

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

DISEÑO DE UN EXPERIMENTO PARA EL DESARROLLO DE CORRELACIONES DE TRANSFERENCIA DE CALOR Y CAÍDA DE PRESIÓN EN INTERCAMBIADORES DE CALOR DE TUBO TORSIONADO HELICOIDAL

Daniel Felipe Pineda Granada C.C. 1020444993

Ingeniería Electromecánica

Juan Gonzalo Ardila Marín

INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO

Noviembre de 2014

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

RESUMEN

La calefacción de agua sanitaria es una necesidad actual en edificaciones, empresas del sector terciario, y residencias en general; esta realidad sumada al problema energético que enfrenta la humanidad hoy en día, llevan a los ingenieros y demás responsables de la operación y el mantenimiento de las empresas a estudiar el empleo de tecnologías mejoradas que permitan el uso eficiente de la energía. Los intercambiadores de calor de tubo torsionado han incursionado como alternativa comercial para la calefacción de piscinas y agua de consumo doméstico, pero no han sido investigados profundamente. El objetivo del presente proyecto fue diseñar un experimento que permita relacionar las variables que determinan la transferencia de calor y la caída de presión en intercambiadores de calor de tubo torsionado helicoidal. Se siguió la metodología convencional del diseño experimental que implicó establecer las variables, definir una hipótesis, identificar variables dependientes e independientes, identificar factores de ruido, dar valor a variables independientes, y planear un procedimiento de análisis. Del proyecto se obtuvo un derrotero detallado del protocolo a seguir para la implementación y ejecución del experimento y análisis de datos obtenidos, para el desarrollo de correlaciones que sirvan para el diseño y selección de un tipo innovador de intercambiadores de calor mejorados.

Palabras clave: Diseño experimental, pruebas de hipótesis, análisis de varianza, correlación, intercambiador de calor.

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

RECONOCIMIENTOS

Expreso mis más sinceros agradecimientos a Dios, a mi familia y a las personas que colaboraron con mi formación y su aporte con el desarrollo de mi trabajo de grado, quienes de una u otra forma brindaron su apoyo con mi proyecto académico.

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

TABLA DE CONTENIDO

1.	INTRODUCCIÓN	5
2.	ESTADO DEL ARTE	9
3.	MARCO TEÓRICO	19
3.1	Método Wilson Plots	19
3.2	Análisis de incertidumbre Kline y McClintock	22
3.2.1	Describiendo incertidumbres en experimentos de una sola muestra	22
3.2.2	Definición de términos	22
3.2.3	Distribución de la incertidumbre	23
3.2.4	Intervalo de incertidumbre en el resultado	24
4.	METODOLOGÍA.....	26
5.	RESULTADOS Y DISCUSIÓN.....	28
5.1	Selección del tipo de experimento	28
5.1.1	Tipos de experimentos	28
5.1.2	Experimento seleccionado	29
5.1.3	Descripción del experimento	30
5.2	Análisis de varianza	33
5.2.1	Notación de puntos	33
5.2.2	ANOVA.....	33
5.3	Método LSD (diferencia mínima significativa)	36
5.4	Regresión no lineal	37
5.4.1	Análisis de varianza	40
5.4.2	Coefficiente de correlación múltiple	43
5.4.3	Intervalos de confianza y predicción en regresión lineal múltiple.....	44
	REFERENCIAS	47

	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

1. INTRODUCCIÓN

La energía es un recurso natural limitado cuya generación en forma de calor tiene unos costos económicos y unos impactos ambientales de cierta envergadura, por lo que avanzar en su uso responsable contribuye al bienestar de todos. En este sentido, los gerentes de plantas industriales y de empresas terciarias, y en general, los responsables de procesos o servicios que implique la calefacción de agua, como profesionales encargados de la gestión y de la operación de los activos físicos y del buen funcionamiento de sus instalaciones, las empresas de mantenimiento, y el conjunto de usuarios, cada uno desde su ámbito profesional o de responsabilidad, constituyen agentes fundamentales en la estrategia colectiva de impulsar un uso más eficiente de la energía (García San José, 2008). La empresa local “E.S. Energía Solar Ltda.” cuenta con 30 años de experiencia ofreciendo sus servicios en proyectos de calentamiento de agua, climatización de piscinas, secado, bombas de calor y pisos radiantes. Sus propietarios se han interesado en el desarrollo de intercambiadores de calor de tubo espiral, fabricados mediante procesos de conformado por deformación plástica de metales y ensamble permanente por medio de unión soldada aplicados a tubos flexibles de cobre de ½” comerciales. “Energía Solar” se encuentra desde 2007 en el desarrollo de un dispositivo intercambiador de calor que permita calentar agua para un régimen de consumo residencial aprovechando las ventajas combinadas de su aplicación tradicional de intercambiadores de calor de tubo espiral, y por otro lado, de una adquisición tecnológica en el campo de colectores solares y aprovechamiento de radiación solar: tubos de vacío. La Figura 1 esquematiza el modelo realizado por el Ing. Juan Gonzalo Ardila Marín (Investigador Principal del proyecto en el cual se enmarca este trabajo de grado, y Director del mismo) para el análisis del sistema en estudio, dicho modelo no fue validado. Ahora están interesados en la aplicación de un producto innovador: intercambiador de calor de tubo de titanio torsionado y en hélice

para la climatización de piscinas usando bomba de calor con refrigerante R-134a. La Figura 2 ilustra el dispositivo de interés.

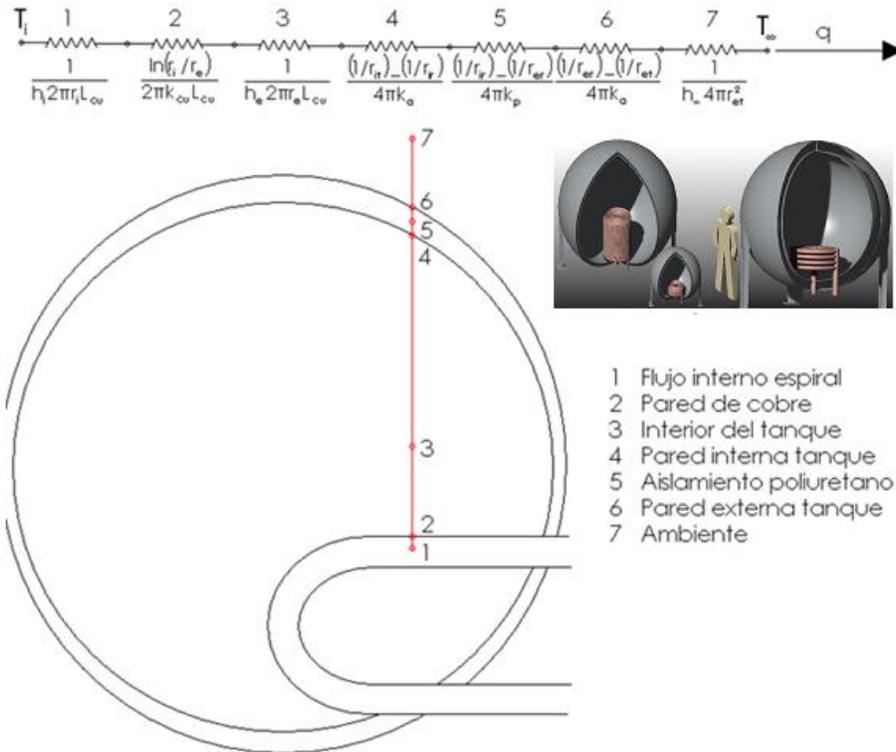


Figura 1. Esquema del modelo calentador de agua para consumo residencial. Aportado por el Director del Trabajo de Grado.

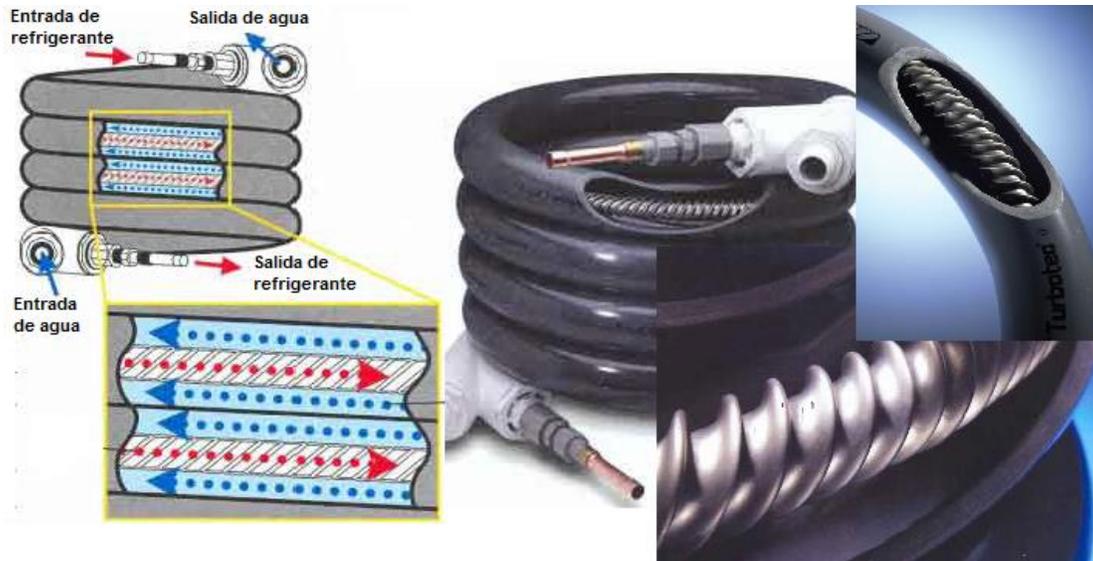


Figura 2. Intercambiador de tubo de titanio torsionado y en hélice. Adaptado de (Turbotec Products, Inc. , 2010)

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

Por lo anterior, en 2011 se dio inicio al proyecto de desarrollar correlaciones de transferencia de calor y caída de presión en intercambiadores de calor de tubo torsionado en espiral y hélice. Dichas correlaciones serían determinadas teóricamente mediante el desarrollo de un código computacional con ANSYS. Y posteriormente, en 2013, se dio inicio al proyecto de validar dichas correlaciones experimentalmente mediante el desarrollo de un banco de prueba que simule un circuito funcional realístico. En este proyecto es necesario proyectar un experimento que permita relacionar las variables que determinan la transferencia de calor y la caída de presión en intercambiadores de calor de tubo torsionado helicoidal, está es una fase fundamental para el desarrollo experimental de correlaciones.

Así que aunque Andrés Zachár en 2010 aborda el problema de incrementar aún más la transferencia de calor en tubos en hélice con técnicas pasivas como el torsionado o el tallado de hélices alrededor del tubo, lo hace de forma teórica y propone correlaciones numéricas, siendo este estudio lo más cercano a tubos torsionados disponible en la literatura actual (Zachár, 2010). La evaluación del estado del arte, discutida en el siguiente apartado, muestra la intensidad del trabajo investigativo, tanto numérico como experimental, alrededor de mejoras pasivas como el curvado de tubos, pero no se encuentra ni un solo estudio experimental sobre tubos con doble mejora (curvado y torsionado). Las correlaciones numéricas deben ser evaluadas en dispositivos experimentales similares a las aplicaciones reales que tendrán los intercambiadores de calor, o en lo posible, es necesario desarrollar correlaciones empíricas que validen los modelos numéricos y sirvan como herramientas para facilitar el diseño de aplicaciones de los intercambiadores e incentivar su fabricación, comercialización y uso en la industria local.

Por lo anterior, el presente proyecto se propuso diseñar un experimento que permita relacionar las variables que determinan la transferencia de calor y la caída de presión en intercambiadores de calor de tubo torsionado helicoidal. El trabajo se distribuyó en las siguientes fases: primero se establecieron las diferentes variables geométricas y de los

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

fluidos, de las que depende la transferencia de calor y la caída de presión en los intercambiadores de calor de tubo torsionado helicoidal y las relaciones que existen entre ellas; seguidamente se definió de manera clara la hipótesis que se deseaba comprobar; luego se identificaron las variables independientes que pueden quedar definidas según la bibliografía, y las variables dependientes que deben ser medidas en el montaje experimental; después se identificaron los posibles factores de ruido y causas de error para prever acciones de mitigación de sus efectos; posteriormente se decidieron los valores de las variables independientes que quedarán fijos en cada corrida del experimento y el número de repeticiones que se llevarán a cabo para medir las variables dependientes y formar la nube de datos; por último, se planeó el procedimiento de análisis de varianza de los datos recopilados y la interpretación de los resultados que se obtendrán con la ejecución del experimento.

En el siguiente capítulo se presentará el resultado de la revisión del estado del arte, donde podrá apreciarse los diferentes experimentos que han sido desarrollados para la obtención de correlaciones que caracterizan diferentes tipos de intercambiadores mejorados, evidenciando la falta de resultados sobre geometrías como la del presente estudio. El capítulo 3 define de manera detallada la metodología que se aplicó para el diseño experimental y las diferentes herramientas estadísticas que se aplicaron para dicho diseño y para el análisis de la nube de datos que se obtendrá con la ejecución del experimento. En el capítulo 4, titulado Resultados y Conclusiones, se presenta el informe que describe el diseño experimental y el algoritmo que permitirá el análisis de los datos obtenidos y la construcción de las correlaciones, además se discuten los pormenores que se presentaron durante el diseño experimental, llegando a las conclusiones más relevantes y algunas recomendaciones de trabajo futuro.

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

2. ESTADO DEL ARTE

Vimal Kumar, y otros, estudiaron la caída de presión y la transferencia de calor en intercambiadores de calor de tubos helicoidales concéntricos, su propósito fue determinar experimentalmente las variaciones hidrodinámicas y de transferencia de calor con caudales totalmente desarrollados para los tubos interior y exterior del intercambiador de calor. Se realizaron experimentos en condiciones de estado estacionario con agua como fluido de trabajo al interior y exterior. El caudal interno fue variado en un rango de 140 – 240 L/h para un caudal constante del lado externo. Fueron utilizados tres niveles del flujo externo: 1800, 2000, y 2500 L/h. Se registraron mediciones de temperatura desde los 300s cada diez segundos con fluctuaciones en la lectura de la temperatura de $\pm 0.15^{\circ}\text{C}$. Aunque los termopares tipo T tenían límites de error de $0,5^{\circ}\text{C}$, cuando se utilizan en agua común en estado estacionario las lecturas estuvieron dentro de $\pm 0.1^{\circ}\text{C}$. Todos los termopares fueron contruidos del mismo rollo de alambre, y por lo tanto la capacidad de repetición de las lecturas de temperatura era alta. Igualmente para el estudio de transferencia de calor en el tubo externo, el caudal interno fue mantenido constante en 240 L/h y la variación del caudal fue hecha en el anillo. En la entrada del tubo externo la temperatura del agua de enfriamiento fue de $26-28^{\circ}\text{C}$, y aumentaba de $4 - 5^{\circ}\text{C}$ a la salida. Durante los experimentos la temperatura ambiente era $27 - 28^{\circ}\text{C}$, por lo tanto, no había mucha pérdida de calor de la pared externa (Kumar, Saini, Sharma, & Nigam, 2006).

H. Shokouhmand, M. R. Salimpour, y otros, investigaron experimentalmente los intercambiadores de calor de coraza y tubo en espiral usando el método de “Wilson Plots”. El rango de operación de los parámetros se estableció entre $0.016 - 0.113 \text{ kg/s}$ para el flujo de agua al interior del tubo, $0.019 - 0.136 \text{ kg/s}$ para el flujo de agua a través de la coraza, $33.4 - 53.2^{\circ}\text{C}$ a la entrada del tubo, y $10.9 - 19.2^{\circ}\text{C}$ a la entrada de la coraza, se verificaron temperaturas de salida de $23.5 - 44.9^{\circ}\text{C}$ del tubo, y $14.6 - 37.3^{\circ}\text{C}$ de la

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

coraza. Como se puede verse hubo un extenso rango de caudales y se configuraron para flujo paralelo y para contra flujo. Las pruebas fueron realizadas para tres intercambiadores de calor de tubo en espiral con un total de 150 ejecuciones. El coeficiente global de transferencia de calor, U_o , fue calculado con los datos de temperatura y de caudal utilizando la siguiente ecuación:

$$U_o = \frac{\dot{Q}}{A_o LMTD} \quad (1)$$

Donde A_o es el área de la superficie exterior del tubo en espiral; \dot{Q} es la tasa de transferencia de calor; y $LMTD$ es la diferencia de temperatura media logarítmica, con base a la diferencia de temperatura al interior, ΔT_1 y la diferencia de temperatura al exterior, ΔT_2 . Calculada utilizando la siguiente ecuación:

$$LMTD = \frac{(\Delta T_2 - \Delta T_1)}{\ln(\Delta T_2 / \Delta T_1)} \quad (2)$$

Los coeficientes de transferencia de calor para la coraza, h_o , y para el tubo, h_i , fueron calculados utilizando el método de “Wilson Plots”, los coeficientes de transferencia de calor pueden ser calculados con base a la diferencia de temperatura global y la tasa de transferencia de calor. El método de “Wilson Plots” se genera al calcular los coeficientes globales de transferencia de calor para un número de ensayos donde un fluido se mantiene constante y el otro es variado. En este trabajo, el flujo en el tubo en espiral se mantuvo constante y el flujo a través de la coraza fue variado para cinco diferentes caudales. El coeficiente global de transferencia de calor puede ser relacionado con los coeficientes de transferencia de calor interior y exterior mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{U_o} = \frac{A_o}{A_i h_i} + \frac{A_o \ln(d_o/d_i)}{2\pi k L} + \frac{1}{h_o} \quad (3)$$

Donde d_i y d_o son los diámetros interior y exterior del tubo, respectivamente; k es el coeficiente de conductividad térmica de la pared; y L es la longitud del intercambiador de calor. Después de calcular los coeficientes globales, las únicas variables desconocidas en la ecuación son los coeficientes de transferencia de calor. Al mantener constante el flujo másico al interior del tubo, entonces se puede asumir que el coeficiente de transferencia

	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

de calor al interior es constante. El coeficiente de transferencia de calor exterior se asume que se comporta de la siguiente manera con la velocidad del flujo en la coraza, v_o

$$h_o = C v_o^n \quad (4)$$

Sustituyendo en la ecuación de resistencias, se determinaron los valores para C y n con un ajuste de curvas. Los coeficientes de transferencia de calor interior y exterior fueron entonces calculados. Este proceso fue repetido para cada configuración, tamaño de bobina y tasa de flujo interno. Esto resultó en 30 repeticiones del método de “Wilson Plots”, y 30 coeficientes de transferencia de calor internos. Para cada ejecución del método de “Wilson Plots”, fueron calculados 5 coeficientes de transferencia de calor exteriores. En total fueron calculados 150 coeficientes de transferencia de calor exteriores. El análisis de incertidumbre fue realizado por el método propuesto por Schultz y Cole para todos los experimentos, y fue encontrado que el error experimental esperado estaba en $\pm 8\%$ para todas las corridas (Shokouhmand, Salimpour, & Akhavan-Behabadi, 2008).

J.S. Jayakumar, y otros, estimaron la transferencia de calor, numérica y experimentalmente, de intercambiadores de calor de tubo en bobina helicoidal. Tomaron las medidas solamente después de que las temperaturas lograrán valores constantes. Se realizaron experimentos para cinco diferentes caudales a través de la bobina y para tres diferentes valores de temperatura en la entrada. Durante el transcurso de cada conjunto de experimentos, la tasa de flujo a través de la carcasa se mantuvo constante, garantizando un coeficiente de transferencia de calor constante en la parte exterior. Una vez que se logró un estado estacionario, se observaron los valores de índices de corriente de los líquidos, las temperaturas en la entrada y la salida de ambos fluidos, y la entrada de energía al calentador y a la bomba (Jayakumar, Mahajani, Mandal, Vijayan, & Bhoi, 2008).

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

N. Ghorbani, y otros, estudiaron experimentalmente la transferencia de calor por convección en intercambiadores de calor de tubo helicoidal en posición vertical, las Figuras 3 y 4 muestran el aparato utilizado para los experimentos con el intercambiador de calor. Se utilizó agua como fluido de trabajo, pasando a través de seis calentadores eléctricos antes de entrar al tubo. Una válvula se instaló en la entrada del intercambiador de calor para controlar la tasa de flujo y el agua fría se tomó de la red urbana para circular por la coraza. La tasa de flujo fue medida mediante el uso de un cilindro de medición calibrado y un cronometro posicionado en la salida del intercambiador de calor. La temperatura del agua de la entrada del tubo fue controlada por un termostato. Se evaluaron cuatro temperaturas: 50, 60, 70 and 80°C, la temperatura de entrada de la coraza fue la temperatura del agua del grifo. Estas temperaturas pretenden simular la temperatura de salida de un colector solar de placa plana. La tasa de flujo másico tanto para la coraza como para el tubo fue 0.03, 0.05, 0.09, y 0.113 kg/s. Las especificaciones del intercambiador de calor se muestran en la Tabla 1 (Ghorbani, Taherian, Gorji, & Mirgolbabaie, 2010).

Tabla 1. Características geométricas del intercambiador de calor estudiado por N. Ghorbani. Adaptado de (Ghorbani, Taherian, Gorji, & Mirgolbabaie, 2010)

No.	$D_{t,o}$ (mm)	$D_{t,i}$ (mm)	D_c (mm)	$D_{s,i}$ (mm)	$D_{s,o}$ (mm)	H (mm)	ρ (mm)	N
1	9.47	7.77	125.71	88.9	157	383	16.47	23.25
2	12.59	10.82	128.31	88.9	157	383	16.47	23.25
3	12.59	10.82	128.31	88.9	157	383	23.57	16.25

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14



Figura 3 Banco experimental. Tomado de (Ghorbani, Taherian, Gorji, & Mirgolbabaee, 2010)

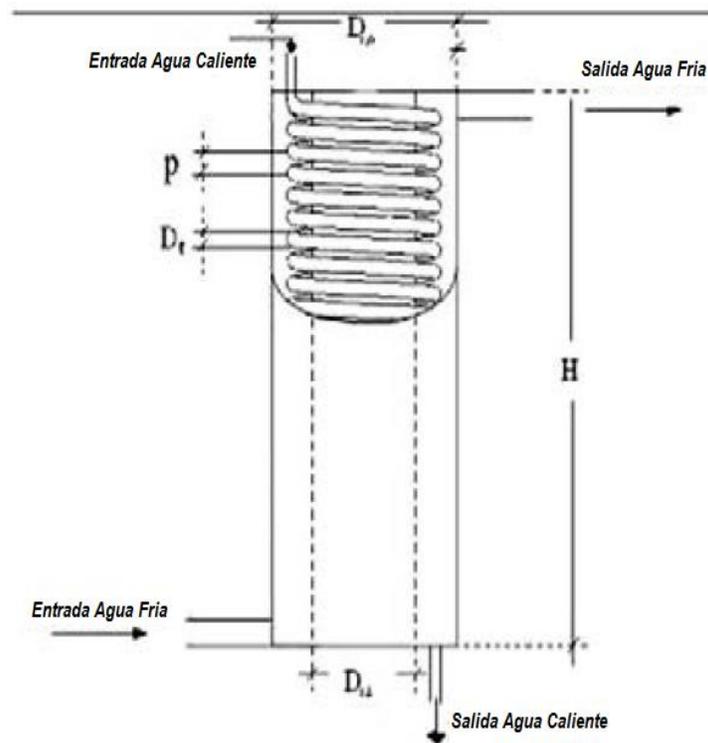


Figura 4 Diagrama esquemático del intercambiador de calor. Adaptado de (Ghorbani, Taherian, Gorji, & Mirgolbabaee, 2010)

La bobina fue formada cuidadosamente usando tubo recto de cobre OD de 9.52 y 12.5 mm. Se tuvo cuidado para localizar la bobina en el centro del espacio circular entre la parte interior y exterior de la coraza. Las temperaturas fueron medidas utilizando cuatro termopares tipo K localizados a igual distancia con el fin de medir la superficie del tubo y la temperatura del fluido. Otros cuatro termopares fueron localizados en las entradas y

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

salidas del intercambiador de calor para medir las temperaturas de los fluidos. Un dispositivo de adquisición de datos hecho por Advantech modelo USB 4718 que tiene una capacidad para ocho canales de entradas analógicas en conexión con un PC fue usado para registrar todas las temperaturas medidas. Todas las pruebas fueron realizadas bajo condiciones de estado estacionario. Un código de Visual Basic fue creado para recuperar y almacenar los datos de temperatura y desarrollar los cálculos. Los valores fueron medidos aproximadamente en un periodo de 4 minutos (Ghorbani, Taherian, Gorji, & Mirgolbabaie, 2010).

Para la determinación de la tasa de flujo de calor, se asumió que la resistencia térmica de la pared del tubo de cobre era insignificante. La temperatura de la superficie de la bobina fue tomada como igual a la temperatura del agua al interior de la bobina en la misma posición con el fin de calcular el flujo de calor local. De acuerdo con la investigación de Srinivasan (Srinivasan, Nadapurkar, & Holland, 1970), el número de Reynolds crítico para el flujo en la tubería helicoidal, el cual determina si el flujo es laminar o turbulento, está relacionado con la siguiente curva (Ghorbani, Taherian, Gorji, & Mirgolbabaie, 2010):

$$Re_{crit.} = 2100[1 + 12(d/D)^{0.5}] \quad (5)$$

Los valores de la razón de transferencia de calor y h_o , y los valores de los números de *Reynolds*, *Rayleigh* y *Nusselt*, fueron calculados utilizando las siguientes ecuaciones. Todas las propiedades fueron promediadas sobre la entrada y la salida del fluido en cada lado (Ghorbani, Taherian, Gorji, & Mirgolbabaie, 2010):

$$Q_h = \dot{m}_c c p_c (T_{h,i} - T_{h,o}) \quad (6)$$

$$\frac{1}{h_o} = \frac{1}{U} - \frac{1}{h_i} \quad (7)$$

$$Re_s = \frac{V_s L}{\nu} \quad (8)$$

$$Ra_s = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\alpha \nu} \quad (9)$$

$$Nu = \frac{h_o d}{k} \quad (10)$$

Dónde: Q_h es la razón de transferencia de calor del agua caliente, \dot{m}_c es el flujo másico en la bobina, $T_{h,i}$ y $T_{h,o}$ son las temperaturas de entrada y salida del agua caliente,

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

respectivamente, $T_{c,i}$ y $T_{c,o}$ son las temperaturas de entrada y salida en la bobina, respectivamente, Re es el número de Reynolds, V_s es la velocidad, L es la longitud total de la bobina, Ra es el número de Rayleigh, g es la aceleración gravitacional, β es el coeficiente de expansión térmica volumétrica, α es el coeficiente de difusividad térmica, Nu es el número de Nusselt, k es el coeficiente de conductividad térmica.

Como todo informe de investigación experimental, el análisis de la incertidumbre experimental debe ser tratado de forma adecuada. El método propuesto por Kline y McClintock parece ser ampliamente aceptado por los autores de los documentos científicos. La incertidumbre en los parámetros hidráulicos y de transferencia de calor fue evaluada con base en el método antes mencionado. Los resultados son reportados en la Tabla 2.

Tabla 2. Incertidumbres experimentales de parámetros importantes. Adaptado de (Ghorbani, Taherian, Gorji, & Mirgolbabaei, 2010)

Parámetro	Incertidumbre (%)	Parámetro	Incertidumbre (%)
$LMTD$	5.8	\dot{m}_c	1
U	9.5	\dot{m}_s	1.6
Nu_i	1	Re_{Deq}	1.74
Nu_{Deq}	6.6	Q	2.47
St	7.1	h_i	1.14
NTU	11.97	h_o	6.43
ε'	1	ε	1

Conté & Peng, investigaron numérica y experimentalmente el rendimiento de la transferencia de calor de intercambiadores de bobina rectangular, la Figura 5 muestra un esquema del montaje experimental compuesto principalmente por una bomba, un depósito y un ducto de agua, que se empleó como fluido de trabajo. El circuito cerrado de agua fue hecho en acrílico transparente resistente a la abrasión para facilitar la visualización. La bomba es conducida por un motor de 245W, 2.35A, 230V, 6 μ F y 1320rpm. Las características del calentador son 220V, 50Hz y 1000W con una temperatura

	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

de trabajo desde 5 hasta 95°C. Las dimensiones del interior de la sección de prueba son 100mm de ancho por 100mm de alto por 400mm de largo, lo cual es mucho más largo que el intercambiador de calor. Debido a la dificultad experimental, la prueba no pudo ser realizada como en la simulación, y consecuentemente, solo algunas de las características importantes del flujo y de la transferencia de calor fueron comparadas. Antes del experimento el agua fue calentada hasta la temperatura deseada en el calentador 1 y entonces la bomba 2 fue usada para conducir el agua caliente hacia el intercambiador de calor 5. Desde el intercambiador, el agua fluyó hasta el calentador 1. Para el lado de la coraza, el agua fría fluyó desde el depósito 3 hacia el ducto de agua 4 y, las válvulas 6 fueron utilizadas para el ajuste y control de los caudales deseados. Las temperaturas fueron medidas con un termopar calibrado teniendo 0.1° de incertidumbre. Las posiciones de los termopares utilizados para medir la temperatura son mostrados en la figura 5b donde las mediciones fueron hechas en posiciones equidistantes aguas arriba y aguas abajo del intercambiador de calor. Por lo tanto, los termopares fueron localizados a 75mm desde el intercambiador, con un punto de medida aguas arriba (o antes del intercambiador) y tres puntos de medición aguas abajo, como se muestra en la figura 5b. Las mediciones de temperatura fueron recolectadas y grabadas en un computador personal. Las dimensiones del cubo que abarca el intercambiador de calor usado para el experimento son 32X35X55mm. También, el intercambiador está compuesto con una bobina interior y una exterior con el mismo diámetro interior del tubo $d=1.5$ mm y sección transversal circular. Sin embargo, la bobina exterior y la bobina interior tienen el mismo número de tubos rectos y codos: 9 tubos rectos y 8 codos, cada uno; ver Figura 5c (Conte & Peng, 2009).

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

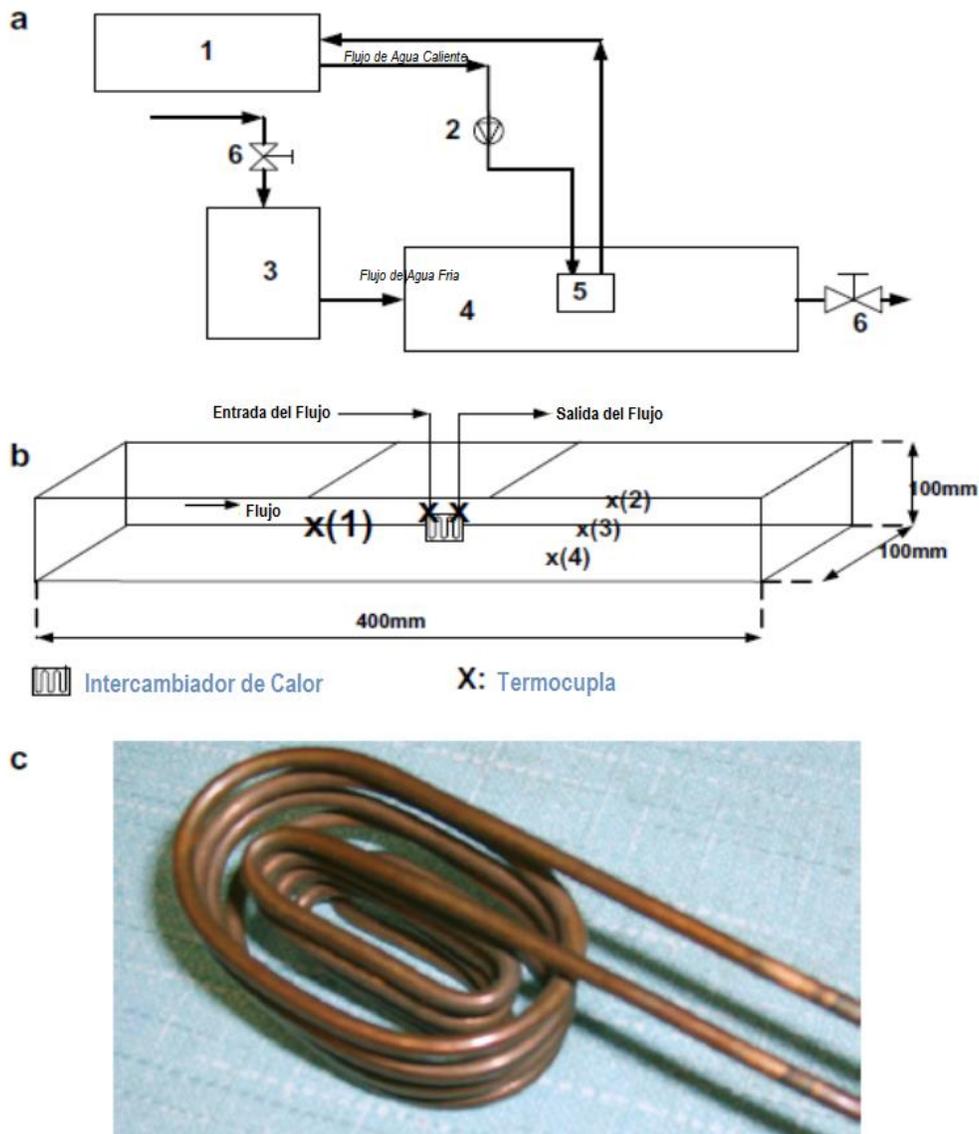


Figura 5 Montaje experimental. (a) Diagrama esquemático. (b) Sección de prueba y posición de termocuplas. (c) Intercambiador de calor. Adaptado de (Conte & Peng, 2009)

En el presente trabajo experimental el coeficiente de transferencia de calor y la razón de transferencia fueron determinados con base en las mediciones de temperatura. El intercambio de calor entre el agua caliente fluyendo en el intercambiador y el agua fría fluyendo a través del ducto de agua fue calculado con las ecuaciones de flujo. La transferencia de calor en el tubo:

$$Q = \dot{m}_t C p_t (t_{in} - t_{out}) \quad (11)$$

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

Dónde: Q es la transferencia de calor, \dot{m}_t es el flujo másico en el tubo, Cp_t es el calor específico en el tubo, t_{in} y t_{out} son las temperaturas de entrada y salida, respectivamente.

La transferencia de calor en la coraza:

$$Q = \dot{m}_s Cp_s (t_{in} - t_{out}) \quad (12)$$

Dónde: \dot{m}_s es el flujo másico en la coraza, Cp_s es el calor específico en la coraza.

La razón de flujo másico se estimó mediante el registro del flujo dentro de un cilindro graduado (750ml de volumen interior) desde el exterior del intercambiador y desde la válvula de aguas abajo del ducto de agua para la coraza. Las propiedades físicas fueron evaluadas con la temperatura media, o $T_m = \frac{T_{in} + T_{out}}{2}$. El coeficiente de transferencia de calor fue calculado con (1). La transferencia de calor global en la superficie fue calculada con base al diámetro del tubo y a la longitud extendida de la tubería, $A_{total} = \pi L d$. La longitud extendida de la tubería fue cerca de $L = 1\text{m}$; así, $A_{total} = 0.0047\text{m}^2$ o $A_{total} = 4710\text{mm}^2$. La diferencia de temperatura media logarítmica fue determinada con (2) (Conte & Peng, 2009).

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

3. MARCO TEÓRICO

3.1 Método Wilson Plots

El método de Wilson Plots fue desarrollado por E.E. Wilson en 1915 para evaluar los coeficientes de convección en los condensadores de coraza y tubo para el caso de una condensación de vapor exterior por medio del flujo de un líquido frío al interior. Esto se hace con base a la separación de la resistencia térmica global, en la resistencia térmica convectiva al interior y las restantes resistencias térmicas que participan en el proceso de transferencia de calor. La resistencia térmica global del proceso de condensación en un condensador de coraza y tubo (R_{OV}) puede ser expresada como la suma de tres resistencias térmicas que corresponden a: la de convección interna (R_i), la de la pared del tubo (R_w) y la de convección exterior (R_o), como se muestra en la siguiente ecuación:

$$R_{OV} = R_i + R_w + R_o \quad (13)$$

Por facilidad, las resistencias térmicas debidas a las incrustaciones del fluido en la ecuación anterior, son omitidas. Utilizando la expresión apropiada para las resistencias térmicas mostradas en la ecuación anterior, la resistencia térmica global puede ser reescrita como:

$$R_{OV} = \frac{1}{h_i A_i} + \frac{\ln(d_o/d_i)}{2\pi k_w L_w} + \frac{1}{h_o A_o} \quad (14)$$

Donde h_i y h_o son los coeficientes de convección interno y externo, respectivamente, d_i y d_o son los diámetros interior y exterior del tubo, respectivamente, k_w es la conductividad térmica del tubo, L_w es la longitud del tubo, A_i y A_o son las áreas interior y exterior del tubo, respectivamente.

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

Por otra parte, la resistencia térmica global puede ser concebida en función del coeficiente global de transferencia de calor, refiriéndose a las superficies interior y exterior del tubo y las correspondientes áreas. Respecto a esto, en la ecuación siguiente, la resistencia térmica global es expresada como función del coeficiente global de transferencia de calor respecto a las superficies interior y exterior ($U_{i/o}$) y las áreas superficiales interior y exterior ($A_{i/o}$).

$$R_{OV} = \frac{1}{U_{i/o}A_{i/o}} \quad (15)$$

Teniendo en cuenta las condiciones específicas de un condensador de coraza y tubo y las ecuaciones indicadas anteriormente, Wilson teorizo que si el flujo másico del líquido de refrigeración fuera modificado, entonces el cambio en la resistencia térmica global sería principalmente debido a la variación del coeficiente de convección al interior del tubo. Mientras que las demás resistencias térmicas restantes se mantuvieron casi constantes. Por lo tanto, como se indica en la siguiente ecuación, la resistencia térmica del exterior del tubo y la de la pared del tubo podrían ser consideradas constantes.

$$R_w + R_o = C_1 \quad (16)$$

Wilson determino que para el caso de un líquido con flujo turbulento plenamente desarrollado al interior de un tubo circular, el coeficiente de convección era proporcional a una potencia de la velocidad reducida (v_r) la cual representa la variación de las propiedades del fluido y el diámetro del tubo. De este modo, el coeficiente de convección sería escrito de la siguiente manera:

$$h_i = C_2 v_r^n \quad (17)$$

Donde C_2 es una constante, v_r es la velocidad reducida del fluido y n es un exponente de la velocidad. Entonces, la resistencia térmica de convección correspondiente al flujo al interior del tubo es proporcional a $1/v_r^n$. Además, al combinar las ecuaciones (13), (16) y

	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

(17), la resistencia térmica global resulta ser una función lineal de $1/v_r^n$; esto es representado en la siguiente gráfica:

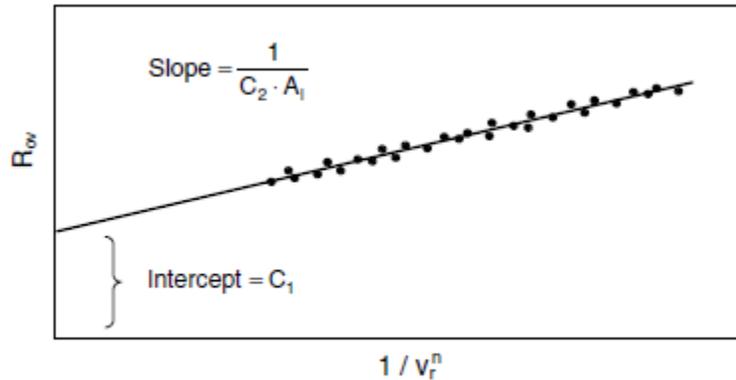


Fig. 1. Original Wilson plot.

Figura 6

Una inspección de correlación indica que C_1 es el intercepto y $1/(C_2 A_i)$ es la pendiente de la línea recta, así:

$$R_{OV} = \frac{1}{C_2 A_i} * \frac{1}{v_r^n} + C_1 \quad (18)$$

Por otra parte, la resistencia térmica global y la velocidad del líquido de refrigeración pudieron ser obtenidas experimentalmente midiendo la temperatura de entrada ($T_{1,in}$), la temperatura de salida ($T_{1,out}$) y la temperatura del vapor de condensación (T_v) a diversos flujos máscicos (\dot{m}_1) del líquido refrigerante bajo un flujo turbulento plenamente desarrollado. Entonces, para cada conjunto de datos experimentales correspondientes a cada velocidad de flujo máscico, la resistencia térmica global es la razón entre la diferencia de temperatura media logarítmica de los fluidos ($LMTD$) y el flujo de transferencia de calor entre ellos, como se muestra en la siguiente ecuación, el flujo de calor es determinado a través del cambio en la entalpia del líquido refrigerante como se muestra:

$$R_{OV} = \frac{LMTD}{\dot{m}_1 c_{p1} (T_{1,out} - T_{1,in})} \quad (19)$$

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

Por lo tanto, si un valor del exponente n de la velocidad en la ecuación es asumido, entonces el valor experimental de la resistencia térmica global puede ser representado como una función lineal de los valores experimentales de $1/v_r^n$. Desde aquí, la ecuación de la línea recta que se ajusta a los datos experimentales puede ser deducida aplicando regresión lineal simple. Entonces los valores de las constantes C_1 y C_2 son calculados con la ecuación (18) como se indicó en la figura 1. Una vez que estas constantes son determinadas, entonces los coeficientes de convección externa e interna para un flujo másico dado pueden ser evaluados mediante la combinación de las ecuaciones (17) y (20).

$$h_o = \frac{1}{(C_1 - R_w)A_o} \quad (20)$$

3.2 Análisis de incertidumbre Kline y McClintock

3.2.1 Describiendo incertidumbres en experimentos de una sola muestra

Quien utilice resultados de un experimento debe preguntarse antes o después, “¿Qué tan seguros son esos resultados?, ¿De cuántas cifras pueden estos depender?” En muchos casos los experimentos tratan de eliminar todos los errores desde sus resultados, pero se sabe desde la experiencia que esta meta es inalcanzable. Por lo tanto, el experimentador debe proveer al lector una medición honesta de la confiabilidad de los resultados.

3.2.2 Definición de términos

Antes de continuar, se definirán ciertos términos de mucho cuidado.

Incetidumbre: para una sola observación, el error o la diferencia entre el valor real y el valor observado, es un número fijo; pero la incertidumbre, o lo que se cree puede ser el error, puede variar considerablemente dependiendo de circunstancias particulares de la observación.

Variable: medida observada directamente en el laboratorio, opuesto a *Resultado*, el cual es obtenido haciendo correcciones o cálculos con los valores registrados de las variables.

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

Los valores registrados de las variables serán llamados *Datos*. En pocos casos, por supuesto, los resultados serán los mismos que los datos.

Propagación de la incertidumbre es la manera en la cual las incertidumbres en las variables afectan la incertidumbre en los resultados. Los términos desviación estándar, media, y función distribución de frecuencia serán usados de definiciones estadísticas aceptadas.

3.2.3 Distribución de la incertidumbre

Con el fin de llegar a un método racional para describir la incertidumbre en las variables, es necesario discutir el origen y naturaleza de las incertidumbres. Hay muchos tipos de errores los cuales pueden contribuir a la incertidumbre en cada variable. Una clasificación útil de estos errores es la siguiente: errores accidentales, errores fijos, y equivocaciones.

Los autores creen que una buena forma de describir la incertidumbre en cada variable es especificar la media de las lecturas y un intervalo de incertidumbre con base en unas probabilidades específicas. La media se representa como m (media aritmética de los valores observados), el intervalo de incertidumbre se denota como w , y las probabilidades como b , esto es:

$$m \pm w, (b \text{ a } 1) \quad (21)$$

Por ejemplo: $Presion = 50.2 \pm 0.5 \text{ psia } (20 \text{ a } 1)$ quiere decir que el mejor valor para la presión se cree que esta en 50.2 y las probabilidades son 20 a 1 de que el valor real se encuentre dentro de $\pm 0.5 \text{ psia}$ de esta estimación. El intervalo de incertidumbre, el cual se denotó como w , no es una variable pero si un valor fijo seleccionado de tal manera que el experimentador estaría dispuesto a apostar $b \text{ a } 1$ que el error es menos que w .

La determinación del valor del intervalo de incertidumbre con base en las probabilidades dadas es uno de los trabajos del experimentador. Como se ha notado, al menos algunos de esos intervalos tendrán que ser con base en estimaciones más que a experimentos, y las estimaciones pueden ser no mayores que ± 50 por ciento.

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

3.2.4 Intervalo de incertidumbre en el resultado

Se permite al resultado R ser una función de n variables independientes, v_1, v_2, \dots, v_n

$$R = R(v_1, v_2, \dots, v_n) \quad (22)$$

Para pequeñas variaciones en las variables, esta relación puede ser expresada en forma lineal como el diferencial total:

$$dR = \frac{\partial R}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial R}{\partial v_2} dv_2 + \dots + \frac{\partial R}{\partial v_n} dv_n \quad (23)$$

Las incertidumbres en las variables v_i son representadas completamente como una distribución de incertidumbre pero pueden ser adecuadamente descritas por un intervalo de incertidumbre w_i con base en ciertas probabilidades. Por lo tanto, debemos examinar cómo encontrar el intervalo de incertidumbre para el resultado w_R con base en esencialmente las mismas probabilidades que en los intervalos para cada una de las variables. Ciertos teoremas de estadística acerca de la forma en la cual combinar distribuciones de frecuencia, serán útiles en la búsqueda de un valor razonable para w_R .

Teorema 1: Si R es una función lineal de n variables independientes, y si la máxima desviación de la i -ésima variable de su media es $(\pm dv_i)_{max}$ entonces la máxima desviación de R del valor de su media está dado por:

$$dR_{max} = \left| \frac{\partial R}{\partial v_1} dv_{1_{max}} \right| + \left| \frac{\partial R}{\partial v_2} dv_{2_{max}} \right| + \dots + \left| \frac{\partial R}{\partial v_n} dv_{n_{max}} \right| \quad (24)$$

La Ec. (24) puede ser usada como una aproximación para calcular el intervalo de incertidumbre en el resultado simplemente sustituyendo w_i por v_i . Así:

$$w_R = \left| \frac{\partial R}{\partial v_1} w_1 \right| + \left| \frac{\partial R}{\partial v_2} w_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial R}{\partial v_n} w_n \right| \quad (25)$$

Esta ecuación será referida como una ecuación lineal. Si ésta es empleada, las probabilidades en el intervalo de incertidumbre en el resultado serán mucho mayores que las probabilidades usadas en las variables. Esto es por el hecho de que los errores en cada

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

variable pueden tener un rango de valores, y es poco probable que todos ellos tuvieran los valores más adversos al mismo tiempo.

Teorema 2: Si R es una función lineal de n variables independientes, cada una de las cuales está distribuida con una desviación estándar σ_i , entonces la desviación estándar de R esta dada por:

$$\sigma_R = \left[\left(\frac{\partial R}{\partial v_1} \right)^2 \sigma^2_{1} + \left(\frac{\partial R}{\partial v_2} \right)^2 \sigma^2_{2} + \dots + \left(\frac{\partial R}{\partial v_n} \right)^2 \sigma^2_{n} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

Hemos visto, sin embargo, que la mejor medida de la incertidumbre no es ni el valor máximo ni la desviación estándar, pero algunos intervalos con base en ciertas probabilidades. Para el caso especial en el cual las variables están distribuidas normalmente la distribución del resultado también será normal, y el siguiente teorema aplica:

Teorema 3: Si R es una función lineal de n variables independientes, cada una de las cuales esta normalmente distribuida, entonces la relación entre el intervalo para las variables w_i , y el intervalo para el resultado w_R , lo que da las mismas probabilidades para cada una de las variables y para el resultado es:

$$w_R = \left[\left(\frac{\partial R}{\partial v_1} w_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial v_2} w_2 \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial R}{\partial v_n} w_n \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (27)$$

La Ec. (27) podría ser utilizada directamente como una aproximación para calcular el intervalo de incertidumbre en el resultado.

	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

4. METODOLOGÍA

Las variables geométricas y de los fluidos que se necesitaron establecer, fueron determinadas a partir del análisis de publicaciones en bibliografía científica, investigaciones realizadas, artículos y demás material escrito cuya información contenida fué precisa y acertada con respecto a las medidas y valores que estas deben tener, y a partir de las cuales se han establecido posibles correlaciones entre estas variables.

A partir de las correlaciones encontradas en las publicaciones científicas consultadas, se verificaron cuáles parámetros adimensionales se emplean para caracterizar la transferencia de calor, la caída de presión y el flujo a través de un intercambiador de calor de tubo torsionado helicoidal, y con esto se logró direccionar hacia un diseño de experimento el cual permitiera comprobar la hipótesis de que dichos parámetros si se correlacionan.

La identificación de las variables a intervenir se hizo a partir del análisis de material bibliográfico, mediante el cual se logró ver de forma puntual y organizada las diferentes correlaciones que existen entre las variables a tener en cuenta en el montaje experimental. De esta manera, se pudo establecer la cantidad de variables dependientes e independientes, y además sirvió de ayuda para identificar los recursos a utilizar en un futuro diseño de banco experimental.

La identificación de los distintos factores de ruido o causas de error se hizo con base a bibliografía científica, analizando experimentos realizados, artículos y demás material relacionado de manera directa con el experimento que se llevará a cabo, también se analizó la futura situación experimental y se identificaron estos posibles factores, y según su relevancia y las posibilidades técnicas, la decisión que se adoptó fué esperar que sus efectos se contrarresten en las repeticiones y se consideró que su influencia era bastante limitada.

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

La metodología de análisis a seguir se determinó luego de la identificación clara de las variables dependientes, independientes y de ruido; y de la relación que se quiere lograr con estas. Posteriormente se hizo uso de material bibliográfico estadístico con el cual se pudo determinar el diseño adecuado para el experimento que se llevaría a cabo, escogiendo entre diseño completamente al azar, diseños factoriales, por bloques, etc. Y para alcanzar una correcta interpretación para los resultados que se obtendrán, se estudiaron la inferencia estadística, las pruebas de hipótesis, los intervalos de confianza, la regresión lineal, la regresión lineal multivariada, la regresión potencial para el establecimiento de las correlaciones (producto del experimento), y los métodos estadísticos del área específica, como Wilson Plots, o el análisis de incertidumbre de Kline y McClintock.

La definición de los valores fijos o niveles en que se establecerán las variables independientes, y la cantidad de réplicas o repeticiones que se llevarán a cabo para medir las variables dependientes, se determinó según el tipo de experimento o metodología a seguir ya definida a partir de la consulta en material bibliográfico estadístico.

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

5. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

5.1 Selección del tipo de experimento

5.1.1 Tipos de experimentos

A nivel industrial y académico se ha hecho frecuente el uso de experimentos como herramientas de prueba, haciendo usos de estos al momento de querer comprobar determinadas ideas o hipótesis en investigación, o cuando simplemente se desea mejorar determinado proceso o producto en fabricación. En muchas ocasiones estos experimentos se llevan a cabo con base al ensayo y error, dejando de lado los procedimientos con los cuales se garantiza un correcto análisis de los datos experimentales.

El diseño estadístico de experimentos es una forma organizada de realizar pruebas, asignando una metodología a seguir la cual permita alcanzar resultados, que al ser analizados estadísticamente, puedan proporcionar información objetiva para la solución a los interrogantes planteados.

Estos diseños se pueden clasificar según sean los objetivos del experimento, el número de factores a estudiar, el número de niveles en los cuales se desea medir estos factores, los efectos en la respuesta, el costo, el tiempo y la precisión del experimento.

Según estos parámetros los diseños experimentales se pueden clasificar en:

1. Diseños de un solo factor, este tipo de diseños se utilizan cuando se tiene control sobre un factor, y se hace necesaria la comparación de este en dos o más tratamientos diferentes. Dentro de estos diseños se tienen los diseños completamente al azar, el diseño de bloques completamente al azar y diseño de cuadros latino y grecolatino.
2. Diseños para estudiar el efecto de varios factores sobre una o más variables de respuesta, entre estos se encuentran los diseños factoriales 2k, 3k y diseños factoriales fraccionados 2k-p.
3. Diseños para la optimización de procesos, estos se pueden dividir en dos grupos, el primero son diseños para el modelo de primer orden, en los cuales se encuentran los

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

diseños factoriales 2k y 2k-p, diseño de Plakett-Burman y diseño simplex. El segundo grupo son los diseños para el modelo de segundo orden, en este se destacan el diseño de composición central, diseño de Box-Behnken y los diseños factoriales 3k y 3k-p.

4. Diseños robustos, estos son experimentos en los cuales existen factores de ruido a los cuales se les busca mitigar de manera indirecta, entre estos diseños se encuentran los arreglos ortogonales y los diseños con arreglos interno y externo.
5. Diseños de mezclas, en estos experimentos los factores que se deben tener en cuenta son componentes o ingredientes de una mezcla, entre estos se tiene el diseño simplex-reticular, diseño simplex con centroide, diseño con restricciones y el diseño axial.

5.1.2 Experimento seleccionado

La metodología propuesta para llevar a cabo la ejecución del experimento, ha sido consultada en material bibliográfico estadístico, mediante el cual se ha podido determinar el diseño de experimento más adecuado para los requerimientos que previamente hemos definido. Esta metodología escogida fue la de un diseño completamente al azar, dado que los procedimientos que se llevaran a cabo en el intercambiador no son especiales.

La implementación de un diseño completamente al azar se hace necesaria cuando se tiene control sobre un solo factor, pero se requiere comparar dos o más tratamientos. Para el experimento que se llevará a cabo hemos definido el control sobre el flujo másico, el cual será nuestra única variable a controlar y será variado en diez niveles diferentes, definidos previamente y que serán agrupados en flujo laminar, flujo transicional y flujo turbulento, dependiendo del parámetro adimensional de Reynolds. Con estas variaciones se lograrán cambios de presión y de temperatura en los flujos, las cuales serán nuestras variables a medir en cada caso.

El diseño completamente al azar es el más simple de todos los diseños que se utilizan para comparar dos o más tratamientos, dado que sólo se consideran dos fuentes de variabilidad: los tratamientos y el error aleatorio.

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

A este diseño se le denomina completamente al azar dado que todas las corridas experimentales se realizan en orden aleatorio completo. El fin de este es mitigar efectos ambientales, temporales y/o de ruido, para que se repartan de manera equitativa en los tratamientos. Existen diferentes métodos para realizar esta aleatorización, se ha escogido un método¹ el cual consiste en lo siguiente: supongamos que se tienen 15 unidades experimentales homogéneas, con las cuales se realizara un diseño completamente al azar con 3 niveles o tratamientos y a su vez cada uno con 5 réplicas. Procedemos a enumerar cada unidad experimental con los números del 1 hasta 15. Posteriormente se marcan pequeños papeles en blanco con los números del 1 al 15 y se meten dentro de una bolsa. Se debe seleccionar aleatoriamente un papel y marcarlo (por la parte contraria a donde tiene el número anteriormente asignado) con una etiqueta 1-1, este papel se debe dejar por fuera de la bolsa, luego procedemos a sacar otro papel y ahora lo marcamos con la etiqueta 1-2, dejaremos este papel por fuera y continuaremos de manera sucesiva con cada uno de los restantes papeles dentro de la bolsa hasta que asignemos la cantidad de etiquetas correspondientes (1-1,1-2,...,1-5 ; 2-1,2-2,...,2-5 ; 3-1,3-2,...3-5) Una vez terminamos podemos ver que si tenemos un papel el cual tiene como número 5 y al respaldo tiene etiqueta 3-4, significa que a la unidad experimental marcada con el numero 5 recibirá el tratamiento 3 y será la réplica 4.

5.1.3 Descripción del experimento

Supongamos que se tienen k tratamientos, independientes y con medias desconocidas $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$. Así como varianzas también desconocidas pero que se suponen iguales $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2 = \sigma^2$. Para nuestro diseño de experimento k tendrá un valor de 10 ($k = 10$), es decir, vamos a realizar las diferentes mediciones en 10 niveles ya predeterminados. Los datos generados en un diseño completamente al azar para comparar dichas poblaciones se pueden escribir como en la tabla 3, donde, el elemento Y_{ij} en esta tabla es la j -ésima observación que se hizo en el tratamiento i ; n_i es el tamaño de la muestra o las repeticiones observadas en el tratamiento i . Se recomienda utilizar el

¹ http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/2000352/html/un2/cont_202-22.html

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

mismo número de repeticiones ($n_i = n$) en cada tratamiento, cuando esto sucede se dice que el diseño es balanceado, tal como será el del presente estudio.

Tabla 3. Diseño completamente al azar. Tomado de ()

Tratamientos				
T_1	T_2	T_3	...	T_k
Y_{11}	Y_{21}	Y_{31}	...	Y_{k1}
Y_{12}	Y_{22}	Y_{32}	...	Y_{k2}
Y_{13}	Y_{23}	Y_{33}	...	Y_{k3}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
Y_{1n_1}	Y_{2n_2}	Y_{3n_3}	...	Y_{kn_k}

Una de las decisiones más importante en los diseños experimentales es la de determinar la cantidad de réplicas o repeticiones que se hará por cada nivel o tratamiento. Intuitivamente si esperamos muy pequeñas diferencias entre los tratamientos será necesario un mayor número de réplicas. A pesar de que existen diferentes métodos de estimación de la cantidad de repeticiones, la mayoría de veces tienen poca aplicabilidad, dado que se requiere tener cierto conocimiento previo sobre la varianza del error experimental.

Si recurrimos a la experiencia, podemos ver que la cantidad de réplicas en la mayoría de situaciones experimentales en las que se involucra un factor, puede variar entre cinco y diez, algunos casos llegando hasta las 30. Para la determinación de cuantas, o hacia cuál de los dos extremos del intervalo converger, debemos tener en cuenta lo siguiente:

1. Si se espera que la diferencia entre los tratamientos es mínima, mayor debe ser la cantidad de repeticiones o replicas si queremos detectar diferencias significativas, y también se cumple el contrario, si se esperan grandes diferencias entre los tratamientos, quizá con pocas replicas sea suficientes.
2. Si se espera mucha variación dentro de cada tratamiento, debido a la variación de fuentes no controladas (ruido), entonces se necesitara mayor cantidad de réplicas.
3. Si son varios tratamientos (cuatro o más), esto implicara reducir el número de réplicas.

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

Además de estos aspectos, también se debe tener en cuenta los costos y el tiempo que se ejecuta el experimento.

Siguiendo las recomendaciones propuestas en la bibliografía consultada y por comodidad se ha decidido trabajar con un diseño balanceado con 5 réplicas por nivel o tratamiento.

Para los datos consignados en la tabla 3 se tiene que el modelo estadístico lineal está dado por:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

Donde μ es la media global, τ_i es un parámetro que mide el efecto del tratamiento i y ε_{ij} es el error atribuible a la medición Y_{ij} .

La media global μ de la variable de respuesta no se considera una fuente de variabilidad por ser una constante común a todos los tratamientos, que hace las veces de punto de referencia con respecto al cual se comparan las respuestas medias de los tratamientos. Si la respuesta media de un tratamiento particular μ_i es muy diferente de la respuesta media global μ , es un síntoma de que existe un efecto de dicho tratamiento, ya que $\tau_i = \mu_i - \mu$. Las diferencias que deben tener las medias entre sí para concluir que hay un efecto se determina por medio de un análisis de varianza (ANOVA). Cuando tenemos la posibilidad de estudiar todos y cada uno de los tratamientos, decimos que estamos trabajando con un modelo de efectos fijos, como lo es el caso particular de nuestro experimento.

El análisis de varianza (ANOVA) es la técnica central en el análisis de datos experimentales. Esta técnica lo que busca es separar la variación total en las partes que contribuyen cada fuente de variación en el experimento. Para un diseño completamente al azar, las fuentes de variabilidad son la debida a los tratamientos y la debida al error. Cuando tenemos que la variabilidad debida a los tratamientos predomina claramente sobre la variabilidad debida al error, se puede concluir que los tratamientos tienen efecto, es decir, las medias son diferentes.

Cuando los tratamientos no dominan, contribuyen igual o menos que el error, se concluye que las medias son iguales. Tal como se aprecia en la Figura 7.

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

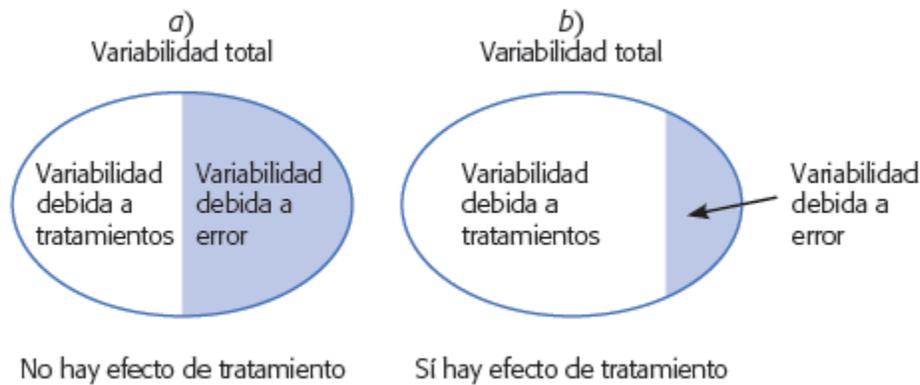


Figura 7 Partiendo la variación total en sus componentes en un diseño completamente al azar. Tomado de ()

5.2 Análisis de varianza

5.2.1 Notación de puntos

Es una herramienta necesaria que sirve para abreviar cantidades numéricas las cuales son calculadas a partir de los datos experimentales, donde Y_{ij} representa la j -ésima observación en el tratamiento i , con $i = 1, 2, \dots, k$ y $j = 1, 2, \dots, n_i$.

Las cantidades de interés son:

$Y_{i\cdot}$ = suma de las observaciones del tratamiento i .

$\bar{Y}_{i\cdot}$ = media de las observaciones del i -ésimo tratamiento.

$Y_{\cdot\cdot}$ = suma total de las $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ mediciones.

$\bar{Y}_{\cdot\cdot}$ = media global o promedio de todas las observaciones.

Es de notar que el punto indica la suma sobre el correspondiente subíndice.

5.2.2 ANOVA

El objetivo del análisis de varianza en un diseño completamente al azar es probar la hipótesis de igualdad de los tratamientos con respecto a la media de la correspondiente variable de respuesta:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = \mu$$

$$H_A: \mu_i \neq \mu_j \text{ para algún } i \neq j$$

La cual se escribe de forma equivalente como:

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_k = 0$$

$$H_A: \tau_i \neq 0 \text{ para algún } i$$

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

Para nuestro experimento las hipótesis determinadas serán:

Donde τ_i es el efecto del tratamiento i sobre la variable de respuesta. Si se acepta H_0 se confirma que los efectos sobre la respuesta de los k tratamientos son estadísticamente nulos (iguales a cero), en caso de rechazar se estaría concluyendo que al menos un efecto es diferente de cero.

Para probar las hipótesis dadas en las relaciones anteriores mediante la técnica de ANOVA, lo primero es descomponer la variabilidad total de los datos en sus dos componentes: la variabilidad debida a los tratamientos y la que corresponde al error aleatorio, de la siguiente manera:

Una medida de la variabilidad total que se encuentra presente en las observaciones de la tabla es la suma total de cuadrados, dada por:

$$SC_T = \sum_{i=1}^k n_i (\bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot})^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{i\cdot})^2$$

Donde el primer componente que se tiene es la suma de cuadrados de tratamientos (SC_{TRAT}) y el segundo es la suma de cuadrados del error (SC_E).

Dado que tenemos $N = \sum_{i=1}^{n_i} n_i$ observaciones, la SC_T tiene $N - 1$ grados de libertad. Hay k tratamientos o niveles del factor de interés, así que SC_{TRAT} tiene $k - 1$ grados de libertad, mientras que la (SC_E) tiene $N - k$ grados de libertad.

Se cumple la relación dada por:

$$N - 1 = (k - 1) + (N - k)$$

Tenemos que la suma de cuadrados divididos entre sus respectivos grados de libertad se llama cuadrados medios. Los que necesitaremos son el cuadrado medio de tratamientos y el cuadrado medio del error, denotados de la siguiente manera:

$$CM_{TRAT} = \frac{SC_{TRAT}}{k-1} \text{ y } CM_E = \frac{SC_E}{N-k}$$

Los valores esperados de los cuadrados medios están dados por:

$$E(CM_E) = \sigma^2 \text{ y } E(CM_{TRAT}) = \sigma^2 + \frac{\sum_{i=1}^k n_i \tau_i^2}{N-k}$$

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

Es de notar que cuando la hipótesis nula es verdadera, ambos cuadrados medios estiman la varianza σ^2 , ya que el segundo término para la expresión $E(CM_{TRAT})$ sería igual a cero. Sabemos que SC_E y SC_{TRAT} son independientes, por lo tanto SC_E/σ^2 y SC_{TRAT}/σ^2 son dos variables aleatorias independientes con distribución ji-cuadrada con $N - k$ y $k - 1$ grados de libertad, respectivamente. Ahora, si suponemos que la hipótesis H_0 es verdadera, el estadístico:

$$F_0 = \frac{CM_{TRAT}}{CM_E}$$

Sigue una distribución F con $(k - 1)$ grados de libertad en el numerador y $(N - k)$ grados de libertad en el denominador.

Ahora, podemos deducir que si F_0 es grande, se contradice la hipótesis de que no hay efectos de tratamientos; en cambio si F_0 es pequeño se confirma la validez de H_0 . Por lo tanto, para un nivel de significancia α prefijado, se rechaza H_0 si $F_0 > F_{\alpha, k-1, N-k}$, donde $F_{\alpha, k-1, N-k}$ es el percentil $(1 - \alpha) \times 100$ de la distribución F. También se debe rechazar H_0 si el *valor - p* $< \alpha$, donde el *valor - p* es el área bajo la distribución $F_{k-1, N-k}$ a la derecha del estadístico F_0 , es decir, el *valor - p* = $P(F > F_0)$.

Toda la información que se necesita para calcular el F_0 hasta llegar al *valor - p* se escribe en la tabla de análisis de varianza:

Tabla 4. Tabla de ANOVA para el diseño completamente al azar. Tomado de ().

FV	SC	GL	CM	F_0	Valor-p
Tratamientos	$SC_{TRAT} = \sum_{i=1}^k \frac{Y_i^2}{n_i} - \frac{Y_{..}^2}{N}$	$k - 1$	$CM_{TRAT} = \frac{SC_{TRAT}}{k - 1}$	$\frac{CM_{TRAT}}{CM_E}$	$P(F > F_0)$
Error	$SC_E = SC_T - SC_{TRAT}$	$N - k$	$CM_E = \frac{SC_E}{N - k}$		
Total	$SC_T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{N}$	$N - 1$			

Donde FV= fuente de variabilidad (efecto), SC= suma de cuadrados, GL= grados de libertad, CM= cuadrado medio, F_0 = estadístico de prueba, *valor - p*= significancia observada.

Cuando se realiza el análisis de varianza y se da por rechazada H_0 , y se concluye que no hay igualdad entre las medias poblacionales de los tratamientos, pero no se tiene una

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

información específica sobre los tratamientos que difieren entre sí, para ello se utilizan diversos métodos para hacer una comparación visual y/o estadística de las medias de los tratamientos.

Estos métodos se encargan de hacer una comparación de parejas de medias de tratamientos.

Cuando en el análisis de varianza (ANOVA) no se rechaza la hipótesis nula, damos por concluido que los tratamientos no son diferentes. Ahora, cuando rechazamos H_0 , y por consiguiente aceptamos la hipótesis alternativa $H_A : \mu_i \neq \mu_j$ para algún $i \neq j$, es cuando se hace necesario determinar cuales fueron los tratamientos que provocaron la diferencia. Estos interrogantes se logran responder probando la igualdad de todos los posibles pares de medias, para esto hacemos uso de los métodos de comparaciones múltiples o pruebas de rango múltiple.

5.3 Método LSD (diferencia mínima significativa)

Cuando se rechaza H_0 en el ANOVA, el problema se traslada a probar la igualdad de todos los posibles pares de medias con la hipótesis:

$$H_0 : \mu_i = \mu_j$$

$$H_A : \mu_i \neq \mu_j$$

Para toda $i \neq j$.

Para k tratamientos se tienen en total $\frac{k(k-1)}{2}$ pares de medias. El estadístico de prueba para cada una de las hipótesis dadas en la siguiente fórmula, corresponde al valor absoluto de la diferencia de sus medias muestrales $|\bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{j\cdot}|$.

Por lo tanto, se rechaza la hipótesis $H_0 : \mu_i = \mu_j$ si ocurre que:

$$|\bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{j\cdot}| > t_{\alpha/2, N-k} \sqrt{CM_E \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} = LSD$$

Donde el valor de $t_{\alpha/2, N-k}$ se lee en las tablas de distribución T de Student con $N - k$ grados de libertad, lo que corresponde al error, el CM_E corresponde al cuadrado medio

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

del error y este se obtiene de la tabla ANOVA, n_i y n_j son el número de observaciones para los tratamientos i y j , respectivamente.

La cantidad LSD o diferencia mínima significativa se refiere a la diferencia mínima que debe existir entre dos medias muestrales para poder considerar que dos tratamientos son diferentes. Por lo tanto, cada resultado que se obtenga en cada valor absoluto de la diferencia de medias muestrales que sea mayor al número obtenido LSD , se declara significativa. Cuando se tiene un diseño balanceado la diferencia mínima significativa se reduce a:

$$LSD = t_{\alpha/2, N-k} \sqrt{2CM_E/n}$$

Cuando se termina de analizar los datos experimentales, se debe establecer el tipo de correlación que existe entre los factores. Para el experimento que se llevará a cabo se ha determinado, a partir de la consulta en material científico, que la correlación que hay entre el número de Nusselt, que caracteriza la transferencia de calor, y los números de Dean y de Prandtl, que caracterizan al flujo y al fluido, respectivamente, es de tipo potencial.

5.4 Regresión no lineal

El modelo de regresión no lineal de tipo potencial es aquel en que la función de ajuste es del tipo:

$$Y = aX^b$$

Para el caso nuestro tendremos una correlación múltiple, tal que:

$$Y = aX^bZ^c$$

Esta correlación se lleva a cabo dado que es posible correlacionar cada una de las variables independientes con la variable dependiente.

La forma de realizar esta correlación es la siguiente:

Tenemos que el modelo potencial es: $Y = aX^bZ^c$, para lograr una relación lineal debemos usar logaritmo en ambos lados de esta igualdad:

$$\log Y = \log(aX^bZ^c)$$

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

Por propiedades de los logaritmos, podemos obtener una expresión equivalente de la forma:

$$\log Y = \log a + b \log X + c \log Z$$

Realizando las siguientes sustituciones:

$$Y = \log Y ; \beta_0 = \log a ; X_1 = \log X ; X_2 = \log Z ; \beta_1 = b ; \beta_2 = c$$

De esta manera, obtenemos la expresión:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

Este sería el modelo lineal múltiple mediante el cual podremos obtener la función de ajuste adecuada. Donde β_j son los valores que conocemos como coeficientes de regresión y ε es el error aleatorio.

Para poder estimar los valores necesarios en la regresión lineal múltiple se hace necesario contar con una cantidad n de datos, a su vez $n > k$. Estos se deben organizar en una tabla de la siguiente manera:

Tabla 5. Estructura de los datos para la regresión lineal múltiple. Tomado de ().

Y	X_1	X_2	...	X_k
y_1	x_{11}	x_{21}	...	x_{k1}
y_2	x_{12}	x_{22}	...	x_{k2}
	\vdots	\vdots		\vdots
y_n	y_{1n}	x_{2n}	...	x_{kn}

Se puede observar que para cada combinación en los valores asignados a las variables regresoras (x_{1i}, \dots, x_{ki}) se observa un valor de la variable dependiente y_i .

Podemos entonces escribir el modelo de regresión lineal múltiple como:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j x_{ji} + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$$

Cuando se despejan los errores, se elevan al cuadrado y se suman, se obtiene la siguiente función:

$$S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^k \beta_j x_{ji} \right)^2$$

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

Esta función depende de los parámetros β_j . Los estimadores de mínimos cuadrados para β_j se obtienen al minimizar los errores, es decir, minimizando S . Esto lo podemos lograr cuando derivamos a S con respecto a cada parámetro β_j , ahora, estas $k + 1$ ecuaciones simultáneas son los estimadores de mínimos cuadrados, $\hat{\beta}_j$.

Para representar el procedimiento de estimación por mínimos cuadrados se utiliza una notación matricial. Tenemos que:

$$y = X\beta + \varepsilon$$

Dónde:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Lo que necesitamos es obtener el vector de los estimadores de mínimos cuadrados, $\hat{\beta}$, que minimice:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \varepsilon' \varepsilon = (y - X\beta)'(y - X\beta) \\ &= y'y - \beta'X'y - y'X\beta + \beta'X'X\beta \\ &= y'y - 2\beta'X'y + \beta'X'X\beta \end{aligned}$$

Dadas estas expresiones, tenemos que se debe satisfacer la siguiente expresión:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{\hat{\beta}} = -2X'y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$

A su vez tenemos que:

$$X'X\hat{\beta} = X'y$$

Finalmente, la expresión que determina el estimador de mínimos cuadrados es:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

Por lo tanto, el modelo ajustado que se obtiene es:

$$\hat{y} = X\hat{\beta}$$

Y a su vez, tenemos la matriz de covarianza de $\hat{\beta}$ como:

$$Cov(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$$

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

Al momento que se quiere hacer inferencias sobre β o sobre el modelo, se necesita estimar σ^2 .

Tenemos que el vector de residuos está dado por:

$$e = y - \hat{y} = y - X\hat{\beta}$$

Por lo tanto, la suma de los cuadrados del error es:

$$\begin{aligned}
 SC_E &= \sum_{i=1}^n e_i^2 = e'e \\
 &= (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta}) = y'y - 2\hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}
 \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$X'X\beta = X'y$$

Por lo tanto la expresión queda como:

$$SC_E = y'y - \hat{\beta}'X'y$$

La suma de cuadrados del error dada en esta última expresión, tiene $n - k - 1$ grados de libertad, donde $k + 1$ es equivalente al número de parámetros estimados en el modelo. Así, la expresión para el cuadrado medio del error es:

$$CM_E = \frac{SC_E}{n-k-1}$$

Y dado que el valor esperado de CM_E es σ^2 , entonces el estimador de σ^2 está dado por:

$$\hat{\sigma}^2 = CM_E$$

Cuando determinamos la raíz cuadrada de CM_E obtenemos el valor conocido como error estándar de estimación del modelo.

5.4.1 Análisis de varianza

En los modelos de regresión múltiple la hipótesis global de mayor importancia es determinar si esta regresión es significativa. Para esto se plantean las siguientes hipótesis:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots \beta_k = 0$$

$$H_A : \beta_j \neq 0 \text{ para al menos un } j = 1, 2, \dots, k$$

Cuando se acepta H_0 estamos afirmando que ningún término o variable en el modelo contribuye de una manera significativa al explicar la variable de respuesta Y. Ahora,

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

cuando se rechaza H_0 estamos determinando que existe al menos un término en el modelo que tiene una contribución significativa para explicar la variable de respuesta Y.

El procedimiento para probar esta hipótesis consiste en descomponer la suma total de cuadrados, en la suma de cuadrados de regresión y en la suma de cuadrados del error:

$$S_{yy} = SC_R + SC_E$$

Cuando determinamos $H_0: \beta_j = 0$ es verdadera, por lo tanto, SC_R/σ^2 tiene una distribución χ_k^2 , donde se tiene que el número e grados de libertad k , es igual al número de términos en el modelo de regresión.

También se tiene que $SC_E/\sigma^2 \sim \chi_{n-k-1}^2$, además SC_E y SC_R son independientes.

El estadístico de prueba para determinar la significancia del modelo de regresión lineal múltiple está dado por:

$$F_0 = \frac{SC_R/k}{SC_E/(n-k-1)} = \frac{CM_R}{CM_E}$$

Se tiene que H_0 tiene una distribución $F_{(k,n-k-1)}$. Por lo tanto se rechaza H_0 si $F_0 > F_{(\alpha,k,n-k-1)}$ o también si valor $-p = P(F > F_0) < \alpha$.

Para calcular SC_R , tenemos que:

$$SC_E = y'y - \hat{\beta}'X'y$$

Además, la suma de cuadrados S_{yy} está dada por:

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n} = y'y - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n}$$

Así, se tiene que SC_E puede expresarse como:

$$SC_E = \left[y'y - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n} \right] - \left[\hat{\beta}'X'y - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n} \right] = S_{yy} - SC_R$$

Por lo tanto la suma de cuadrados de la regresión SC_R da como:

$$SC_R = \hat{\beta}'X'y - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n}$$

En la siguiente tabla se sintetiza el procedimiento de análisis de varianza para la significancia del modelo de regresión lineal múltiple:

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

Tabla 6. ANOVA para la significancia del modelo de regresión lineal múltiple. Tomado de ().

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F_0	Valor- p
Regresión	$SC_R = \hat{\beta}'X'y - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n}$	k	CM_R	CM_R/CM_E	$\Pr(F > F_0)$
Error o residuo	$SC_E = y'y - \hat{\beta}'X'y$	$n - k - 1$	CM_E		
Total	$S_{yy} = y'y - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n}$	$n - 1$			

Existen ocasiones donde se determina que un modelo es significativo, pero no necesariamente es bueno para explicar la variación de los datos. Por esta razón se hace necesario tener una serie de mediciones adicionales de la calidad del ajuste del modelo, como las gráficas de residuales y el coeficiente de determinación.

El coeficiente de determinación R^2 se determina a partir de la información que se obtiene en el análisis de varianza, además de poder calcular el coeficiente de determinación ajustado R_{aj}^2 .

Por lo tanto, obtenemos que las expresiones sean:

$$R^2 = \frac{SC_R}{S_{yy}} = 1 - \frac{SC_E}{S_{yy}}$$

$$R_{aj}^2 = \frac{S_{yy}/(n-1) - CM_E}{S_{yy}/(n-1)} = \frac{CM_{total} - CM_E}{CM_{total}} = 1 - \frac{CM_E}{CM_{total}}$$

Además se cumple que $0 < R_{aj}^2 \leq R^2 < 1$; en general, para hablar de un modelo que tiene un ajuste satisfactorio se requiere que ambos coeficientes alcancen un valor superior a 0.7. Cuando en el modelo se tienen términos que no contribuyen de manera significativa a este, se obtiene que R_{aj}^2 tiende a ser menor que R^2 . Por lo tanto se tiene la necesidad de depurar el modelo, y para ello se utilizan las siguientes pruebas de hipótesis.

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

5.4.2 Coeficiente de correlación múltiple

Este coeficiente corresponde a la raíz cuadrada del coeficiente de determinación R^2 , es decir:

$$R = \sqrt{R^2}$$

Con este valor se obtiene una medida de la intensidad de la relación entre la variable dependiente y las variables o términos del modelo.

Pruebas sobre coeficientes individuales del modelo: En los análisis de regresión lineal múltiple es clave poder ver que tanto contribuye cada término a la explicación de la variable de respuesta, esto con el fin de poder eliminar las que tienen una contribución poco importante.

La hipótesis para probar la significancia de cualquier coeficiente individual β_j se especifica así:

$$H_0: \beta_j = 0$$

$$H_A: \beta_j \neq 0 \quad j = 0, 1, 2, \dots, k$$

La distribución de los coeficientes de regresión $\hat{\beta}_j$ será:

$$\hat{\beta}_j \sim N(\beta_j, \sigma^2 C_{j+1, j+1})$$

Donde, $C_{j+1, j+1}$ es el elemento de la diagonal de la matriz $(X'X)^{-1}$ correspondiente al parámetro $\hat{\beta}_j$

Por lo tanto, el estadístico de prueba a utilizar para examinar la hipótesis está dado por:

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_j}{\sqrt{CM_E C_{j+1, j+1}}}$$

Donde se rechaza H_0 si $|t_0| > t_{(\frac{\alpha}{2}, n-k-1)}$, de manera equivalente si el valor-p = $P(T > |t_0|) < \alpha$.

Para lo anteriormente descrito se tiene una tabla con un resumen del análisis:

Para el modelo $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k$

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

Tabla 7. Análisis de regresión para el modelo $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k$. Tomado de ().

Parámetro	Estimación	Error estándar	Estadístico	Valor-p
Intercepción	$\hat{\beta}_0$	$\sqrt{CM_E C_{11}}$	$\frac{\hat{\beta}_0}{\sqrt{CM_E C_{11}}}$	$\Pr(T > t_0)$
β_1	$\hat{\beta}_1$	$\sqrt{CM_E C_{22}}$	$\frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{CM_E C_{22}}}$	$\Pr(T > t_0)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
β_k	$\hat{\beta}_k$	$\sqrt{CM_E C_{k+1, k+1}}$	$\frac{\hat{\beta}_k}{\sqrt{CM_E C_{k+1, k+1}}}$	$\Pr(T > t_0)$

5.4.3 Intervalos de confianza y predicción en regresión lineal múltiple

En la regresión lineal múltiple es posible generar intervalos de confianza y predicción. A partir de los datos obtenidos en la tabla anterior vemos que un estimador por intervalo de cada coeficiente individualmente, viene dado por:

$$\hat{\beta}_j - t_{(\alpha/2, n-k-1)} \sqrt{CM_E C_{j+1, j+1}} < \beta_j < \hat{\beta}_j + t_{(\alpha/2, n-k-1)} \sqrt{CM_E C_{j+1, j+1}}$$

También es posible generar un intervalo de confianza con respecto a la respuesta media en un punto particular, como $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0}$. Se define el vector:

$$x_0^1 = [1 \ x_{10} \ x_{20} \ \dots \ x_{k0}]$$

Por lo tanto, la respuesta media que se estima en este punto viene dada por:

$$\hat{y}_0 = x_0^1 \hat{\beta}$$

Para este estimador, su varianza será:

$$V(\hat{y}_0) = \sigma^2 x_0^1 (X'X)^{-1} x_0$$

Para un intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)$ de confianza para la respuesta media en el punto $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0}$, la expresión será:

$$\hat{y}_0 - t_{(\alpha/2, n-k-1)} \sqrt{CM_E x_0^1 (X'X)^{-1} x_0} < E(y_0) < \hat{y}_0 + t_{(\alpha/2, n-k-1)} \sqrt{CM_E x_0^1 (X'X)^{-1} x_0}$$

5.5 Algoritmos para cálculo de número de Nusselt y factor de fricción

Las correlaciones de transferencia de calor que caracterizan y permiten el dimensionamiento de intercambiadores se expresan como funciones potenciales de Nu en términos de De y Pr, de igual manera ocurre con las correlaciones que se emplean para el cálculo del factor de fricción, necesario para evaluar la potencial caída de presión a través

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

del intercambiador. Hasta este punto se han descrito los tratamientos matemáticos que se realizarán a la base de datos obtenida tras la ejecución del experimento, pero se ha hecho en términos abiertos, sin aclarar las variables que realmente definirán el algoritmo a correr. En este punto se presentarán las ecuaciones que describen dichas funciones y como se correlacionan con las variables dependientes e independientes que podrán ser medidas y registradas durante el experimento.

Se tiene que:

$$q''_x = h * (T_s - T_\infty) \quad (28)$$

Además:

$$q''_x = \frac{\dot{Q}}{A} \quad (29)$$

También:

$$\dot{Q} = \frac{Q}{t} \quad (30)$$

Reemplazando (29) en (28) y despejando "h":

$$h = \frac{\dot{Q}}{A*(T_s - T_\infty)} \quad (31)$$

Reemplazando (30) en (31):

$$h = \frac{Q}{A*t*(T_s - T_\infty)} \quad (32)$$

De (6) tenemos que:

$$Q_h = \dot{m}_c * c_p * (T_{h,i} - T_{h,o}) \quad (6)$$

Reemplazando (6) en (32):

$$h = \frac{\dot{m}_c * c_p * (T_{h,i} - T_{h,o})}{A*t*(T_s - T_\infty)} \quad (33)$$

De (10) tenemos que:

$$Nu = \frac{h_o * d}{k} \quad (10)$$

Reemplazando (33) en (10):

$$Nu = \frac{\dot{m}_c * c_p * d * (T_{h,i} - T_{h,o})}{A*t*k*(T_s - T_\infty)} \quad (34)$$

	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

Tenemos que:

$$\dot{m}_c = \rho * \dot{V} \quad (35)$$

Reemplazando (35) en (34):

$$Nu = \frac{\rho * \dot{V} * c_p * d * (T_{h,i} - T_{h,o})}{A * t * K * (T_s - T_\infty)} \quad (36)$$

Los otros modelos a utilizar son:

$$D_e = \frac{\rho * v * d}{\mu} * \sqrt{\frac{r}{R}} \quad (37)$$

$$h_L = f * \frac{l}{d} * \frac{V^2}{2g} \quad (38)$$

De Zachar 2010 se tomaron los siguientes polinomios:

$$\rho(T) = 998.25 - 0.123261T - 0.00131119T^2 - 0.0000121406T^3$$

$$\mu(T) = 0.00166167 - 0.0000410857T + 4.64802 * 10^{-7}T^2 - 1.90559 * 10^{-9}T^3$$

$$c_p(T) = 4222.62 - 0.694932T + 0.00624126T^2 + 8.29448 * 10^{-6}T^3$$

$$\lambda(T) = 0.568733 + 0.00196461T - 9.77855 * 10^{-6}T^2 + 1.2432 * 10^{-8}T^3$$

Dónde:

$\rho(T)$ = Densidad

$\mu(T)$ = Viscosidad dinámica

$c_p(T)$ = Calor específico

$\lambda(T)$ = Conductividad térmica del fluido

 Institución Universitaria	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

REFERENCIAS

- Turbotec Products, Inc. . (2010). *Pool-Safe*. (Turbotec Products, Inc.) Recuperado el 2014, de <http://www.turbotecproducts.com/ProductPoolSafe.html>
- Conte, I., & Peng, X. F. (2009). Numerical and experimental investigations of heat transfer performance of rectangular coil heat exchangers. *Applied Thermal Engineering*, 29, 1799-1808.
- García San José, R. (2008). *Guía práctica sobre instalaciones centralizadas de calefacción y ACS en edificios de viviendas: Información y consejos para las comunidades de vecinos*. Madrid (España): IDAE Instituto para la Diversificación y Ahorro de la Energía.
- Ghorbani, N., Taherian, H., Gorji, M., & Mirgolbabaee, H. (2010). Experimental study of mixed convection heat transfer in vertical helically coiled tube heat exchangers. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 34, 900-905.
- Jayakumar, J., Mahajani, S. M., Mandal, J., Vijayan, P. K., & Bhoi, R. (2008). Experimental and CFD estimation of heat transfer in helically coiled heat exchangers. *chemical engineering research and design*, 86, 221-232.
- Kumar, V., Saini, S., Sharma, M., & Nigam, K. (2006). Pressure drop and heat transfer study in tube-in-tube helical heat exchanger. *Chemical Engineering Science*, 61, 4403-4416.
- Shokouhmand, H., Salimpour, M., & Akhavan-Behabadi, M. (2008). Experimental investigation of shell and coiled tube heat exchangers using wilson plots. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 35, 84-92.
- Srinivasan, S., Nadapurkar, S., & Holland, F. A. (1970). Friction factors for coils. *Transactions of the Institution of Chemical Engineers*, 48, 156-161.
- Zachár, A. (2010). Analysis of coiled-tube heat exchangers to improve heat transfer rate with spirally corrugated wall. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53, 3928-3939.

	INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO – FACULTAD DE INGENIERÍAS	Código	FDE 089
		Versión	02
		Fecha	2014-10-14

FIRMA ESTUDIANTES _____

FIRMA ASESOR _____

FECHA ENTREGA: _____

FIRMA COMITÉ TRABAJO DE GRADO DE LA FACULTAD _____

RECHAZADO___ ACEPTADO___ ACEPTADO CON MODIFICACIONES___

ACTA NO. _____

FECHA ENTREGA: _____

FIRMA CONSEJO DE FACULTAD _____

ACTA NO. _____

FECHA ENTREGA: _____