Textos Académicos

CÁLCULO DIFERENCIAL

MEDIADO POR TIC Y VIDEOS

ITM
Institución Universitaria
Acreditada en Alta Calidad

Corporación Universitaria Lasallista
Lleva el conocimiento por siempre

CÁLCULO DIFERENCIAL

MEDIADO POR TIC Y VIDEOS

| John Jairo García Mora | Julia Victoria Escobar Londoño |
Carlos Alberto Rojas Hincapié | Carlos Mario Restrepo Restrepo |
César Augusto Ruiz Jaramillo | Elkin Alberto Castrillón Jiménez |
Héctor Javier Herrera Mejía | Juan Guillermo Arango Arango |
Margarita Emilia Patiño Jaramillo | María Encarnación Ramírez Escobar |
Sergio Alberto Alarcón Vasco |

ITM Institución Universitaria
Acreditada en Alta Calidad

Corporación Universitaria Lasallista

Cálculo diferencial mediado por TIC y vídeos : estrategia de innovación para mejorar el aprendizaje del cálculo diferencial apoyada en vídeos educativos y OVA / Grupo de investigación GNOMON ; Grupo de investigación en Educación y Subjetividad- GIES. ~ 1a ed. ~ Medellín: Instituto Tecnológico Metropolitano ; Corporación Universitaria Lasallista, 2016.

351 p. ~ Textos Académicos

Incluye referencias Bibliográficas

ISBN 978-958-5414-05-1

1. Cálculo diferencial - Enseñanza 2. Objetos Virtuales de Aprendizaje 3. Enseñanza con ayuda de computadores I. Instituto Tecnológico Metropolitano. Grupo GNOMON. II. Corporación Universitaria Lasallista. Grupo de investigación en Educación y Subjetividad–GIES III. Serie

515.33 SCDD Ed.21

CÁLCULO DIFERENCIAL MEDIADO CON TIC Y VIDEOS

Primera edición: diciembre de 2016
ISBN: 978-958-5414-05-1

AUTORES
• John Jairo García Mora • Julia Victoria Escobar Londoño • Carlos Alberto Rojas Hincapié • Carlos Mario Restrepo Restrepo • César Augusto Ruiz Jaramillo • Elkin Alberto Castrillón Jiménez • Héctor Javier Herrera Mejía • Juan Guillermo Arango Arango • Margarita Emilia Patiño Jaramillo • María Encarnación Ramírez Escobar • Sergio Alberto Alarcón vasco

INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO
Calle 73 No. 76A-354Tel.: (574) 440 5197
fondoeditorial@itm.edu.co
http://fondoeditorial.itm.edu.co/
Medellín – Colombia

PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA PARA CONSULTA GRATUITA

CORPORACIÓN UNIVERSITARIA LASALLITA
Carrera 51 No.118Sur – 57
Tel: (574) 3201999
Editorial Lasallista
editorial@lasallista.edu.co
http://www.lasallista.edu.co/#
Caldas-Antioquia

Prólogo

El trabajo colaborativo entre dos grupos de investigación de dos Instituciones de Educación Superior da cuenta de las oportunidades de crecimiento integral, en pro de la formación de futuros profesionales. Así, el grupo de investigación GNOMON del Instituto Tecnológico Metropolitano (ITM) y el grupo de investigación Educación y Subjetividad, adscrito a la Facultad de Ciencias Sociales y Educación de la Corporación Universitaria Lasallista (CUL) han logrado avanzar en los compromisos académicos de formalizar y sistematizar las reflexiones producto de un trayecto que han recorrido a través del desarrollo del proyecto conjunto denominado «Estrategia de innovación para mejorar el aprendizaje del cálculo diferencial apoyada en videos educativos y OVA. Experiencia interinstitucional CUL – ITM», cuyo objetivo general se centra en explicar la contribución del uso intencionado, por parte de los docentes de Cálculo Diferencial, de videos digitales y de objetos virtuales de aprendizaje (OVA), como apoyo a las clases y a la optimización de procesos de aprendizaje en los estudiantes matriculados en programas de Ingeniería y Tecnología de ambas instituciones, durante los años 2013 y 2014. Con la divulgación de las lecciones aprendidas antes, durante y después del proyecto, así como a través de los productos del mismo, se busca apoyar también los procesos de apropiación social de conocimiento a través de varias estrategias, entre ellas eventos académicos (seminarios, jornadas de investigación, entre otros) y la publicación de textos en varios formatos, que contribuyan a profundizar en alternativas de enseñanza de matemáticas en Educación Superior.

Para este libro, el equipo de trabajo ha reflexionado en ejes temáticos propios de la formación de profesionales movilizados por la experiencia y por el desarrollo, utilización y evaluación de material de apoyo en cursos de Cálculo Diferencial en las instituciones nombradas al inicio. El equipo se ha preguntado por las prácticas pedagógicas de la educación matemática, especialmente en el curso seleccionado, desde diversas posturas teóricas y contextos (histórico, social, cultural, político y económico), por el uso de Tecnologías de Comunicación e Información –TIC- como mediadoras y por la construcción de material de manera colaborativa entre docentes de dos instituciones de Educación Superior. Cada momento con sus aciertos y tropiezos ha inspirado el diseño de este texto, considerando a los estudiantes desde el diagnóstico y caracterización, sus fortalezas y debilidades para asumir la formación en Cálculo Diferencial en la universidad y sus desempeños en el proceso evaluativo, entre otros aspectos, como los estilos de enseñanza de los docentes universitarios.

Además, se utiliza como punto de partida el material mejorado del curso de Cálculo Diferencial, construido en la plataforma Moodle (Modular Object Oriented Dynamic Learning Environment), y transformado a través de la revisión y evaluación del equipo investigador del proyecto durante los semestres académicos 2013-1, 2013-2, 2014-1 y 2014-2; tal producción se organiza en el presente libro digital titulado Cálculo Diferencial mediado por TIC y vídeos.

La organización del texto responde a la interpretación y al análisis de los desempeños de los estudiantes durante la aplicación inicial del curso virtual y del curso presencial en ambas instituciones. Tal información permitió leer las necesidades y oportunidades de la población en particular, por ello, este libro cuenta con cinco capítulos: Conocimientos Previos, Funciones, Límite de funciones, Derivada de funciones y Aplicaciones de la derivada. En cada uno de ellos desarrolla un material que busca fortalecer la estructura conceptual del cálculo, además, se motiva a los docentes a la realización de diagnósticos para iniciar el curso y para cada unidad, también se incentiva a la utilización consciente e intencionada de prácticas de autoevaluación a partir de competencias matemáticas y fortalecimiento de trabajo independiente por parte de los estudiantes matriculados en el curso. Lo anterior se promueve a través de un material de enseñanza que se apoya en el uso de software matemático (Descartes, Matlab y GeoGebra) que respaldan procesos aritméticos, construcciones geométricas, modelaciones, mostraciones, que a su vez se enriquecen con vídeos motivadores y explicativos elaborados por los docentes del curso. Tal material ha sido diseñado teniendo como inspiración una pregunta permanente por el sentido pedagógico de las prácticas docentes en los procesos educativos y formativos en matemáticas en espacios universitarios, y los retos didácticos que de allí se desprenden. El material construido por los docentes durante el proyecto de investigación se amplía con la utilización de recursos existentes en la Internet o con la recomendación de sitios de interés para repasar, fortalecer o profundizar los elementos centrales desarrollados en las diferentes sesiones de un curso convencional de Cálculo diferencial.

El texto: *Cálculo diferencial mediado por TIC y vídeos*, ha sido construido por un equipo de investigadores con formación académica diversa, con un elemento común en ciencias básicas. Confluyeron profesionales de las áreas de ingeniería química, ingeniería de producción, ingeniería industrial, ingeniería en instrumentación y control, ingeniería civil, matemáticas, licenciatura en educación, tecnología, licenciatura en matemáticas y física, entre otras. Este equipo de investigadores también acredita formación postgraduada y amplia experiencia en docencia universitaria. Tales características se enriquecen con experiencia en procesos investigativos.

Para su estructura, considera los lineamientos expuestos en la *Serie Desarrollo de la Academia N°3. Manual para la creación de Objetos Virtuales de Aprendizaje* - OVA (Corporación Universitaria Lasallista, 2013) los cuales fueron discutidos en sesiones de reflexión académica durante el desarrollo del proyecto. El diseño del texto y la concepción del mismo buscan motivar, animar, autoevaluar al estudiante que tiene un primer contacto, en el contexto universitario, con el Cálculo diferencial. El material ha sido diseñado para múltiples públicos, atendiendo a diferentes estilos de aprendizaje y de enseñanza, pues la flexibilidad es una característica presente a lo largo del texto. Para lo anterior, se resalta que este es un texto básico, amigable a lector, que busca explicar con claridad las bases del Cálculo diferencial, con abundantes ejercicios resueltos para incitar a los estudiantes a perseverar en su estudio y comprensión. Los videos y OVAS buscan alternativas para incentivar el estudio independiente, representar, describir, narrar, escribir, etc. para ilustrar variedad a la hora de aprender y enseñar. Los estudiantes, luego de disfrutar de este texto estarán en condiciones de utilizar los libros clásicos utilizados en el contexto nacional e internacional tanto para la enseñanza como para el aprendizaje del Cálculo diferencial en Educación Superior.

Para culminar este prólogo, se resalta que el libro digital que se entrega a la comunidad académica, da cuenta de lecciones aprendidas a partir de discusiones y construcciones tanto conceptuales como metodológicas, dirigidas a docentes universitarios de Matemática, como un aporte para enriquecer las propuestas en torno a la enseñanza y el aprendizaje significativo del Cálculo diferencial, en pro de apoyar procesos educativos y, de manera especial, los procesos formativos de los futuros profesionales, que en muchos casos son trabajadores-estudiantes. Las lecciones aprendidas que se comparten en este texto dan cuenta de la necesidad de posibilitar un tránsito exitoso; para desarrollar competencias matemáticas, de la Educación Media a la Educación Superior. Construir condiciones para que tal tránsito sea exitoso solo será posible como resultado de espacios para investigar, reflexionar y profundizar sobre el sentido de las prácticas educativas universitarias en el área de matemáticas. Finalmente, este texto es, ante todo, una invitación a vivir experiencias didácticas a través de la lectura de un texto escrito con y para docentes y estudiantes universitarios comprometidos con promover aprendizajes significativos.

Contenido

Introducción

Este libro se comparte con la comunidad académica como un posible aporte a la solución del problema de deserción y reprobación de la asignatura de Cálculo diferencial en los centros de educación superior. Convencidos de ello, el grupo de investigación Innovación en Matemáticas y Nuevas Tecnologías para la Educación –GNOMON– del Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín (ITM), y el grupo Educación y Subjetividad –GIES– de la Corporación Universitaria Lasallista (CUL), diseñaron de manera conjunta el proyecto de investigación «Estrategia de innovación para mejorar el aprendizaje del Cálculo diferencial apoyada en vídeos educativos y OVA».

El equipo de investigación reconoce en la visualización una herramienta de gran poder para la comprensión de los conceptos y de las propiedades del Cálculo, gracias al carácter geométrico de estos componentes. Al ser implementada dentro de las estrategias didácticas, la visualización puede facilitar en el estudiante procesos de comprensión y, además, permite al docente poner en evidencia obstáculos de tipo cognitivo o conceptual que puedan atrasar aprendizajes en sus estudiantes.

Es en este sentido que el uso de objetos virtuales de aprendizaje (OVA) y de vídeos en los cursos de Cálculo diferencial cobra importancia, pues su carácter visual y dinámico permite al estudiante acercarse a los conceptos básicos desde diferentes contextos, y en ciertas ocasiones, le facilitan alcanzar, de manera más rápida y eficiente, un aprendizaje significativo.

Este libro digital permite la implementación de estrategias didácticas que lleven a la comprensión de los conceptos y propiedades mediante el uso de OVA y vídeos, los cuales son incorporados a lo largo del desarrollo de la teoría de manera precisa, para que el estudiante interactúe con ellos en cualquier momento, sin necesidad de abandonar la secuencia natural del texto y con la independencia de la temporalidad de las explicaciones del docente.

El libro está dividido en cinco capítulos: Conocimientos previos, Funciones, Límite de funciones, Derivada de funciones y Aplicaciones de la derivada. La intención del capítulo de *Conocimientos previos* es brindar al estudiante el dominio de algunos temas de las matemáticas básicas necesarios para el cálculo diferencial, por medio de la solución detallada de ejemplos ilustrativos y ejercicios propuestos. Los demás capítulos presentan la competencia que se espera que el estudiante logre al finalizar su estudio; se enuncian los conocimientos previos específicos necesarios para afrontar el capítulo; se ofrece una red de conceptos, así como situaciones problema y talleres diseñados por los autores con la intención de que faciliten al estudiante la construcción de los conceptos de forma progresiva.

A lo largo del desarrollo del libro, se hace especial énfasis en los aspectos conceptuales que son necesarios para dominar los elementos básicos del cálculo diferencial, sin descuidar los aspectos operativos que se ilustran mediante el desarrollo completo y detallado de cada ejemplo. También se ofrece la oportunidad de autoevaluarse con el propósito de fortalecer en los estudiantes tanto autonomía, como el avance en el desarrollo de hábitos intelectuales.

Los autores del libro acuerdan diseñar un texto en el que se identifican diversos estilos de enseñanza, así como diferencias en los formatos de los vídeos y OVA, como si se desarrollará un curso compartido, con las voces de n docentes. Este acuerdo, si bien es arriesgado, también da cuenta del proceso de construcción, diálogo, conflicto y lecciones aprendidas que refleja la complejidad de la enseñanza.

La intencionalidad central del texto es desmitificar el grado de dificultad del curso de Cálculo diferencial, ya que le permite al estudiante reconocer sus fortalezas y debilidades, acceder a material que va de lo simple a lo complejo, con ejercicios cercanos a su contexto y con la posibilidad de realizar una transición exitosa a otros textos de cálculo. El texto, se diseña como mínimo para servir de puente entre las nociones de Cálculo diferencial del grado Once, de la Educación Media colombiana, y la formación a profundidad en el mismo curso a nivel universitario, así como para ayudar al desarrollo de seguridad en el dominio de contenidos matemáticos necesarios para el aprendizaje del cálculo diferencial, y avanzar en las bases del mismo desde la autorregulación y la honestidad por parte de estudiantes y docentes universitarios.

Acerca de las competencias

Para el diseño del texto y del material de soporte, se consideran las competencias en pro de ofrecer la oportunidad de autoevaluar los desempeños en el curso de Cálculo diferencial, con el propósito de fortalecer autonomía y hábitos intelectuales. A continuación, se incluye la competencia matemática y la descripción de las tres competencias que se utilizan en cada una de las propuestas de autoevaluación que se incluyen al final de los capítulos:

Competencias matemáticas

El equipo de investigación asume la definición general, presentada por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), de competencia matemática como,

> La capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan (OCDE, 2005).

De manera particular, se retoma la propuesta de la Universidad Nacional de Colombia para dar cuenta de competencias matemáticas, en tanto ellos las nombran *Razonamiento Cuantitativo*[1], y este se organiza en tres: Interpretación de datos, Formulación y ejecución y, Evaluación y validación.

[1] Tomado de http://www.unal.edu.co/diracad/evaluacion/MODULOS_2012_I.pdf. Consultado en febrero 11 de 2013.

Este tipo de razonamiento, central en el curso de Cálculo diferencial, «evalúa competencias relacionadas con las habilidades en la comprensión de conceptos básicos de las matemáticas para analizar, modelar y resolver problemas aplicando métodos y procedimientos cuantitativos y esquemáticos» (Universidad Nacional, 2013).

Los aspectos centrales que son considerados para el proceso de evaluación se describen a continuación:

a. Interpretación de datos (C1)

Engloba la comprensión e interpretación de datos presentados de diferentes formas (tablas, gráficas, esquemas, símbolos, expresión verbal), así como la generación de representaciones diversas a partir de datos dados. Evalúa desempeños como:

- Comprender y manipular la información presentada en distintos formatos.
- Reconocer y obtener piezas de información a partir de descripciones, series, gráficas, tablas y esquemas.
- Comparar distintas formas de representar una misma información.
- Relacionar los datos disponibles con su sentido o significado dentro de la información.

b. Formulación y ejecución (C2)

Involucra procesos relacionados con la identificación del problema y la construcción/proposición de estrategias adecuadas para su solución en la situación presentada; además del tratamiento de datos, la modelación y el uso de herramientas cuantitativas (aritméticas, métricas, geométricas, algebraicas elementales y de probabilidad y estadística). Evalúa desempeños como:

- Plantear procesos y estrategias adecuados para resolver un problema.
- Seleccionar la información relevante y establecer relaciones entre variables en la solución (el análisis) de un problema.
- Diseñar planes, estrategias y alternativas para la solución de problemas.
- Utilizar herramientas cuantitativas para solucionar problemas (tratamiento de datos).
- Realizar cálculos sencillos para la ejecución de un plan de solución de un problema.
- Proponer soluciones pertinentes a las condiciones presentadas en la información.

c. Evaluación y validación (C3)

Incluye procesos relacionados con la verificación de resultados, hipótesis o conclusiones que se derivan de la interpretación y de la modelación de situaciones. Evalúa desempeños como:

- Validar procedimientos y estrategias matemáticas utilizadas para dar solución a problemas.
- Identificar las fallas o limitaciones de la información que se le presenta.
- Identificar fortalezas y debilidades de un proceso propuesto para resolver un problema.
- Aplicar estrategias cuantitativas orientadas a validar, corregir, o descartar soluciones obtenidas a problemas propuestos» (Universidad Nacional, 2013).

El texto da cuenta de la convicción de los investigadores frente a la importancia de actitudes, disposiciones y comportamiento que son importantes en la formación de profesionales integrales y en tal sentido retoman del informe denominado proyecto «Alfa Tuning Latinoamérica», documento de discusión primera parte que,

> Un desempeño en una especialidad dada es raramente útil si no va acompañada de calidad en habilidades no específicas: el saber ser (motivación, decisión, actitud, responsabilidad, etc.), el saber convivir con las personas (las relaciones entre las personas, la comunicación y el espíritu de equipo, etc.), el saber hacer con un sistema (resolver los problemas, la polivalencia, la adaptabilidad, etc.) (OCDE, 2005).

Capítulo 0

Conocimientos previos

Margarita Emilia Patiño Jaramillo - John Jairo García Mora

Grupo GNOMON (Instituto Tecnológico Metropolitano)

Conocimientos previos para el capítulo 1 (funciones)

Para el buen desempeño en el desarrollo del capítulo 1 (Funciones) es necesario tener muy claro algunos temas como:

-Solución de desigualdades

-Intervalos

-Variable independiente y variable dependiente

-Plano cartesiano

Solución de desigualdades lineales

Solucionar una desigualdad es hallar el intervalo donde la variable puede tomar sus valores para satisfacer la desigualdad.

Ejemplo. Solución de una desigualdad lineal sencilla

Resuelva $\frac{2}{3}x - 4 \leq \frac{1}{5} + 3x$.

Primero escribamos en un lado de la desigualdad los términos que tienen la variable y en el otro lado, los términos independientes: $\frac{2}{3}x - 3x \leq \frac{1}{5} + 4$

Hagamos las operaciones indicadas en cada miembro de la desigualdad: $\frac{-7}{3}x \leq \frac{21}{5}$

Al dividir por $\frac{-7}{3}$ ambos lados de la desigualdad, se cambia el sentido de esta desigualdad:

$$x \geq \frac{21}{5} \div \frac{-7}{3}$$

por tanto, la solución es el intervalo $\left[\frac{-63}{35}, \infty\right)$ osea: $\left[\frac{-9}{5}, \infty\right)$. Esto significa que cualquier valor que tome la variable en este intervalo satisface la desigualdad dada.

Ejemplo. Solución de una desigualdad lineal compuesta

Resolver:

$$\frac{2}{7} < 2x - 1 \leq 6$$

Esta desigualdad es equivalente a tener

$$\frac{2}{7} < 2x - 1 \ \wedge \ 2x - 1 \leq 6.$$

Resolvemos cada desigualdad por separado:

$$\frac{9}{14} < x \ \wedge \ x \leq \frac{7}{2}$$

equivale a tener $\frac{9}{14} < x \leq \frac{7}{2}$, lo que en notación de intervalo es $\left(\frac{9}{14}, \frac{7}{2}\right]$. La desigualdad de este ejemplo se puede resolver de otra forma si usamos las propiedades de las desigualdades. Lo que se debe tener en cuenta es que lo que se haga para una parte de la desigualdad se debe hacer para las otras, como lo veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Solución de una desigualdad lineal compuesta

Resolver $-3 < \frac{3x+8}{2} \leq 10$

Para empezar, podemos multiplicar toda la desigualdad por 2, para eliminar el denominador:

$$-3(2) < \frac{3x + 8}{2}(2) \leq 10(2)$$

$$-6 < 3x + 8 \leq 20$$

ahora podemos restar 8 en cada miembro de la desigualdad:

$$-6 - 8 < 3x + 8 - 8 \leq 20 - 8$$

$$-14 < 3x \leq 12$$

Y, por último, dividimos entre 3:

$$\frac{-14}{3} < \frac{3x}{3} \leq \frac{12}{3}$$

$$\frac{-14}{3} < x \leq 4$$

por lo que la solución es el intervalo $\left(\frac{-14}{3}, 4\right]$

Ejemplo. Solución de una desigualdad lineal compuesta

Resolver:

$$14 - 3x > -5x - 9 \ \vee \ 2x - 1 > x + 4.$$

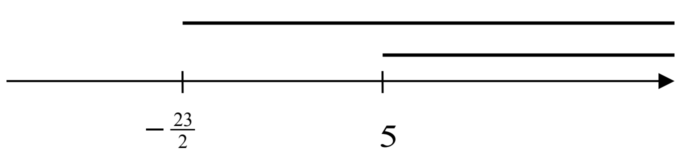
Resolvemos cada desigualdad por separado, teniendo en cuenta las propiedades de las desigualdades:

$$14 + 9 > -5x + 3x \ \vee \ 2x - x > 4 + 1$$

$$23 > -2x \ \vee \ x > 5$$

$$\frac{23}{-2} < x \ \vee \ x > 5$$

$$x > -\frac{23}{2} \ \vee \ x > 5$$



la solución es la unión de los intervalos

$\left(-\frac{23}{2}, \infty\right) \cup (5, \infty) = \left(\frac{23}{-2}, \infty\right).$

Ejemplo. Solución de problemas

En un ascensor hay un letrero que dice «peso máximo 900 libras». Si un usuario que pesa 78 kilogramos desea subir al ascensor junto con varias cajas iguales que pesan cada una 1.5 kilogramos, calcule el número máximo de cajas que puede subir.

Llamemos x al número máximo de cajas que se puede subir al ascensor.

Como cada caja pesa 1.5 kg, entonces el peso de todas las cajas es $1.5x$.

Como se debe subir una persona de 78 kg junto con las cajas, pero no exceder 900 libras ($900\ lb = 450\ kg$), entonces podemos plantear la siguiente desigualdad:

$$1.5x + 78 \leq 450$$

que podemos resolver teniendo en cuenta las propiedades de las desigualdades:

$$1.5x + 78 \leq 450$$

$$1.5x \leq 450 - 78$$

$$x \leq \frac{372}{1.5}$$

$$x \leq 248$$

por lo tanto, el número máximo de cajas que puede subirse al ascensor es de 248.

Ejemplo. Solución de problemas

Para aprobar el curso de Cálculo, cierto estudiante debe obtener un promedio de 3.0 o más. Si sus calificaciones son 2.5, 3.7, 2.0, 3.9, 1.2. Determine la calificación mínima que debe obtener en su último examen para aprobar el curso.

Tomemos como x la última calificación.

El promedio es la suma de las seis notas dividida entre seis, y este debe ser mayor o igual que 3. Por lo tanto, podemos establecer la siguiente desigualdad:

$$\frac{2.5+3.7+2.0+3.9+1.2+x}{6} \geq 3$$

al resolver, tenemos

$$\frac{2.5+3.7+2.0+3.9+1.2+x}{6} \geq 3$$

$$\frac{13.3+x}{6} \geq 3$$

$$13.3+x \geq 18$$

$$x \geq 18-13.3$$

$$x \geq 4.7$$

así que la calificación mínima que el estudiante debe obtener es de 4.7.

Solución de ecuaciones de la forma $|x| = A, A \geq 0$

En la solución de ecuaciones con valor absoluto de la forma $|x| = A\ A \geq 0$, se buscan los valores que están exactamente a A unidades de distancia respecto del cero en la recta numérica. Se debe considerar la siguiente propiedad:

Si $|x| = A, A \geq 0$, entonces $x = A \lor x = -A$.

Ejemplo. Solución de ecuaciones con valor absoluto

Resolver $|2x+5| = 3$

$|2x+5| = 3$

$$2x+5 = 3 \lor 2x+5 = -3$$

$$2x = 3-5 \lor 2x = -3-5$$

$$x = -1 \lor x = -4.$$

Comprobemos:

$$|2(-1)+5| = |-2+5| = |3| = 3$$

$$|2(-4)+5| = |-8+5| = |-3| = 3$$

cada una de las soluciones da una distancia de 3 unidades respecto del cero en la recta numérica. El conjunto solución es $\{-4, -1\}$.

Ejemplo. Solución de ecuaciones con valor absoluto

Resolver $\left|x - \frac{2}{5}\right| = -10$

Como el valor absoluto de un número nunca es negativo, no existe solución para esta ecuación. El conjunto solución es vacío $\{\ \}$.

Ejemplo. Solución de ecuaciones con valor absoluto

Resolver $\left|4x - \frac{1}{7}\right| = 0$

El único número real cuyo valor absoluto es igual a cero es el 0. Así la solución de esta ecuación es:

$4x - \frac{1}{7} = 0$ lo que equivale a tener $x = \frac{1}{28}$

Ejemplo. Solución de ecuaciones con valor absoluto

Resolver $\left|\frac{3}{7} - 5x\right| = \left|2x - \frac{1}{6}\right|$

en los casos como el propuesto en este ejemplo, se tiene en cuenta que:

Si $|x| = |y|$, entonces $x = y \lor x = -y$

así que

$$\frac{3}{7} - 5x = 2x - \frac{1}{6} \lor \frac{3}{7} - 5x = -\left(2x - \frac{1}{6}\right)$$

$$\frac{3}{7}+\frac{1}{6}=2x+5x \ \vee \ \frac{3}{7}-5x=-2x+\frac{1}{6}$$

$$\frac{25}{42}=7x \ \vee \ \frac{3}{7}-\frac{1}{6}=-2x+5x$$

$$\frac{25}{42}=7x \ \vee \ \frac{11}{42}=3x$$

$$\frac{25}{294}=x \ \vee \ \frac{11}{126}=x$$

El conjunto solución es

$$\left\{\frac{25}{294},\frac{11}{126}\right\}$$

Solución de desigualdades de la forma $|x|<A, A>0$

Propiedad: si $|x|<A, A>0$, entonces $-A<x<A$ (también es válido para $\leq$).

Ejemplo. Desigualdades con valor absoluto

Resuelva $|3x+5|<2$

Apliquemos la propiedad: $-2<3x+5<2$

restemos 5 en cada miembro: $-7<3x<-3$

al dividir por 3, tenemos: $\frac{-7}{3}<x<-1$

por lo tanto, la solución es el intervalo: $\left(\frac{-7}{3},-1\right)$

Ejemplo. Desigualdades con valor absoluto

Resolver $\left|\frac{2}{5} - x\right| < -4$

Como $\left|\frac{2}{5} - x\right|$ siempre será mayor o igual que cero, para cualquier número real x, esta desigualdad nunca puede ser verdadera. Por lo tanto la solución es el conjunto vacío: $\{\,\}$.

En general, podemos afirmar que en toda desigualdad de la forma $|x| < 0$, la solución es el conjunto vacío.

Ejemplo. Desigualdades con valor absoluto

Resuelva $|6x - 3| \leq 0$

Como $|6x - 3|$ siempre será mayor o igual que cero, entonces solo debemos determinar el número con el que el valor absoluto sea igual a cero, haciendo que la expresión dentro del valor absoluto sea igual a cero y despejando x:

$$6x - 3 = 0$$

$$x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

La desigualdad será cierta solo cuando $x = \frac{1}{2}$

Ejemplo. Desigualdades con valor absoluto

Resuelva $\left|\frac{5x}{2} - 1\right| \leq 4$

Apliquemos la propiedad: $-4 \leq \frac{5x}{2} - 1 \leq 4$

despejemos x:

$$-3 \leq \frac{5x}{2} \leq 5$$

$$-6 \leq 5x \leq 10$$

$$-\frac{6}{5} \leq x \leq 2$$

Por lo tanto, la solución es el intervalo

$$\left[-\frac{6}{5}, 2\right]$$

Solución de desigualdades de la forma $|x| > A$

Propiedad: si $|x| > A$ y $A > 0$ entonces $x < -A \ \vee \ x > A$

Ejemplo. Solución de desigualdades con valor absoluto

Resuelva $\left|\frac{12-x}{4}\right| > 10$

Aplicamos la propiedad: $\frac{12-x}{4} < -10 \ \vee \ \frac{12-x}{4} > 10$

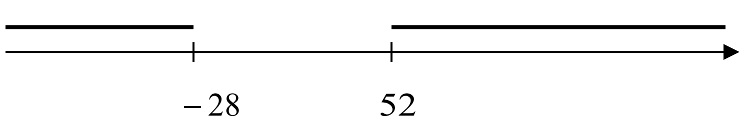
resolvemos cada desigualdad:

$$12 - x < -40 \ \vee \ 12 - x > 40$$

$$-x < -40 - 12 \ \vee \ -x > 40 - 12$$

$$-x < -52 \ \vee \ -x > 28$$

$$x > 52 \ \vee \ x < -28$$



Por lo tanto la solución es
$(-\infty, -28) \cup (52, \infty)$

Ejemplo. Desigualdades con valor absoluto

Resuelva $|7x - 9| + 15 > 8$

Primero despejemos la expresión con valor absoluto:

$$|7x - 9| > 8 - 15$$

$$|7x - 9| > -7$$

como $|7x - 9|$ siempre será mayor o igual que cero para cualquier número real x, entonces esta desigualdad es verdadera para todos los números reales. Por lo que la solución es el conjunto de todos los números reales R.

Ejemplo. Desigualdades con valor absoluto

Resuelva $\left|\frac{4-9x}{4}\right| - 6 > 2$

Primero despejemos el valor absoluto y luego apliquemos la propiedad

$$\left|\frac{4 - 9x}{4}\right| > 2 + 6$$

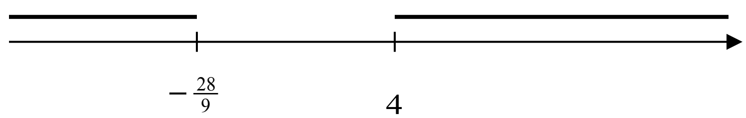
$$\left|\frac{4 - 9x}{4}\right| > 8$$

$$\frac{4-9x}{4} < -8 \vee \frac{4-9x}{4} > 8$$

$$4-9x < -32 \vee 4-9x > 32$$

$$-9x < -36 \vee -9x > 28$$

$$x > 4 \vee x < -\frac{28}{9}$$



la solución es

$\left(-\infty, -\frac{28}{9}\right) \cup (4, \infty)$

Solución de desigualdades no lineales

Para resolver desigualdades no lineales, se recomienda:

- De ser necesario, reescriba la desigualdad con todos los términos distintos de cero a un solo lado de la desigualdad (desiguale a cero).
- Si el lado distinto de cero involucra cocientes, escríbalos con denominador común.
- Factorice el lado distinto de cero de la desigualdad.
- Determine el valor donde cada factor se hace cero y ubique estos valores en una recta numérica.
- Determine los intervalos que se obtienen a partir del paso 4.
- Utilice valores de prueba para establecer el signo de cada factor en cada uno de los intervalos.

- Escriba el conjunto solución a partir de los signos del paso 6. Asegúrese de verificar si la desigualdad se satisface en los valores extremos de cada intervalo, en caso de que la desigualdad involucre los signos $\leq, \geq$.

Ejemplo. Solución de desigualdades cuadráticas

Resuelva $x^2 + x > 20$

Primero desigualemos a cero: $x^2 + x - 20 > 0$

factoricemos: $(x+5)(x-4) > 0$.

Los valores que hacen cero cada factor son, respectivamente, -5 y 4

Dibujemos una tabla con cada factor y en ella una recta numérica indicando los valores anteriores:

$x+5$			
$x-4$			
	-5	4	

intervalos $(-\infty, -5)$ $(-5,4)$ $(4, \infty)$

Tomemos valores de prueba en cada intervalo para establecer el signo de cada factor en cada intervalo y el signo del producto en cada intervalo.

$x+5$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
	-5	4	

Intervalos	$(-\infty, -5)$	$(-5,4)$	$(4, \infty)$
Signo de $(x+5)(x-4)$:	$+$	$-$	$+$

como hay dos intervalos donde el producto es mayor que cero, entonces la solución de la desigualdad es $(-\infty,-5) \cup (4,\infty)$.

Ejemplo. Solución de una desigualdad racional

Resuelva $\frac{3x+1}{x+2} \leq 1$

Antes de resolver esta desigualdad es importante anotar que NO es correcto multiplicar por el denominador, así $3x+1 < x+2$, porque no hay certeza de que el denominador sea positivo o negativo, con lo que se invertiría el signo de la desigualdad.

Es preferible primero desigualar a cero la expresión: $\frac{3x+1}{x+2} - 1 \leq 0$

Operemos el lado izquierdo: $\frac{2x-1}{x+2} \leq 0$

El numerador se hace cero en $x = \frac{1}{2}$ y el denominador en $x = -2$

En la siguiente tabla se muestran los signos de cada factor en cada intervalo formado por los valores anteriores. Además, el signo del cociente en cada intervalo:

$2x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
	-2	$\frac{1}{2}$	
Intervalos	$(-\infty,-2)$	$\left(-2,\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},\infty\right)$
Signo de $\frac{2x-1}{x+2}$	$+$	$-$	$+$

En el intervalo $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$ el cociente es menor que cero, no se puede tomar el valor de -2 (porque hace el denominador cero) y en $\frac{1}{2}$ el numerador es cero.

Entonces la solución de la desigualdad es el intervalo $\left(-2, \frac{1}{2}\right]$

Ejemplo. Desigualdades no lineales con valor absoluto

Resuelva $|x^2 - 8x + 14| \geq 2$

Apliquemos la propiedad: $x^2 - 8x + 14 \leq -2 \ \vee \ x^2 - 8x + 14 \geq 2$

Desigualamos a cero y resolvemos:

$$x^2 - 8x + 14 + 2 \leq 0 \ \vee \ x^2 - 8x + 14 - 2 \geq 0$$

$$x^2 - 8x + 16 \leq 0 \ \vee \ x^2 - 8x + 12 \geq 0$$

$$(x-4)^2 \leq 0 \ \vee \ (x-6)(x-2) \geq 0$$

Como $(x-4)^2$ es positivo para todo número real x, y el valor que la hace cero es 4, entonces la solución de la desigualdad del lado izquierdo es el conjunto unitario $\{4\}$.

Para solucionar la desigualdad $(x-6)(x-2) \geq 0$, procedamos como se indicó en un ejemplo anterior.

Los números que hacen cero cada factor son, respectivamente, 6 y 2. En el siguiente diagrama se muestran los signos de cada factor, en cada intervalo formado por los valores anteriores. Además, el signo del producto en cada intervalo:

$x-6$	$-$	$-$	$+$
$x-2$	$-$	$+$	$+$

2 6

intervalos	$(-\infty, 2)$	$(2,6)$	$(6, \infty)$
Signo de $(x-6)(x-2)$	$+$	$-$	$+$

Hay dos intervalos donde se cumple la desigualdad y además debemos incluir los extremos de estos, por lo que la solución total de la desigualdad es:

$(-\infty, 2] \cup \{4\} \cup [6, \infty)$

Ejemplo. Desigualdades no lineales con valor absoluto

Resuelva $\left|\frac{2-x}{3x-1}\right| \leq 1$

Apliquemos la propiedad: $-1 \leq \frac{2-x}{3x-1} \leq 1$

Esta desigualdad compuesta es equivalente a tener

$$-1 \leq \frac{2-x}{3x-1} \wedge \frac{2-x}{3x-1} \leq 1$$

cada una de estas desigualdades se debe resolver independientemente. De cada una se obtiene una solución cuya intersección (se trata de una conjunción $\wedge$) dará la solución total.

$$-1 \leq \frac{2-x}{3x-1} \wedge \frac{2-x}{3x-1} \leq 1$$

$$0 \leq \frac{2-x}{3x-1} + 1 \wedge \frac{2-x}{3x-1} - 1 \leq 0$$

$$0 \leq \frac{2-x+3x-1}{3x-1} \wedge \frac{2-x-3x+1}{3x-1} \leq 0$$

$$0 \leq \frac{1+2x}{3x-1} \wedge \frac{3-4x}{3x-1} \leq 0$$

Para cada desigualdad se construye una tabla indicando los valores donde el numerador y el denominador se anulan y los intervalos que estos producen:

$1+2x$	$-$	$+$	$+$
$3x-1$	$-$	$-$	$+$
	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	
	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3},\infty\right)$
$\frac{1+2x}{3x-1}$	$+$	$-$	$+$

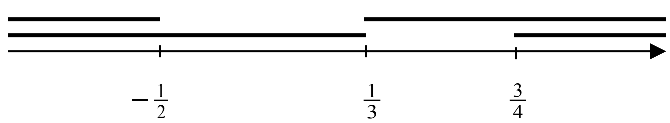
$$S_1 = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$$

$3-4x$	$+$	$+$	$-$
$3x-1$	$-$	$+$	$+$
		$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$

	$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$
$\frac{3-4x}{3x-1}$	$-$	$+$	$-$

$$S_2 = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{3}{4}, \infty\right)$$

ahora, la solución total es la intersección $S_1 \cap S_2$



$$S_1 \cap S_2 = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, \infty\right)$$

Notemos que el número $\frac{1}{3}$ no se puede tomar en ningún intervalo porque este hace cero el denominador.

Ejemplo. Desigualdades no lineales con valor absoluto

Resuelva $\left|\frac{1}{x+2}\right| \leq \left|\frac{3}{x}\right|$

Para empezar, tengamos en cuenta que $x \neq -2 \; y \; x \neq 0$

En estos casos donde la desigualdad incluye en cada miembro un valor absoluto, se pueden aplicar las propiedades del valor absoluto y de las desigualdades.

Elevemos ambos miembros al cuadrado:

$$\left(\left|\frac{1}{x+2}\right|\right)^2 \leq \left(\left|\frac{3}{x}\right|\right)^2$$

Con este procedimiento se pueden cancelar los signos de valor absoluto y tomar cada factor al cuadrado:

$$\frac{1}{(x+2)^2} \leq \frac{9}{x^2}$$

Como los denominadores son mayores que cero, al trasponer los factores la desigualdad no cambia de sentido:

$$x^2 < 9(x+2)^2$$

$$x^2 < 9x^2 + 36x + 36$$

$$0 < 8x^2 + 36x + 36$$

$$0 < 4(2x+3)(x+3)$$

Construyamos la tabla correspondiente, como ya lo hemos indicado en los ejemplos anteriores:

$2x+3$	_	_	+
$x+3$	_	+	+

-3 $\quad -\frac{3}{2}$

$$(-\infty, -3) \; \left(-3, -\frac{3}{2}\right) \; \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$$

$+ \qquad - \qquad +$

la solución es la unión de los intervalos donde se cumple que el producto es positivo:

$(-\infty,-3)\ \cup\ \left(-\frac{3}{2},\infty\right)$

ahora si consideramos que $x\neq 0$, entonces la solución es:

$(-\infty,-3)\ \cup\ \left(-\frac{3}{2},0\right)\cup\ (0,\infty\,)$

Ejercicios

Determine el conjunto solución para cada desigualdad.

1. $2x+5<-7x+1$
2. $-\frac{3}{7}+x\leq-\frac{4}{3}x-5$
3. $-9x+1\geq x+3$
4. $-\frac{2}{5}x-3>7-x$
5. $-13<2x+9\leq 7$
6. $\frac{1}{4}\leq-\frac{3x-2}{2}\leq 2$
7. $2-3x\leq 5+x<4x-1$
8. $\frac{7}{4}+x\leq 3x-1<x+9$
9. $x-\frac{2}{9}\leq 2\ \wedge\ 3x+1>-5$
10. $\frac{10-x}{3}\geq 5\ \wedge\ -\frac{10}{7}>\frac{x}{12}+1$
11. $2x-13<1\ \vee\ \frac{x}{3}+1\geq 3$
12. $2x-13<1\ \vee\ \frac{x}{3}+1\geq 3$
13. $4.7-2.5x<9.2\ \vee\ 12.3>x-3.5$

Encuentre el conjunto solución de cada ecuación

14. $\left|11x-\frac{1}{5}\right|=3$
15. $\left|\frac{4}{9}-\frac{2}{3}x\right|-\frac{2}{5}=\frac{3}{7}$
16. $\left|12+\frac{x}{5}\right|=-2$
17. $|-3x+1|=|x-1|$
18. $\left|5-\frac{3}{8}x\right|=|x+2.5|$
19. $|6-x|=-|x+3|$
20. $\left|\frac{x+4}{6}\right|=\left|\frac{x-2}{9}\right|$
21. $|6x-0.5|=2|4-x|$
22. $\left|2x-\frac{6}{13}\right|=0$
23. $|2-3x|=\left|\frac{x}{2}+3\right|$

Resuelva cada desigualdad. Utilice rectas numéricas para determinar el conjunto solución y dé la respuesta en notación de intervalo

24. $2x^2 + 5x \geq 3$
25. $x^2 - 6x < 0$
26. $x^2 - 64 \leq 0$
27. $\frac{x-3}{x+4} > 0$
28. $\frac{3x+4}{2x-1} \leq 0$
29. $\frac{x^2-4x-5}{x+3} < 0$
30. $\frac{x}{x^2+4x-21} \leq 0$
31. $\frac{2}{x-4} \geq 1$
32. $\frac{x-1}{3x+2} \leq -4$
33. $\frac{x}{5-3x} > -1$
34. $|6 - x| < 5$
35. $|x + 4| > 0$
36. $|7x - 2| \leq -3$
37. $|x + 4| \leq 7$
38. $|6 - x| < 4$
39. $|7x - 21| \geq 4$
40. $|4x + 5| + 6 \leq 10$
41. $|3x - 8| + 2 > 11$
42. $\left|\frac{5-2x}{3}\right| \geq 1$
43. $\left|\frac{5x-10}{6}\right| > \frac{5}{3}$
44. $\left|8 + \frac{x}{3}\right| > 0$
45. $\left|3x - \frac{4}{7}\right| + 9 < 4$
46. $|x - 11| + 6 < 2$
47. $|5x + 1| + 3 \geq -8$
48. $|4x + 15| - 6 \geq -6$
49. $\left|\frac{3x-2}{x}\right| \leq 2$
50. $3 \leq \left|\frac{3x+4}{x-1}\right|$
51. $|x - 4| \geq |3x + 8|$
52. $\left|\frac{2}{9} - x\right| \leq |5x + 2|$
53. $\left|\frac{x-3}{3x+4}\right| > 6$
54. $\left|\frac{x+8}{2x-1}\right| \geq 3$
55. $\left|\frac{2}{x+3}\right| > \left|\frac{1}{x}\right|$
56. $\left|\frac{3}{2x+5}\right| \geq \left|\frac{5}{x-1}\right|$

57. Una constructora requiere cierto tipo de vidrio. Pide al fabricante que tenga, preferiblemente, 0.85 mm de grosor. Sin embargo, por los procesos de fabricación, el grosor puede variar en 0.03 mm respecto al grosor requerido. Si X representa el grosor real del vidrio, escriba una desigualdad que represente el

rango del grosor requerido. ¿Cuál es el menor y cuál es el mayor grosor que se puede esperar?

58. El grosor de un tipo de madera para la construcción de paneles está garantizado en 2.5 pulgadas con un margen de error de 0.1 pulgadas. Si X representa el grosor real de la madera, escriba una desigualdad para representar el rango permitido y halle el menor y el mayor grosor.

59. La relación entre las escalas Celsius, C, y Fahrenheit, F, de temperatura está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Determine el intervalo en la escala Fahrenheit que corresponde a $85 \leq C \leq 120$. ¿Qué intervalo sobre la escala Celsius corresponde al rango de temperatura $75 \leq F \leq 98$?

60. La fuerza gravitacional F ejercida por la tierra sobre un cuerpo con una masa de 100 kg está dada por la ecuación $F = \frac{4000000}{d^2}$, donde d es la distancia (en km) desde el cuerpo al centro de la tierra y la fuerza F se mide en newton (N). ¿Para qué intervalo de distancia la fuerza gravitacional estará entre 0.0004N y 0.01N?

61. Cerca de una fogata, la temperatura T en °C a una distancia de x metros del centro del fuego está determinada por $T = \frac{600000}{x^2+300}$. ¿En qué intervalo de distancias desde el centro de la fogata la temperatura es mayor que 500°C?

62. Las calificaciones de Camila en sus primeros cuatro exámenes son 87, 92, 70 y 75. Un promedio mayor o igual que 80 y menor que 90 le daría una nota final de B. ¿Cuál es el rango de calificaciones que debe obtener Camila en su quinto y último examen para obtener una calificación final de B? Suponga que la calificación máxima es 100.

63. Una compañía debe ensamblar 1000 artefactos electrónicos en una semana gastando no más de $6000 por concepto de mano de obra. Si el costo de mano de obra por ensamblar una unidad durante las horas diurnas es de $5 y $7 durante las nocturnas, ¿cuál es el mínimo número de artefactos que deben ser ensamblados en las horas diurnas?

64. Un recipiente de 750 cm^3 tiene forma cilíndrica con un radio interior de 5 cm. ¿Qué tan exactamente debemos medir la altura h del agua en el vaso para estar seguros de tener tres cuartos de litro de agua, con un error menor del 0,5%?

65. Una fábrica debe ensamblar 1000 aparatos electrónicos en una semana gastando no más de $8000 por concepto de mano de obra. Si el costo de mano de obra por ensamblar una unidad durante las horas diurnas es de $7 y $9 durante las nocturnas, ¿cuál es el mínimo número de artefactos que deben ser ensamblados en las horas diurnas?

66. Un fabricante puede vender todas las unidades de un producto a $50 cada una. El costo C (en dólares) de producir x unidades cada semana está dado por $C = 40000 + 300x - x^2$. ¿Cuántas unidades deberán producirse y venderse a la semana para obtener alguna utilidad?

RESPUESTA A LOS EJERCICIOS

1. $\left(-\infty,-\frac{4}{9}\right)$
2. $\left(-\infty,-\frac{96}{49}\right]$
3. $\left(-\infty,-\frac{1}{5}\right]$
4. $\left(\frac{50}{3},\infty\right)$
5. $[-11,-1]$
6. $\left[-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right]$
7. $(2,\infty)$
8. $\left[\frac{11}{8},5\right]$
9. $\left(-2,\frac{20}{9}\right]$
10. $\left(-\infty,-\frac{204}{7}\right)$
11. R
12. R
13. R
14. $\left\{-\frac{14}{55},\frac{16}{55}\right\}$
15. $\left\{-\frac{121}{210},\frac{401}{210}\right\}$
16. Vacío
17. $\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$
18. $\left\{-12,\frac{20}{11}\right\}$
19. Vacío
20. $\left\{-16,-\frac{8}{5}\right\}$
21. $\left\{-\frac{15}{8},\frac{17}{16}\right\}$
22. $\left\{\frac{3}{13}\right\}$
23. $\left\{-\frac{2}{7},2\right\}$
24. $(-\infty,-3]\cup\left[\frac{1}{2},\infty\right)$
25. $(0,6)$
26. $[-8,8]$
27. $(-\infty,-4)\cup(3,\infty)$
28. $\left[-\frac{4}{3},\frac{1}{2}\right)$
29. $(-\infty,-3)\cup(-1,5)$
30. $(-\infty,-7)\cup[0,3)$
31. $(4,6]$
32. $\left(-\frac{2}{3},-\frac{7}{3}\right]$
33. $\left(-\infty,\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{2},\infty\right)$
34. $(1,11)$
35. R
36. Vacío
37. $[-11,3]$
38. $(2,10)$
39. $\left(-\infty,\frac{17}{7}\right]\cup\left[\frac{25}{7},\infty\right)$
40. $\left[-\frac{9}{4},-\frac{1}{4}\right]$
41. $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{17}{3},\infty\right)$
42. $(-\infty,1]\cup[4,\infty)$
43. $(-\infty,0)\cup(4,\infty)$
44. R
45. Vacío
46. Vacío
47. R
48. R
49. $\left[\frac{2}{5},2\right]$
50. $\left[-\frac{1}{6},1\right)\cup(1,\infty)$
51. $[-6,-1]$
52. R
53. $\left(-\infty,-\frac{21}{19}\right)$
54. $\left(-\infty,\frac{11}{5}\right)$
55. $(-1,3)$
56. R
57. $0.82\leq x\leq 0.88$
58. $2.4\leq x\leq 2.6$
59. $185\leq F\leq 248;\ 23.8\leq C\leq 36.6$
60. $20000<d<100000$
61. $|x|<30$
62. $76\leq x<100$
63. 500
64. $9.5<h<9.6$
65. 500
66. 361

Conocimientos previos para el capítulo 2 (Límites y continuidad)

Para el buen desarrollo del capítulo 2 (Límites y Continuidad) se hace necesario comprender y entender la manera de aplicar los conceptos básicos de la aritmética y del álgebra sobre:

-Productos notables

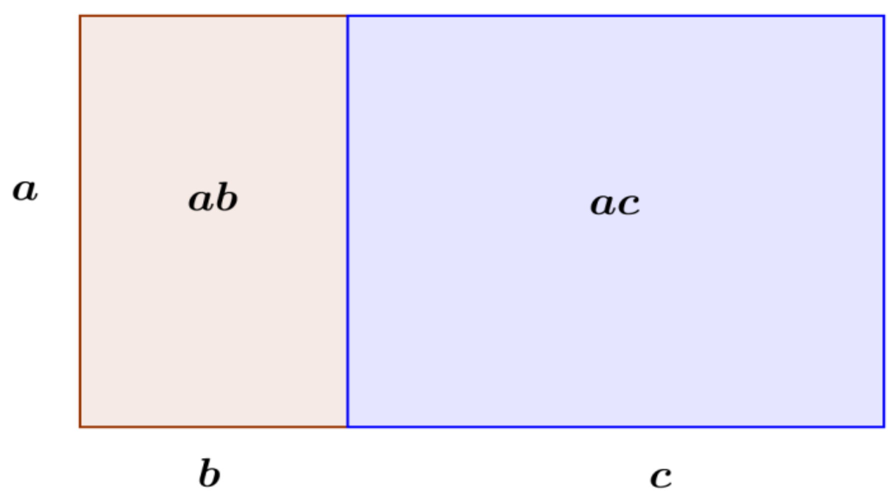
-La factorización

-Racionalización

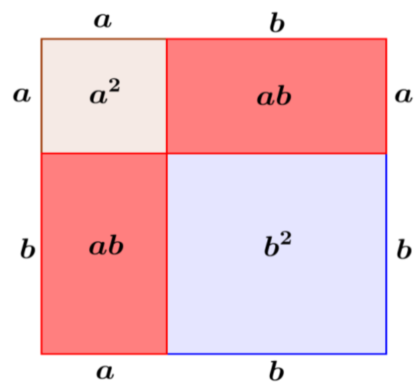
Los productos notables

Los productos notables son expresiones que reflejan las propiedades de las leyes que rigen la operación de multiplicar, como la propiedad distributiva:

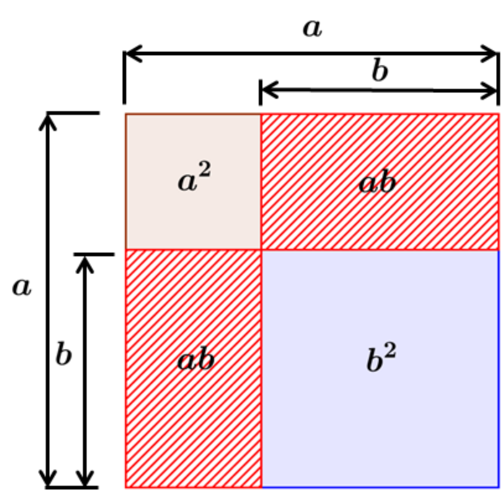
$a(b+c) = ab + ac$ y su interpretación geométrica se realiza mediante áreas.



El cuadrado de la suma de un binomio $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$, de igual manera lo podemos expresar geométricamente mediante áreas:

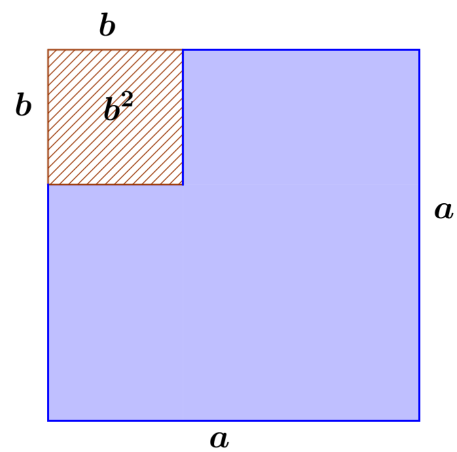


De igual manera el cuadrado de la diferencia de un binomio $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$, asimismo lo podemos expresar geométricamente mediante áreas, en dicha grafica las áreas rayadas representan el doble producto de las longitudes de los lados a y b:



El producto de 2 binomios conjugados, conocido como el producto de la suma de dos cantidades por su diferencia, es una identidad básica para racionalizar binomios:

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$



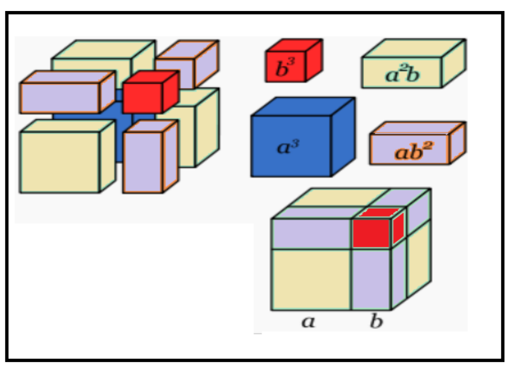
Sumas y diferencias de binomios elevados a la potencia 3 (cubo)

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Podemos visualizar la representación geométrica del producto en la siguiente gráfica:

Descomposición volumétrica del binomio al cubo



Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/Productos_notables

Además de lo anterior, podemos citar otras identidades básicas para los productos de polinomios y necesarias en la evaluación de los límites:

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$

La factorización

En matemáticas, la factorización es una técnica que consiste en la descomposición de una expresión matemática (que puede ser un número, una suma, una matriz, un polinomio, entre otras) en forma de multiplicación. Existen diferentes métodos de factorización, dependiendo de los objetos matemáticos estudiados; el objetivo es simplificar una expresión o reescribirla en términos de «bloques fundamentales» que reciben el nombre de factores, como por ejemplo un número en números primos, o un polinomio en polinomios irreducibles.

El teorema fundamental de la aritmética cubre la factorización de números enteros, teorema que indica lo siguiente: todo número compuesto puede expresarse en una sola forma como el producto de números primos sin tener en cuenta el orden de los factores.

Para la factorización de polinomios, el teorema fundamental del álgebra establece que todo polinomio de una variable no constante con coeficientes complejos tiene una raíz compleja, es decir, existe un número complejo que evaluado en el polinomio da como resultado cero. Este incluye polinomios con coeficientes reales, ya que cualquier número real es un número complejo con parte imaginaria igual a cero.

Recordemos que un número complejo se expresa de la forma $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{bi}$ donde a y b son números reales, volviendo a la definición del teorema, implica todo polinomio de grado n de una variable no constante con coeficientes complejos n tiene, contando con las multiplicidades, exactamente n raíces. La equivalencia de estos dos enunciados se realiza mediante la división polinómica sucesiva por factores lineales.

Normalmente nuestros trabajos de factorización tienen como objetivo la simplificación de expresiones numéricas y/o expresiones algebraicas, por lo tanto, podemos factorizar dentro en el marco de los números enteros y en el marco de los números reales.

Si recordamos los productos notables de la sección podemos realizar operaciones de factorización fácilmente y apoyados por algunas propiedades de los conjuntos numéricos.

Son factorizaciones no muy comunes en los textos, sin embargo, al ser aplicadas resultan de utilidad. Lo primero que debemos buscar es un factor común, para ello tenga en consideración las siguientes alternativas:

Extracción de factor común

Factor común caso 1

Ejemplo. Factorizar el siguiente trinomio por extracción de un término común. Aplicamos la propiedad fundamental de los números racionales que indica que puedo multiplicar el numerador y el denominador de una expresión racional sin alterarla, multiplicamos el 4 por x y dividimos por x.

$$P(x) = 5x^2 + 2x - 4 = 5x^2 + 2x + \frac{4x}{x}$$

factorizando tenemos: $P(x) = x\left(5x + 2 + \frac{4}{x}\right)$.

Factor común caso 2

Los coeficientes de los términos son fraccionarios.

Ejemplo. Factorizar el polinomio $P(x) = \left(\frac{3x^3}{10} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{2}\right)$. Para este tipo de factorización extraemos como factor común de los coeficientes el de menor denominador o si es necesario se halla un común denominador para poder extraerlo, en este caso es $\frac{1}{2}$

$$P(x) = \frac{1}{2}x\left(\frac{3}{5}x^2 + \frac{x}{3} - 1\right)$$

Factor común caso 3

Cuando no existe un factor numérico en todos los términos del polinomio, solo existen potencias de variables, entonces los factores serán solo literales.

Ejemplo. Factorizar $P(x) = ab^3 + a^2b^3 - ab^4$

$$P(x) = ab^3(1 + a - b)$$

Factor común caso 4

Cuando el factor común es un binomio o trinomio que se obtiene por agrupación de los términos.

Ejemplo. Factorizar $P(x) = 2ax + 4bx - 2by - ay$

$$P(x) = (2ax + 4bx) + (-2by - ay)$$

$$P(x) = (2ax + 4bx) - (2by + ay)$$

$P(x) = 2x(a + 2b) - y(2b + a)$

$P(x) = (a + 2b)(2x - y)$

Diferencia de cuadrados

Se llama diferencia de cuadrados a un binomio de la forma $P(x) = a^{2n} - b^{2n}$ en donde a y b son números reales y el producto de $2n$ es par.

Una factorización de este tipo se puede realizar desde el conjunto de los números racionales o desde el conjunto de los números enteros. La factorización de una diferencia de cuadrados es el producto de dos binomios conjugados $P(x) = a^n - b^n = (a^{n/2} + b^{n/2})(a^{n/2} - b^{n/2})$.

Veamos el caso de factorizar en el conjunto de los racionales, ello se debe a que uno o ambos términos del binomio no son cuadrados perfectos, recordemos que una cantidad es un cuadrado perfecto si al dividir su exponente el resultado es un número entero, de lo contrario será una fracción.

Ejemplo. Factorizar $P(x) = 5 - x^2$

$P(x) = (\sqrt{5} + x)(\sqrt{5} - x)$

Ahora el caso donde sí existen los cuadrados perfectos, es factorizar en el conjunto de los números enteros.

Ejemplo. Factorizar $P(x) = \frac{49x^6}{a^2} - \frac{y^4}{100}$

$$P(x) = \left(\frac{7x^3}{a} - \frac{y^2}{10}\right)\left(\frac{7x^3}{a} + \frac{y^2}{10}\right)$$

Diferencia de cubos

Es un binomio de la forma $a^{3n} - b^{3n}$ donde el exponente $3n$ se puede dividir por 3 y el resultado es un entero, dicha expresión se factoriza como:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)\cdot$$

En algunas ocasiones para simplificar una expresión es necesario completar la diferencia de cubos, veamos un ejemplo:

Ejemplo. Simplificar $P(x) = \frac{8-x}{2-\sqrt[3]{x}}$

Vemos que en el denominador existe un binomio que son las raíces cúbicas de los dos términos del numerador, entonces podemos completar la diferencia de cubos para simplificar.

$$P(x) = \frac{(8-x)\left[2^2 + 2\sqrt[3]{x} + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right]}{\left(2-\sqrt[3]{x}\right)\left[2^2 + 2\sqrt[3]{x} + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right]} = \frac{(8-x)\left[2^2 + 2\sqrt[3]{x} + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right]}{(8-x)}$$

$$P(x) = 4 + 2\sqrt[3]{x} + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$$

Suma de cubos

Es un binomio de la forma $a^{3n} + b^{3n}$ donde el exponente 3n se puede dividir por 3 y el resultado es un entero, dicha expresión se factoriza como:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

La racionalización

En matemáticas, la racionalización es una técnica que permite escribir una expresión algebraica racional o numérica racional que contenga radicales en el denominador en la forma fraccionaria con denominador entero. Cuando tenemos fracciones con radicales en el denominador conviene obtener fracciones equivalentes, pero que no tengan radicales en el denominador. A este proceso es a lo que se llama racionalización de radicales de los denominadores. Recordemos que según el tipo de radical o la forma de la expresión que aparece en el denominador, el proceso es diferente.

Caso 1

Si el denominador contiene un solo término formado por una sola raíz cuadrada. En este caso basta multiplicar numerador y denominador por la misma raíz cuadrada.

Ejemplo. Racionalizar $P(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{3\sqrt{x}}{x}$

Caso 2

Si el denominador contiene un solo término formado por una sola raíz cúbica. En este caso basta multiplicar numerador y denominador por la misma raíz cúbica con una cantidad subradical que posea un exponente tal que, sumado con el exponente de la cantidad subradical inicial, el resultado sea igual al índice 3.

Ejemplo. Racionalizar $P(x) = \frac{7}{\sqrt[3]{x}} = \frac{7\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2}} = \frac{7\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{7\sqrt[3]{x^2}}{x}$

Caso 3

Si el denominador contiene un binomio que contiene al menos una raíz cuadrada. En este caso basta multiplicar numerador y denominador por lo que se denomina la conjugada de ese binomio (recordar el producto notable de la suma de dos cantidades por su diferencia, explicado más arriba). Veamos el ejemplo (en la evaluación de límites a veces es necesario multiplicar por el conjugado del numerador).

Ejemplo. Hallar un expresión equivalente a $P(x) = \frac{9x-y}{3x-\sqrt{y}}$

$$P(x) = \frac{(9x-y)}{\left(3x-\sqrt{y}\right)} * \frac{\left(3x+\sqrt{y}\right)}{\left(3x+\sqrt{y}\right)} = \frac{(9x-y)\left(3x+\sqrt{y}\right)}{9x^2-y}$$

Referencias generales del texto

Alarcón, S. A.; González M., M. C. y Quintana Ávila, H. M. (2008). *Cálculo Diferencial: límites y derivadas.* Medellín: Fondo Editorial ITM.

Castañeda, E.; Gómez, M.C.; González M., I. y González V., M. I. (2005). La regla de L'Hôpital y una controversia a su alrededor. *Ciencia Ergo Sum, 12*(3), 329 - 334.

Corporación Universitaria Lasallista (2013). Serie Desarrollo de la Academia N°3. *Manual para la creación de Objetos Virtuales de Aprendizaje* – OVA. Caldas-Antioquia.

Edwards. C. H. y Penney, D. E. (2008). *Cálculo con trascendentes tempranas*. 7 ed. México: Pearson.

Larson, R. H. (1998). *Cálculo y geometría analítica.* México: McGrawHill Interamericana de España.

Larson, R.; Hostetler, R. y Edwards, B. (2010). *Cálculo esencial*. México: Cengage Learning.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (2005). Pruebas Pisa para matemáticas. España: OCDE.

Ruiz, Z. A. (2012). *Historia y filosofía de las matemáticas.* Costa Rica: EUNED.

Stewart, J. (2009). *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas*. 6 ed. México: Thomson Learning.

Thomas, G. B. (2010). *Cálculo: una variable.* México: Pearson.

Universidad Nacional de Colombia (2012). Competencias matemáticas. Razonamiento cuantitativo. Disponible en www.bdigital.unal.edu.co.

Listas especiales

Lista de vídeos

Lista de figuras

Lista de tablas

John Jairo García Mora

Magíster en Educación, Especialista en Docencia Universitaria, Especialista en Gestión Energética Industrial, Licenciado en Educación de la Tecnología. Catedrático de la Universidad San Buenaventura, Catedrático de la Corporación Universitaria Lasallista, Catedrático del Colegio Mayor de Antioquia. Miembro del Instituto GEOGEBRA de Medellín. Profesor Asociado del Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín ITM. Investigador del grupo GNOMON del ITM.

jhongarcia@itm.edu.co, jhongarcia54@hotmail.com

Julia Victoria Escobar Londoño

Doctora en Educación de la Universidad de Antioquia, Magíster en Educación de la Pontificia Universidad Javeriana en convenio con la Universidad de Medellín, Licenciada en Matemáticas y Física de la Universidad Pontifica Bolivariana, docente de tiempo completo y Directora del grupo de investigación Educación y Subjetividad de la Corporación Universitaria Lasallista, docente de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias en la Universidad Nacional, sede Medellín.

juescobar@lasallistadocentes.edu.co

María Encarnación Ramírez Escobar

Magíster en Educación y Desarrollo Humano del Cinde y la Universidad de Manizales, Especialista en Evaluación Educativa Matemática de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín y docente de tiempo completo de la Corporación Universitaria Lasallista.

mararamirez@lasallista.edu.co

Margarita Patiño Jaramillo

Ingeniera Química de la Universidad de Antioquia, Especialista en docencia Universitaria de la Universidad Cooperativa de Colombia sede Medellín, Especialista en Didáctica de las Ciencias de la Universidad Pontificia Bolivariana sede Medellín, Magíster en Educación, Profesor Asistente del Instituto Tecnológico Metropolitano ITM e investigadora del grupo GNOMON del ITM.

margaritapatino@itm.edu.co

Héctor Javier Herrera Mejía

Matemático de la Universidad de Antioquia, Magíster en Matemáticas Aplicadas de la Universidad EAFIT. Miembro del Instituto GEOGEBRA de Medellín. Profesor Asociado del Instituto Tecnológico Metropolitano ITM, investigador y líder del grupo GNOMON del ITM.

hectorherrera@itm.edu.co

César Augusto Ruiz Jaramillo

Especialista en Teleinformática de la Universidad Eafit, Ingeniero en Instrumentación y Control del Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid y docente Coordinador del Programa de Ingeniería Informática de la Corporación Universitaria Lasallista.

cesar.ruiz.jaramillo@gmail.com

Juan Guillermo Arango Arango

Ingeniero Civil de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín, Especialista en Didáctica de las Ciencias de la Universidad Pontificia Bolivariana sede Medellín, Magíster en Educación de la Universidad de Manizales, docente de cátedra del Instituto Tecnológico Metropolitano ITM e investigador del grupo GNOMON del ITM.

memo.arango@hotmail.com

Carlos Mario Restrepo Restrepo

Ingeniero Industrial de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín, Magíster en Ciencias- Física de la Universidad Nacional de Colombia. Miembro del Instituto GEOGEBRA de Medellín. Profesor Asociado del Instituto Tecnológico Metropolitano ITM e investigador del grupo GNOMON del ITM.

carlosrestrepo@itm.edu.co

Sergio Alberto Alarcón Vasco

Matemático de la Universidad de Antioquia, Magíster en Educación y Docencia de las Matemáticas de la Universidad de Antioquia, Profesor Asociado del Instituto Tecnológico Metropolitano ITM e investigador del grupo GNOMON del ITM.

sergioalarcon@itm.edu.co

Elkin Alberto Castrillón Jiménez

Ingeniero en Instrumentación y Control y Especialista en Ingeniería de Controles del Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid, Magíster en Gestión Energética Industrial, Especialista en Gestión Energética Industrial y Profesor Asistente del Instituto Tecnológico Metropolitano ITM e investigador del grupo GNOMON del ITM.

elkincastrillon@itm.edu.co

Carlos Alberto Rojas Hincapié

Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquía, Especialista en Diseño y Evaluación de Software Educativo de la Universidad de San Buenaventura - Sede Medellín, docente de cátedra del Instituto Tecnológico Metropolitano ITM e investigador del grupo GNOMON del ITM.

carojas72@gmail.com

TEXTOS ACADÉMICOS

CALCULO DIFERENCIAL
MEDIADO POR TIC Y VIDEOS

Fuentes tipográficas: Cambria para texto corrido,
en 12 puntos y títulos 17 puntos

Este libro electrónico es fruto del trabajo colaborativo entre docentes universitarios, que muestra herramientas de enseñanza y aprendizaje apoyadas en el uso de OVAS. Un texto diseñado para fomentar hábitos intelectuales en docentes y estudiantes que favorezcan el uso de las horas de trabajo independiente de los estudiantes y promueva su autonomía intelectual. Se busca favorecer procesos de autorregulación del aprendizaje del cálculo diferencial.

This e-book is the result of the collaborative work done among university teachers and it presents tools for learning and teaching based on the use of OVAS. This is a text designed for the promotion of academic habits among teachers and students to enhance the use of independent working time among students that will foster learning autonomy. The text seeks to promote processes of auto regulation of learning differential calculus.

FONDO EDITORIAL ITM

ISBN 978-958-5414-05-1