TEXTOS ACADÉMICOS

CRISTINA GONZÁLEZ MAZUELO
JUAN PANIAGUA CASTRILLÓN
GUSTAVO PATIÑO JARAMILLO

Secciones cónicas
Una mirada desde la derivación implícita

ITM

Secciones cónicas

Una mirada desde la derivación implícita

María Cristina González Mazuelo
Juan Guillermo Paniagua Castrillón
Gustavo Adolfo Patiño Jaramillo

TEXTOS ACADÉMICOS

INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO
Institución Universitaria

SECCIONES CÓNICAS
Una mirada desde la derivación implícita

1a. Edición: diciembre de 2008

ISBN: 978-958-8351-49-0

Dirección editorial
Oficina de Comunicaciones y Publicaciones

Diagramación y montaje
L. Vieco e Hijas Ltda.

Impreso y hecho en Medellín, Colombia

Instituto Tecnológico Metropolitano
Calle 73 No. 76A 354
Tel.: (574) 440 51 00
Fax: 440 51 01
www.itm.edu.co
Medellín - Colombia

Contenido

INTRODUCCIÓN

En los textos de geometría analítica, uno de los métodos clásicos propuestos para obtener los elementos de secciones cónicas a partir de su ecuación general, consiste en transformarla, por medio de operaciones algebraicas, en su expresión canónica, específicamente completando los trinomios cuadrados perfectos. Incluso se llega a afirmar que "La geometría analítica bien podría ser llamada geometría algebraica ya que es el estudio de conceptos geométricos, tales como curvas y superficies, por medio del álgebra"[1].

Para una persona con un buen manejo del álgebra, este método clásico puede resultar sencillo. Sin embargo, cuando se trata de su aprendizaje, es evidente la dificultad que manifiestan los estudiantes para comprenderlo y aplicarlo, quizás debido a la deficiencia generalizada de éstos en los procesos reversibles, es decir, en la habilidad para devolverse después de aplicada una operación matemática[2]. No obstante, se puede abordar el tema de las secciones cónicas desde la perspectiva del cálculo diferencial y brindar, de esta forma, un método alternativo a los tradicionalmente utilizados.

El desarrollo de la propuesta aquí presentada se hace a partir del concepto geométrico de la derivada de una curva, como una expresión general para la pendiente de todas las rectas tangentes a ella. Para el caso de las cónicas, dicho concepto permite determinar las coordenadas de los puntos de intersección de la cónica con sus ejes focales (vértices), pues en estos puntos en particular, la recta tangente es horizontal o vertical, como se mostrará posteriormente para cada una de ellas.

---

1 Fleming W, Varberg, D. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Tercera Edición. (1991). México: Prentice Hall. pág. 642.

2 Esta misma situación ha sido diagnosticada en el proyecto de investigación "Estrategias didácticas para la enseñanza y el aprendizaje significativo del cálculo diferencial", desarrollada en el grupo Da Vinci del ITM.

En ecuaciones generales como

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, las variables x y y están relacionadas de forma implícita, entonces se recurrirá a la derivación implícita para obtener $\frac{dy}{dx}$.

En este sentido, el método presentado permite encontrar expresiones simplificadas para obtener las coordenadas de los vértices a partir de los coeficientes de la ecuación general por medio de la derivación implícita, para luego determinar las coordenadas y ecuaciones de los otros elementos de las secciones, utilizando sustituciones algebraicas y las propiedades geométricas particulares de cada una de ellas.

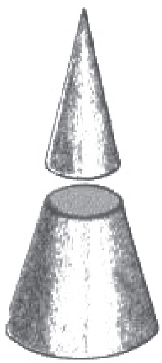
El primer capítulo comprende una breve reseña histórica y las nociones preliminares para el estudio de las secciones cónicas. Se incluyen algunos ejemplos de la utilización del método clásico o algebraico para la obtención de los elementos de las cónicas por completación del trinomio cuadrado perfecto. En el capítulo dos se presenta el desarrollo del método por derivación implícita para cada una de las secciones cónicas: parábola, elipse e hipérbola. La circunferencia se considerará como una particularización de la elipse. Cabe mencionar que este método se desarrollará sólo para cónicas **con traslación de ejes.** Al final del capítulo se encuentra el cuadro resumen con las expresiones simplificadas obtenidas para los elementos de las secciones cónicas, las cuales se encuentran en función de los coeficientes de las variables de la ecuación general en el dominio de los números reales. El capítulo tres contiene ejemplos de aplicación del método propuesto para las cónicas, con traslación o no de ejes, eje focal paralelo al eje x y paralelo al eje y.

Con este trabajo se pretende poner a disposición del lector otro método para la determinación de los elementos relacionados con las cónicas, el cual se puede sistematizar fácilmente con el uso de las herramientas informáticas disponibles en el mercado.

Capítulo I. Reseña histórica y nociones preliminares

Historia de las secciones cónicas[1]

Una de las pocas obras conservadas de Apolonio, aunque una de sus obras fundamentales, es las *Cónicas*. De todas formas sólo se conserva

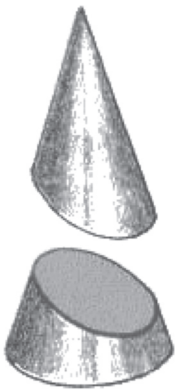


en el original griego la mitad, los cuatro primeros de sus ocho libros; pero por suerte un matemático árabe, **Thabit ibn Qurra**, tradujo los tres libros siguientes al árabe antes de que desapareciera su versión griega, y esta traducción se ha conservado. En 1710, **Edmund Halley** publicó una traducción al latín de los siete libros, y desde entonces se han publicado muchas versiones en lenguas modernas.

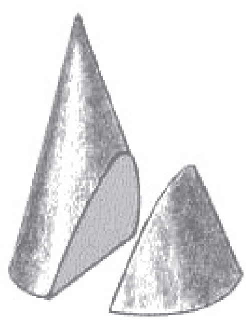
Las secciones cónicas se conocían ya desde hacía más o menos un siglo y medio cuando **Apolonio** compuso su famoso tratado sobre estas curvas, y durante este intervalo por lo menos dos veces se escribieron tratados generales sobre el tema, debidos a **Aristeo** y a **Euclides,** pero de la misma manera que los *Elementos de Euclides* habían eclipsado a todos los textos elementales anteriores, así también en el nivel más avanzado de la teoría de las secciones cónicas, las *Cónicas de Apolonio* desplazaron a todos sus rivales en este campo, incluyendo las *Cónicas de Euclides*, y al parecer no se hizo ningún otro intento por mejorarlas en la antigüedad. Si la supervivencia es en algún sentido una medida de la calidad, entonces los *Elementos*

1 Tomado de Matemáticas Educativas en http://www.iescarrus.com/edumat/taller/conicas/conicas_01.htm

de Euclides y las *Cónicas de Apolonio* fueron, sin duda, las mejores obras en su género en la matemática antigua.



El *libro I de las Cónicas* comienza con una exposición de los motivos para escribir la obra. Así sabemos que mientras Apolonio estaba en Alejandría fue visitado por un geómetra llamado **Naucrates**, y fue a petición de este último que Apolonio escribió un apresurado borrador de las Cónicas en ocho libros. Más tarde, ya en Pérgamo, Apolonio se tomó el tiempo necesario para pulir cuidadosamente estos libros, uno por uno, lo que explica el hecho de que los Libros IV y VII comiencen con dedicatorias y agradecimientos al rey Atalo de Pérgamo. Los cuatro primeros libros los describe el autor como constituyendo una introducción elemental, y se supone generalmente que la mayor parte del material que contienen había aparecido publicado ya en anteriores tratados sobre cónicas. Sin embargo, Apolonio nos dice expresamente que algunos de los teoremas contenidos en el Libro III son suyos propios, ya que Euclides no había dado un tratamiento completo de los lugares geométricos que se consideran en él. Apolonio afirma que los cuatro últimos libros son extensiones de la materia que van más allá de lo esencial, y efectivamente, en ellos la teoría avanza en direcciones más especializadas.



Anteriormente a Apolonio, la elipse, la parábola y la hipérbola se obtienen como secciones, por medio de un plano, de tres tipos de conos circulares rectos distintos, según que el ángulo en el vértice fuese agudo, recto u obtuso. Parece ser que Apolonio demostró por primera vez, y de una manera sistemática, que no es necesario considerar exclusivamente secciones perpendiculares a una generatriz del cono, y que de un cono único pueden obtenerse los tres tipos de secciones cónicas sin más que variar la inclinación del plano que corta al cono; éste era un paso muy importante en el proceso de unificar los tres tipos de curvas en cuestión. Otra generalización importante se llevó a cabo cuando Apolonio demostró que el cono no necesita ser un cono recto, es decir, tal que su eje sea perpendicular al plano de su base circular, sino que puede igualmente tomarse de entrada un cono circular oblicuo o escaleno. Si **Eutocio**, en sus comentarios sobre las Cónicas, estaba bien informado, podemos asegurar que Apolonio fue el primer geómetra que demostró que las propiedades de estas curvas son las mismas, se obtengan como secciones de conos oblicuos o de conos rectos. Por último, Apolonio llevó el estudio de las antiguas curvas a un punto de vista más moderno al sustituir el cono de una sola hoja por un cono de dos hojas (par de conos orientados en sentido opuesto, con vértices coincidentes y ejes sobre la misma recta). De hecho, Apolonio da la misma definición de cono circular que se utiliza actualmente:

"Si una línea recta de longitud indefinida y que pasa siempre por un punto fijo se hace mover sobre la circunferencia de un círculo que no está en el mismo plano que el punto dado, de tal manera que pase sucesivamente por todos los puntos de dicha circunferencia, entonces la recta móvil describirá la superficie de un cono doble".

Este cambio, en el punto de vista, convierte a la hipérbola en la curva de dos ramas tal como la conocemos hoy: Hasta entonces los geómetras solían hablar de "las dos hipérbolas" en vez de "las dos ramas" de una hipérbola única, pero en cualquier caso el carácter dual de la curva fue reconocido claramente a partir de Apolonio.

Nociones preliminares

Como es sabido, una sección cónica es aquella que se forma cuando un plano intercepta dos conos circulares rectos opuestos por el vértice. La sección cónica obtenida está relacionada con la inclinación del plano y en este sentido se puede formar una parábola, una elipse o una hipérbola (Figura 1a). Cabe anotar que la circunferencia se considera un caso particular de la elipse, la cual se forma cuando el plano de corte transversal intercepta uno de los conos de forma horizontal sin pasar por el vértice. En este último caso la intersección es un punto, lo cual es considerado, entre otras, como una cónica atípica o degenerada. (Figura 1b)

Figura 1. Secciones cónicas

Parábola Elipse Circunferencia Hipérbola

a) Secciones cónicas estándar

Punto Recta Rectas que se intersecan

b) Secciones cónicas degeneradas

Las secciones cónicas cuentan con diferentes elementos, alguno de los cuales son comunes para todas ellas, como es el caso de los vértices, los focos y el eje focal; y otros que son particulares de cada sección, como es el caso, por ejemplo, de la directriz en las parábolas y el eje conjugado y las asíntotas en las hipérbolas. De estos elementos se hablará posteriormente dentro de la definición de cada una de las secciones cónicas que se tratan en este texto.

Las secciones cónicas pueden expresarse algebraicamente con ecuaciones de segundo grado o cuadráticas en dos variables así:

$$\boldsymbol{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Donde *A, B, B* y *C* no son todas cero.

Esta ecuación recibe el nombre de ***ecuación general*** de las cónicas.

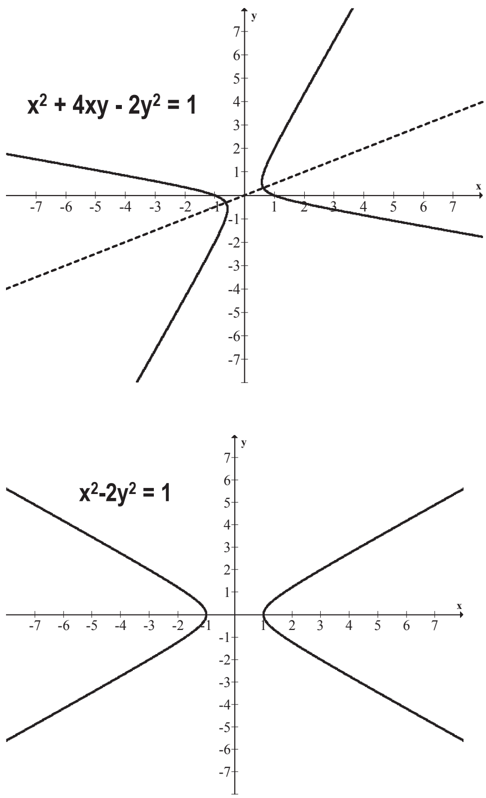
Los valores que toman los coeficientes de las variables nos sirven para identificar a cuál de las cónicas representa la ecuación dada, así como también si tienen traslación y/o rotación de ejes. Es así como los valores de *A* y *C* permiten específicamente identificar las secciones cónicas así:

En la ecuación que representa a las parábolas uno de los dos coeficientes es cero. Por lo tanto si $A = 0$ y $C \neq 0$ entonces se tiene una **parábola con eje focal horizontal**; si por el contrario $A \neq 0$ y $C = 0$ se trata de una **parábola con eje focal vertical.**

Para el caso de las elipses y a las hipérbolas los valores de *A* y *C* en la ecuación son diferentes de cero. La diferencia entre las ecuaciones de ambas cónicas consiste en que en el caso de la elipse los valores de *A* y *C* tienen el mismo signo, mientras que en las hipérbolas *A* y *C* presentan signos contrarios. Para determinar si estas secciones cónicas tienen el eje focal horizontal o vertical se procederá tal y como se explica en la sección correspondiente a cada una de ellas.

Los valores de *B*, *D*, y *E* indican específicamente si los ejes principales de las secciones cónicas tienen rotaciones o traslaciones. Es así como si $B \neq 0$ se trata de una sección cónica con rotación de ejes, es decir, se tienen secciones cónicas cuyos ejes principales tienen un giro con respecto a los ejes coordenados. Si $B = 0$, los ejes principales son paralelos a los ejes coordenados (Figura 2). Los valores de *D* y *E* nos dan indicio de si hay traslación de ejes. De esta forma cuando en la ecuación general, estos coeficientes son ambos cero, se puede afirmar que la gráfica de la sección se encuentra centrada en el origen del plano cartesiano o que sus ejes principales coinciden con los ejes coordenados. Si ambos son diferentes de cero, entonces, se tiene una sección cónica donde sus ejes principales se encuentran desplazados tanto vertical y horizontalmente con respecto a los ejes coordenados En el caso de que $D = O$ y $E \neq 0$ y se tiene una sección cónica con sólo traslación vertical sobre el eje y. Si por el contrario $D \neq 0$ y $E = 0$ se trata de una sección cónica con sólo traslación horizontal o sobre el eje x.

Figura 2. Secciones Cónicas con y sin rotación de ejes



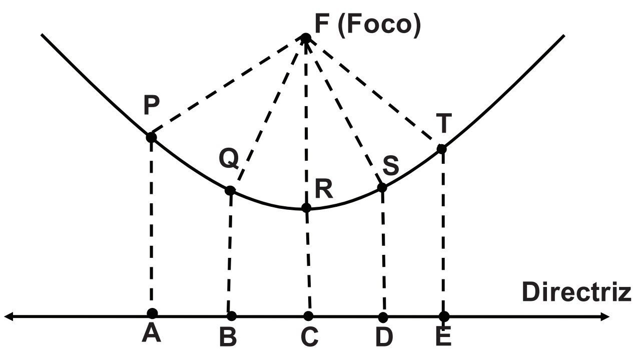
A continuación se presenta un breve repaso de los conceptos más relevantes de cada una de las secciones cónicas.

Parábola

Definición

Una parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia a una recta fija, llamada **directriz**, situada en el mismo plano, es siempre igual a su distancia a un punto fijo del plano, llamado foco, y que no pertenece a la recta.

Figura 3. Definición de parábola



Observemos en la figura que los puntos P, Q, R, S y T pertenecen a la parábola y además se debe cumplir que la distancia de F a T, la cual se representa como |FT|, debe ser igual a la distancia de T a E. Esto es |FT| = |TE|. De manera similar |FS| = |SD|, |FR| = |RC|, |FQ| = |QB| y |FP| = |PA|.

Elementos de la parábola

Los elementos básicos de la parábola son:

Eje Focal: Es la recta que pasa por el foco y el vértice

Foco (F): Es el punto fijo que se indica en la definición

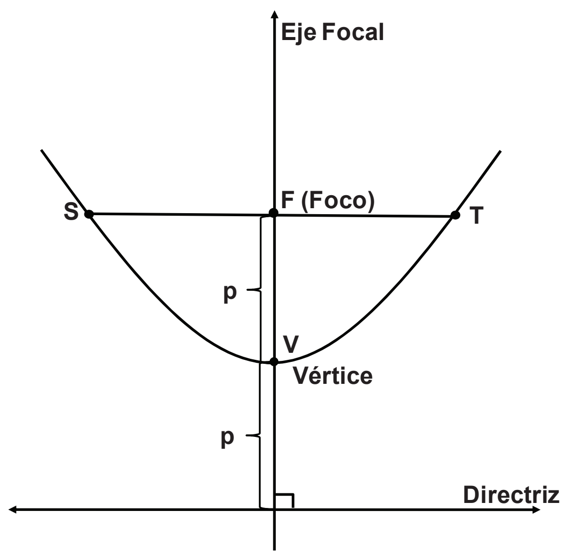
Directriz: Es la recta fija mencionada en la definición

Vértice (V): Es el punto donde el eje focal corta la parábola

Distancia focal (p): Es la distancia desde el vértice al foco y del vértice a la directriz.

Lado Recto ($\overline{ST}$): Es el segmento perpendicular al eje focal, que pasa por el foco F, cuyos extremos son dos puntos de la parábola.

Figura 4. Elementos de la parábola



Ecuación de la parábola

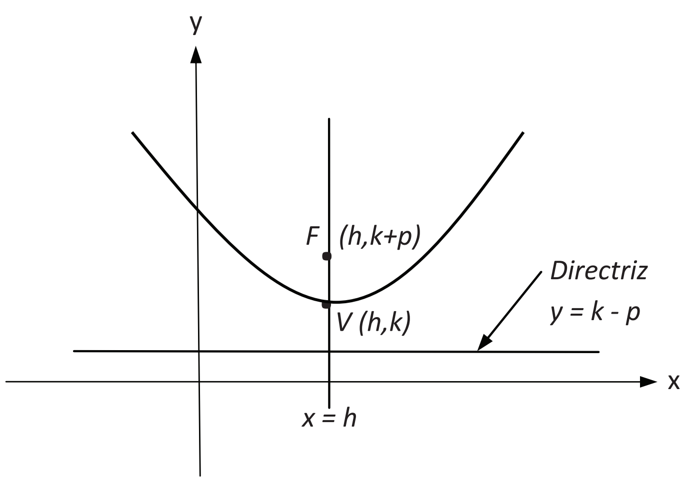
En la siguiente tabla se resumen las expresiones más importantes relacionadas con los elementos de la parábola.

Tabla 1. Expresiones para los elementos de la parábola

Parámetros	**Parábola de eje vertical**	**Parábola de eje horizontal**
Ecuación General	$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ B = 0 (sin rotación de ejes)	
	$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ $C = 0\,, A \neq 0$	$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ $A = 0\,, C \neq 0$
Ecuación canónica	$(x - h)^2 = 4p(y - k)$	$(y - k)^2 = 4p(x - h)$
Coordenadas del Vértice	(h, k)	(h, k)
Coordenadas del Foco	(h, k + p)	(h + p, k)
Ecuación de la Directriz	y= k – p	x= h – p
Ecuación del eje focal	x = h	y = k

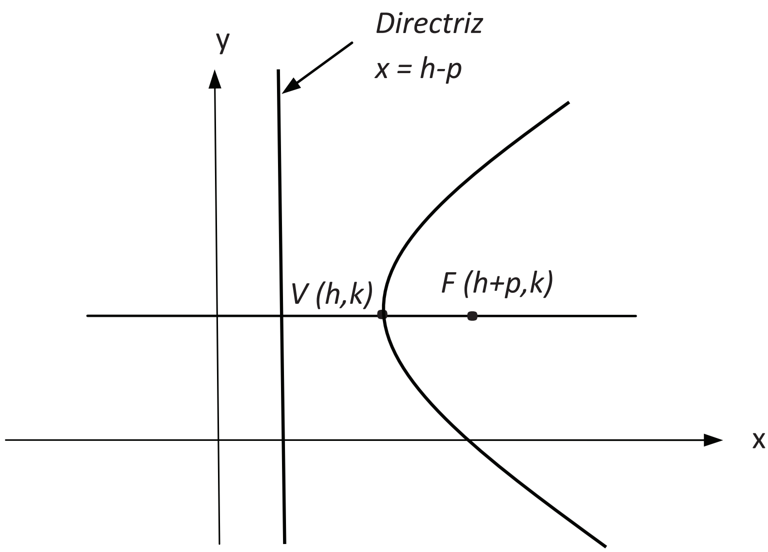
Cuando la parábola es de eje vertical (Figura 5), es decir, el eje focal es paralelo al eje y, la parábola es abierta hacia arriba si $p > 0$ y es abierta hacia abajo si $p < 0$. Note que si $p = 0$, entonces $x = h$ se obtiene una recta horizontal.

Figura 5. Parábola de eje focal vertical



Cuando la parábola es de eje horizontal (Figura 6), es decir, el eje focal es paralelo al eje x, la parábola es abierta a la derecha si p > 0 y es abierta a la izquierda si p < 0. Note que si $p = 0$, entonces $y = k$ se obtiene una recta vertical.

Figura 6. Parábola de eje focal horizontal



Veamos, por medio del siguiente ejemplo ilustrativo, cómo hallar los elementos de una parábola si se conoce la ecuación general de ésta, empleando el método clásico o algebraico.

Ejemplo

Pruebe que la ecuación $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$ representa una parábola, determine las coordenadas del vértice y del foco, la ecuación de la directriz y del eje focal. Realice la gráfica.

Solución

Comparando con las expresiones generales dadas en la tabla No.1, se tiene que la ecuación dada corresponde a una parábola con eje focal vertical, debido a que $A \neq 0$ y $C = 0$.

Ahora llevaremos la ecuación general:

$$4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$$

A su expresión canónica dividiendo la ecuación dada por cuatro, para que el coeficiente de x^2 sea igual a 1.

$$\frac{4x^2}{4} - \frac{20x}{4} - \frac{24y}{4} + \frac{97}{4} = 0$$

$$x^2 - 5x - 6y + \frac{97}{4} = 0$$

Posteriormente, se agrupan los términos semejantes de la variable x en un lado de la ecuación y el término en y, y el término independiente al otro lado de la ecuación así:

$$x^2 - 5x = 6y - \frac{97}{4}$$

Ahora se completa el trinomio cuadrado perfecto en la variable x y llevar la ecuación a la forma canónica $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.

$$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 6y - \frac{97}{4} + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

Nótese que al sumar $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ a un lado de la ecuación para completar el trinomio cuadrado perfecto en x se debe hacer lo mismo al otro lado de la ecuación para compensarla.

Factorizando el trinomio se obtiene:

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 = 6y - \frac{97}{4} + \frac{25}{4}$$

Realizando la suma de fraccionarios al lado derecho de la ecuación:

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 = 6y - 18$$

Ahora, sacando factor común 6 se tiene:

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 = 6(y-3)$$

Luego, comparando la expresión obtenida con la expresión canónica $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, las coordenadas del vértice son:

$$\left(\frac{5}{2}, 3\right)$$

Para hallar la distancia focal, p, tenemos que $4p = 6$, luego $p = \frac{3}{2}$.

Como $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba

Las coordenadas del foco se obtienen sumando el valor de p a la coordenada y del vértice, así

$$(h, k+p)$$

$$\left(\frac{5}{2}, 3+\frac{3}{2}\right)$$

$$\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

La ecuación de la directriz es:

$$y = k - p$$

$$\mathrm{y} = 3 - \frac{3}{2}$$

$$\mathrm{y} = \frac{3}{2}$$

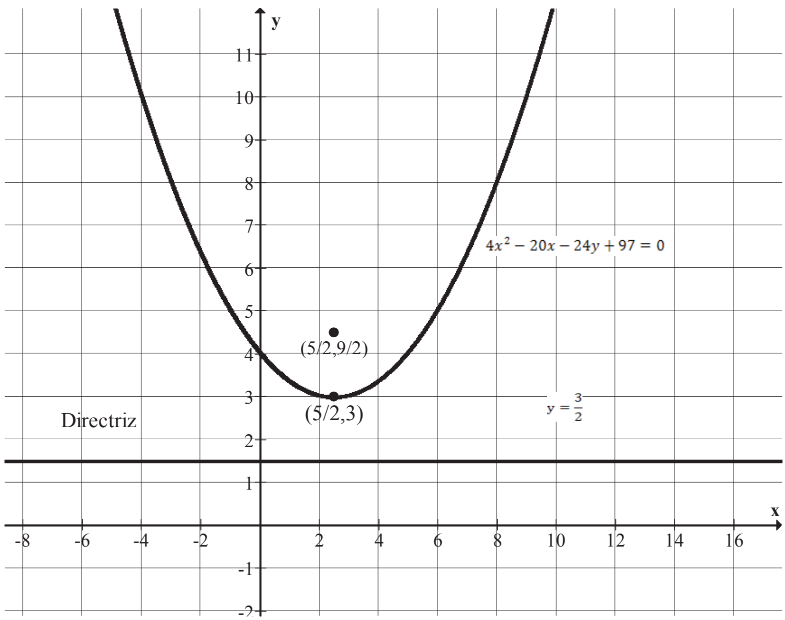
La ecuación del eje focal es

$$x = h$$

$$x = \frac{5}{2}$$

La gráfica se muestra en la figura 7.

FIGURA 7. PARÁBOLA $\mathbf{4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0}$



LA ELIPSE

Una definición intuitiva de la elipse sería la siguiente: "Una elipse es una curva ovalada que se asemeja a un círculo alargado"[2].

---

2 STEWART, James, REDLIN, Lothar y WATSON, Saleem. P*recálculo*. Quinta edición. Bogotá: Thompson, 2006. p. 753

Una definición más precisa sería la siguiente:

"Una elipse es el conjunto de todos los puntos en un plano cuya distancia a dos puntos fijos en el plano tienen una suma constante. Los puntos fijos son los **focos** de la elipse. La recta que une los focos es el **eje focal**. El punto sobre el eje focal que está en el punto medio entre los dos focos es el **centro**. Los puntos donde la elipse interseca a su eje son los **vértices** de la elipse".[3] Ver figuras 8 y 9.

FIGURA 8. ELEMENTOS DE UNA ELIPSE

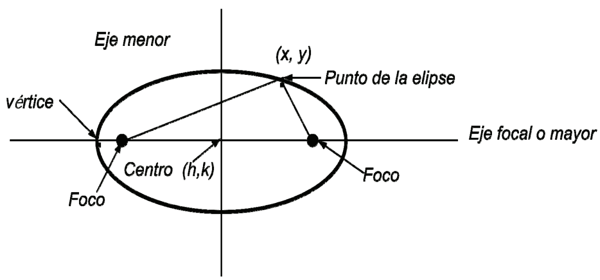
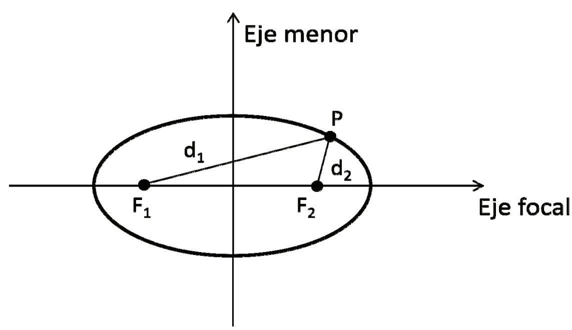


FIGURA 9. PROPIEDAD DE LA ELIPSE $d\,1 + d\,2$ = CONSTANTE

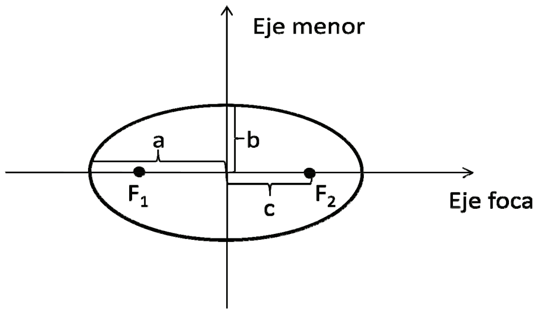


---

3 Demana, F. D., Waits, B. K., Foley, G. D., & Kennedy, D. (2007). *Precálculo. Gráfico, numérico, algebraico*. Mexico: Pearson, p. 644.

Con respecto a las longitudes de los ejes, observemos la figura 10, en la cual se colocan los focos sobre el eje horizontal.

FIGURA 10. LONGITUDES DE LOS EJES



De la figura 10, puede concluirse lo siguiente:

- La distancia entre los dos focos es 2c
- La longitud del eje mayor es 2a
- La longitud del eje menor es 2b

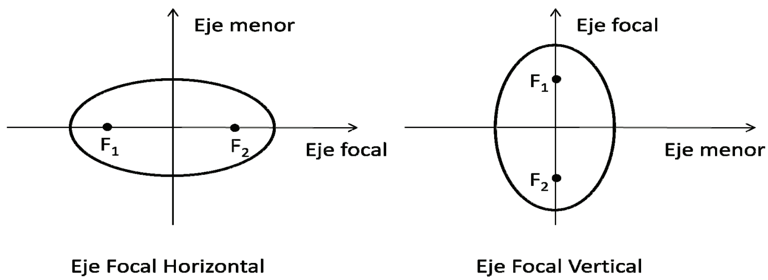
Nótese que el eje mayor siempre es más grande que el eje menor, y por lo tanto $a > b$. Asimismo, puesto que la suma de las distancias desde cualquier punto de la elipse a los focos debe ser mayor que la distancia entre ellos, se tiene que $2a > 2c$, ó $a > c$.

Estos tres elementos están relacionados entre sí, de acuerdo con la expresión pitagórica:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

El eje focal puede estar horizontal, y en este caso se dice que es una **elipse de eje horizontal** o simplemente una **elipse horizontal.** Si el eje focal está vertical, se dice que es una elipse de eje vertical o elipse vertical (Ver figura 11).

Figura 11. Dirección del eje focal de la elipse



Ecuaciones de elipses

En la siguiente tabla se resumen las expresiones más importantes para los elementos de la elipse.

Tabla 2. Expresiones para los elementos de la elipse con centro (h, k).

Elementos	Elipse de eje horizontal	Elipse de eje vertical
Ecuación general	$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ Con A y C no ambas cero, distinto valor numérico e igual signo. B = 0 (Sin rotación de ejes)	
Ecuación canónica	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
Localización de los focos	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
Localización de los vértices	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
Localización interceptos con el eje menor	$(h, k \pm b)$	$(h \pm b, k)$
Ecuación del eje focal	$y = k$	$x = h$
Semieje mayor	a	a
Semieje menor	b	b
Longitud focal	c	c
Relación pitagórica	$a^2 = b^2 + c^2$	$a^2 = b^2 + c^2$

A continuación procederemos a desarrollar un ejercicio relacionado con la obtención de los diferentes elementos afines de las elipses con la aplicación del método clásico (algebraico), consistente en completar trinomios cuadrados perfectos.

Ejemplo

Identificar si la ecuación general $x^2 + 4y^2 + 6x - 8y - 3 = 0$ es una elipse. Si lo es, determine a cuál de los ejes cartesianos es paralelo el eje focal y encuentre las coordenadas del centro, los vértices, los focos, las longitudes del eje mayor y menor, y bosqueje la gráfica.

Solución

Comparando la ecuación dada con la ecuación general de las secciones cónicas, se observa que A y C tienen signos iguales, por lo tanto, la ecuación general corresponde a una elipse. Como $D \neq 0$ y $E \neq 0$ se puede afirmar que se trata de una elipse no centrada en el origen.

Ahora llevaremos la ecuación general:

$$x^2 + 4y^2 + 6x - 8y - 3 = 0$$

a su expresión canónica sumando a ambos lados de la ecuación el inverso aditivo del término independiente, y agrupando los términos de x en un paréntesis y los términos de y en otro de la siguiente forma:

$$(x^2 + 6x) + 4(y^2 - 2y) = 3$$

Posteriormente, completamos los trinomios cuadrados dentro de los paréntesis obteniéndose así:

$$(x^2 + 6x + 9) + 4(y^2 - 2y + 1) = 3 + 9 + 4$$

Nótese que al sumar 1 al segundo paréntesis para completar el trinomio de términos en y, realmente se ha sumado 4 (producto de 4 y 1) al lado izquierdo de la ecuación, y por lo tanto, para compensarla hay que sumarle 4 al lado derecho. Es entonces donde la ecuación puede escribirse así:

$$(x+3)^2 + 4(y-1)^2 = 16$$

Ahora, al dividir ambos lados de la ecuación por 16 tenemos:

$$\frac{(x+3)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

La anterior expresión tiene la forma de la ecuación canónica de una elipse, a partir de la cual se pueden identificar fácilmente los valores de *h, k, a* y *b* con los cuales se determinan las coordenadas del centro, los vértices y los focos, así como las longitudes del eje mayor y menor y la posición del semieje focal. Así, pues, podemos afirmar que la ecuación obtenida corresponde a una elipse con centro en (–3,1) y de eje focal horizontal o paralelo al eje x debido a que el denominador del término en x es mayor al del término en y. En este sentido, tenemos $a^2 = 16$ y $b^2 = 4$. Por tanto $a = 4$ y $b = 2$.

Utilizando las expresiones dadas en la Tabla 2 para elipses de eje horizontal, tenemos que las coordenadas de los vértices son: (1,1) y (–7,1).

Para determinar las coordenadas de los focos se requiere conocer el valor que toma c. Por tanto, recurrimos a la relación pitagórica:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Despejando y reemplazando los valores obtenidos para a y b en la ecuación anterior obtenemos lo siguiente:

$$c = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 3.46$$

Las coordenadas de los focos se obtienen sumando y restando el valor obtenido para c a la abscisa del centro. Así pues, los focos tienen como coordenadas (0.46,1) y (–6.46,1).

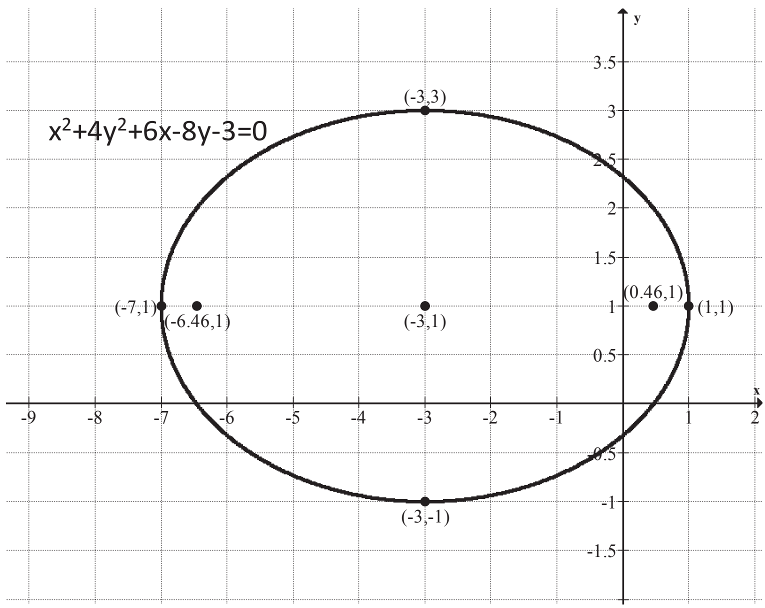
Para determinar la localización de los interceptos con el eje menor de la elipse, reemplazamos los valores obtenidos para *h, k* y *b* en $(h\,,k \pm b)$, obteniendo así:

$$(-3,3) \text{ y } (-3,-1)$$

Finalmente, la ecuación del eje focal es $y = k = 1$

La gráfica se muestra en la figura 12.

Figura 12. Elipse $\boldsymbol{x^2 + 4y^2 + 6x - 8y - 3 = 0}$

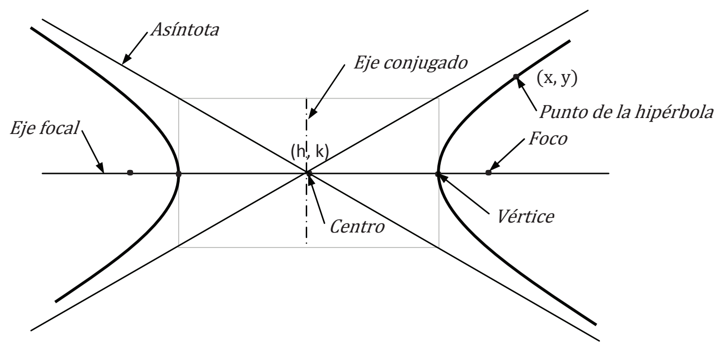


La hipérbola

Definición

Es un conjunto de puntos con coordenadas (x, y) en un plano cartesiano cuya diferencia de sus distancias a dos puntos fijos colineales en el plano es constante. Estos puntos fijos reciben el nombre de ***focos*** de la hipérbola, y la línea recta sobre la cual están localizados los focos recibe el nombre de ***eje focal* o *eje mayor.*** El punto medio entre los focos, de coordenadas (h, k), recibe el nombre de ***centro*** y a los puntos donde la hipérbola interseca el eje focal se les denomina ***vértice***. A la recta que pasa por el centro, y que es perpendicular al eje focal, recibe el nombre de ***eje conjugado***. A las dos curvas que forman la hipérbola se les llama *ramas.* La hipérbola tiene dos rectas inclinadas denominadas *asíntotas,* a las cuales las ramas de la hipérbola se acercan sin interceptarlas y que facilitan o sirven como guías para graficarlas. (Figura 13)

FIGURA 13. ELEMENTOS DE LA HIPÉRBOLA



La cuerda sobre el eje focal que une los vértices pasando por el centro recibe el nombre de ***eje transversal***. La medida de este eje está dada por $2a$, donde a es la distancia entre el centro y cada vértice. La medida de la cuerda comprendida entre los focos está dada por $2c$, donde c es la distancia existente entre el centro y cada foco. El eje conjugado tiene una longitud de $2b$, donde b es la distancia entre el centro de la hipérbola y un extremo del eje conjugado (Figura 14).

Las distancias a, b, y c están asociadas por la relación pitagórica:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Bibliografía

DEMANA, F. D., WAITS, B. K., FOLEY, G. D., & KENNEDY, D. Precálculo. Grafico, numérico, algebraico. Mexico: Pearson, 2007.

FLEMING W, VARBERG, D. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Tercera Edición. México: Prentice Hall, 1991.

SÁNCHEZ, A. V. Fundamentos de Geometría Analítica. Primera edición. México: Thomson Learning, 2002.

STEWART, J., REDLIN, L.r y WATSON, S. *Precálculo.* Quinta edición. Bogotá: Thompson, 2006.

Secciones cónicas
se terminó de imprimir en diciembre de 2008.
Para su elaboración se utilizó papel Bond de Alta Blancura 75 g,
en páginas interiores, y cartulina Propalcote 240 g para la carátula.
Las fuentes tipográficas empleadas son Times New Roman 11 puntos,
en texto corrido, y Myriad Pro 14 puntos en títulos.