el texto original de Apollonius detalladamente necesita dejarse ineluctablemente invadir por este sentido en el modo de la presentación, sin embargo uno interpreta o no y si uno lo ve también como un modo de pensamiento de Apollonius¹¹. Este sentido de presentación geométrica necesita ser asumido con respecto a Halley, pero inclusive siendo el un hombre

⁸ Nosotros estamos empleando la taquigrafía «sq. AK » para «el cuadrado sobre AK » y «rect. $AK, K\Gamma$ » para el «rectángulo contenido por los lados $AK, K\Gamma$ ». cf. Fried, *Ibid.* p. 9.

⁹ Esto es, ΔE bisecta todas las cuerdas de la elipse trazadas paralelas a cierta línea dada, en este caso, la línea HZ . A principios del libro I, en la prop. I. 7, Apollonius muestra que alguna tal línea como ΔE , en el plano $\Delta E\Lambda$ corta los lados AB y $A\Gamma$ del triángulo axial, bien sea un diámetro en este sentido. También nótese que mientras HZ es perpendicular a $B\Gamma$ prolongado, éste no es necesariamente perpendicular al plano del triángulo axial $AB\Gamma$, y entonces, líneas tales como ΛM no son necesariamente perpendiculares al diámetro ΔE . Si HZ es perpendicular al plano $AB\Gamma$, entonces las líneas ΛM serán perpendiculares al diámetro y el diámetro bien será un eje.

¹⁰ cf. Nezt, R. *The shaping of deduction in greek mathematics*. Cambridge University Press. 1999.

¹¹ cf. H. G. Zeuthen's (1886), *Die lehre von den kegelschnitten im altertum*, donde la presentación geométrica de Apollonius es pensada para ocultar un modo de pensamiento algebraico. Por lo tanto, el punto de vista de Zeuthen dominó la historiografía de la matemática griega a lo sumo durante 1970; este punto de vista fue completamente adoptado por Thomas L. Heath y B. L. van der Waerden.



joven él conocía los cuatro primeros libros de las *Cónicas* íntimamente¹², y posteriormente, cuando él editó y tradujo el trabajo en su totalidad, tal conocimiento fue extendido a los libros restantes, libros V-VII. Halley no únicamente apreció la forma geométrica en que Apollonius presentó su trabajo, sino que también reconoció que este fue representativo de un aprovechamiento geométrico genuino del tema.

Los libros V-VIII, como se mencionó anteriormente están catalogados como «a la manera de adiciones», de acuerdo con Apollonius. No es completamente claro que entendía Apollonius por esto, pero, minimalmente, él da a entender que aquellos libros no fueron concebidos como fundamentos generales sobre los que una amplia variedad de investigaciones podrían ser desarrolladas. Es en este sentido que ellos pueden decirse que difieren de los libros de los *Elementos* y razonablemente se refiere a estos libros como «tópicos especiales».

Apollonius describe tales contenidos en la carta introductoria al libro I como sigue: el libro V concierne con las [líneas] mínimas y máximas, por las que el entiende las líneas mínimas y máximas de corte en el eje de una sección y la sección en sí misma; el libro VI trata cuestiones de semejanza e igualdad en las secciones cónicas—es aquí, v. gr., que Apollonius demuestra que todas las parábolas son semejantes; el libro VII contiene teoremas sobre la determinación de límites de posibilidad (περι διοριστικων θεωρηματων); en el libro VIII, finalmente, Apollonius dice, que es un libro sobre problemas determinados a las cónicas (προβληματων κωνικων διωρισμενων).

Más información sobre aquellos libros posteriores de las *Cónicas* es hallada en las cartas introductorias a cada libro individualmente. Particularmente importante para dicho fin es lo que se dice en la carta introductoria al libro VII. Para tal, es mejor lo que se dice en la carta introductoria al libro I, donde Apollonius afirma lo siguiente:

*En este libro [libro VII] se tienen muchas maravillosas y bellas cosas sobre el tópico de los diámetros y las figuras construidas sobre ellas, tomadas en ellas. Todo esto es de gran uso en muchos tipos de problemas, y son muy necesarias en el tipo de problemas que ocurren en las secciones cónicas que nosotros mencionamos, pertenecientes a aquellas que serán bien discutidas y proporcionadas en el libro VIII de este tratado (que es el último libro de esta).*¹³

Así, que, contrario a la descripción más general en el I, Apollonius explícitamente conecta el material del libro VII con los problemas del libro VIII. Las descripciones de Apollonius no siempre son completamente adecuadas; sin embargo, la conexión en los libros VII y VIII es reforzada por el hecho de que, en el libro VII de Pappus (siglo IV C. E.) *Συναγωγη* o *Colección*, como es usualmente conocido en inglés, los lemas de los libros VII y VIII de las *Cónicas* son tomados en conjunto, como si los dos libros fuesen concebidos como un par. Aquellas sugerencias sobre el libro VIII en las *Cónicas* en sí mismo y en la *Colección* de Pappus son de importancia, de hecho porque el libro VIII en sí mismo está perdido. No se sabe con certeza cuándo se perdió, pero a mediados del siglo IX, cuando grandes esfuerzos fueron realizados en el mundo islámico por recuperar la matemática griega y los textos científicos, el libro VIII ya estaba perdido, inclusive el manuscrito más completo de las hallado en este período, el texto *Banū Mūsā*.

¹²Edmund Halley quien probablemente tuvo que haber leído las *Cónicas* de Apollonius, libros I-IV, de la famosa edición de Federigo Commandino de 1566. La edición de Commandino incluyó no únicamente los cuatro primeros libros de las *Cónicas* sino también los comentarios de Eutocius y Serenus sobre la sección de un Cilindro y sobre la sección de un Cono. El último fue incluido con la reconstrucción de Halley para el libro VIII de las *Cónicas*.

¹³cf. Toomer, G. J. *Apollonius Conics Books V to VII*, Vol. I, p. 382.



Bibliografía

- [1] Ostermann Alexander and Wanner Gerhard, *Geometry by its history*, 1st ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
- [2] Holme Audun, *Geometry our cultural heritage*, 2nd ed., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [3] Nievenglowski B., *Cours de géométrie*, Gauthiers-Villars, 1894.
- [4] Mataix. C., *Tratado de geometría analítica*, Dossat, 1957.
- [5] Mugler Charles, *Dictionaire historique terminologie géométriques des grecs*, Librairie C. Klincksieck, 1958.
- [6] Smith. E. and Salkover. M., *Analytic geometry*, John Wiley, 1954.
- [7] Borceaux Francis, *Geometry trilogy*, 1st ed., Vol. 2, Springer, 2013.
- [8] Toomer G. J., *Apollonius conics books v to vii*, Springer-Verlag, 1990.
- [9] Chica Jaime, *Álgebra de tensores, análisis espectral y aplicaciones*, Universidad de Antioquia, 2013.
- [10] Chica Jaime and Quintana Hernando Manuel, *Tratado de las secciones cónicas: La elipse*, 1st ed., Vol. 2, Fondo Editorial ITM, 2013.
- [11] ———, *Tratado de las secciones cónicas: La parábola*, Vol. 1, Fondo Editorial ITM, 2014.
- [12] De Greiff. L., *Geometría analítica plana y del espacio*, Bedout, 1968.
- [13] Heath T L., *Treatise on conic sections*, Cambridge University Press, 1896.
- [14] Heiberg I. L., *Apollonii pergaei quae graece exstant*, B. G. Teubneri, 1891.
- [15] Fried Michael N., *Edmund halley reconstruction of the lost book of apollonius conics*, Springer-Verlag, 2011.
- [16] Nezt R., *The shaping of deduction in greek mathematics*, Cambridge University Press, 1999.
- [17] Shafarevich Igor R. and Remizov Alexey O., *Linear algebra and geometry*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013. Translated by David Kramer and Lena Nekludova.
- [18] Géza Schay, *A concise introduction to linear algebra*, Springer Science+ Business Media, LLC, 2012.
- [19] H. Kindle. J. (S.F), *Teoría y problemas de geometría analítica plana y del espacio*, Serie Schaum.
- [20] H. Lehmann. Ch. (S.F), *Geometría analítica*, Limvse.
- [21] Van Nostrand Bowser. (S.F), *An elementary treatise on analytic geometry*.
- [22] Smith-Sullivan, *Elementos de geometría analítica*, Nigar S.R.L., 1955.
- [23] Par une reunión de professeurs (S.F), *Cours de geometrie*.
- [24] Akopyan A. V. and Zaslavsky A A., *Geometry of conic*, Mathematical World, vol. 26, American Mathematical Society, 2007. Translated by Alex Martsinkovsky.
- [25] Efimov. N. V, *Formas cuadráticas y matrices*, Moscú: Mir, 1970.
- [26] Frere. R. y Gastam. B, *Cours de geometrie analytique*, Imprimerie de la Salle, 1954.
- [27] Wan Zhe-Xian, *Geometry of matrices*, World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 1996.

Índice alfabético

<p>A</p> <p>Apollonius 125, 161, 164, 197</p> <p>Asíntotas de la hipérbola 58</p> <p>C</p> <p>Centro de curvatura C 121</p> <p>Construcción de la hipérbola trazada por puntos 50</p> <p>Construcción de la hipérbola método continuo 52, 53</p> <p>Cuadratura de la hipérbola 119</p> <p>E</p> <p>Ecuación general de segundo grado en dos variables 37</p> <p>Ecuaciones analíticas de las tangentes de la hipérbola y de pendiente m 103</p> <p>Ecuaciones paramétricas de \mathcal{H} 109</p> <p>Evoluta de la hipérbola 122</p> <p>H</p> <p>hipérbola</p> <p> Ángulo de inclinación de la tangente .. 72</p> <p> Cuerdas suplementarias 152</p> <p> Diámetros conjugados 151</p> <p> Fórmulas de Chasles 155</p> <p> Latus rectum 32</p> <p> x eje transverso 14</p> <p> y eje conjugado 14</p> <p> Ecuación de la hipérbola referida a sus asíntotas 80</p> <p> Directriz 1</p> <p> Ecuaciones analíticas 12</p> <p> Excentricidad $\epsilon > 1$ 1</p>	<p>Foco 1</p> <p>Semiejes conjugados 154</p> <p>Hipérbola equilátera 90</p> <p> Propiedades 91</p> <p>Hipérbolas conjugadas 65</p> <p>P</p> <p>Parametrización de la hipérbola $\mathcal{H} : x^2 - y^2 = 1$ 114</p> <p>Propiedad focal de la hipérbola 70</p> <p>R</p> <p>Radio de curvatura de la hipérbola en un punto $P(x, y)$ 121</p> <p>Radios focales 16</p> <p>Regiones que determina la hipérbola \mathcal{H} en el plano 25</p> <p>T</p> <p>Tangente a la hipérbola por un punto 75</p> <p>Tangente, normal, subnormal y subtangente en la hipérbola 105</p> <p>Tangentes a una hipérbola y paralelas a una recta dada del plano 129</p> <p>Teorema</p> <p> 1° teorema de Apollonius 156</p> <p> 1° teorema de Poncelet 146</p> <p> 2° teorema de Apollonius 157</p> <p> 2° teorema de Poncelet 146</p> <p> de la Hire 140</p> <p>V</p> <p>Valores de la función $f(x, y) = a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2$ 98</p>
--	---



Este libro se terminó de imprimir
en Ediciones Diario Actual
en el mes de diciembre de 2019

La carátula se imprimió en propalcote C1S 300 gramos,
Las páginas interiores en Bond alta blancura 70 gramos.

Las fuentes tipográficas empleadas son: *Palatino Font*
10 puntos en texto corrido.