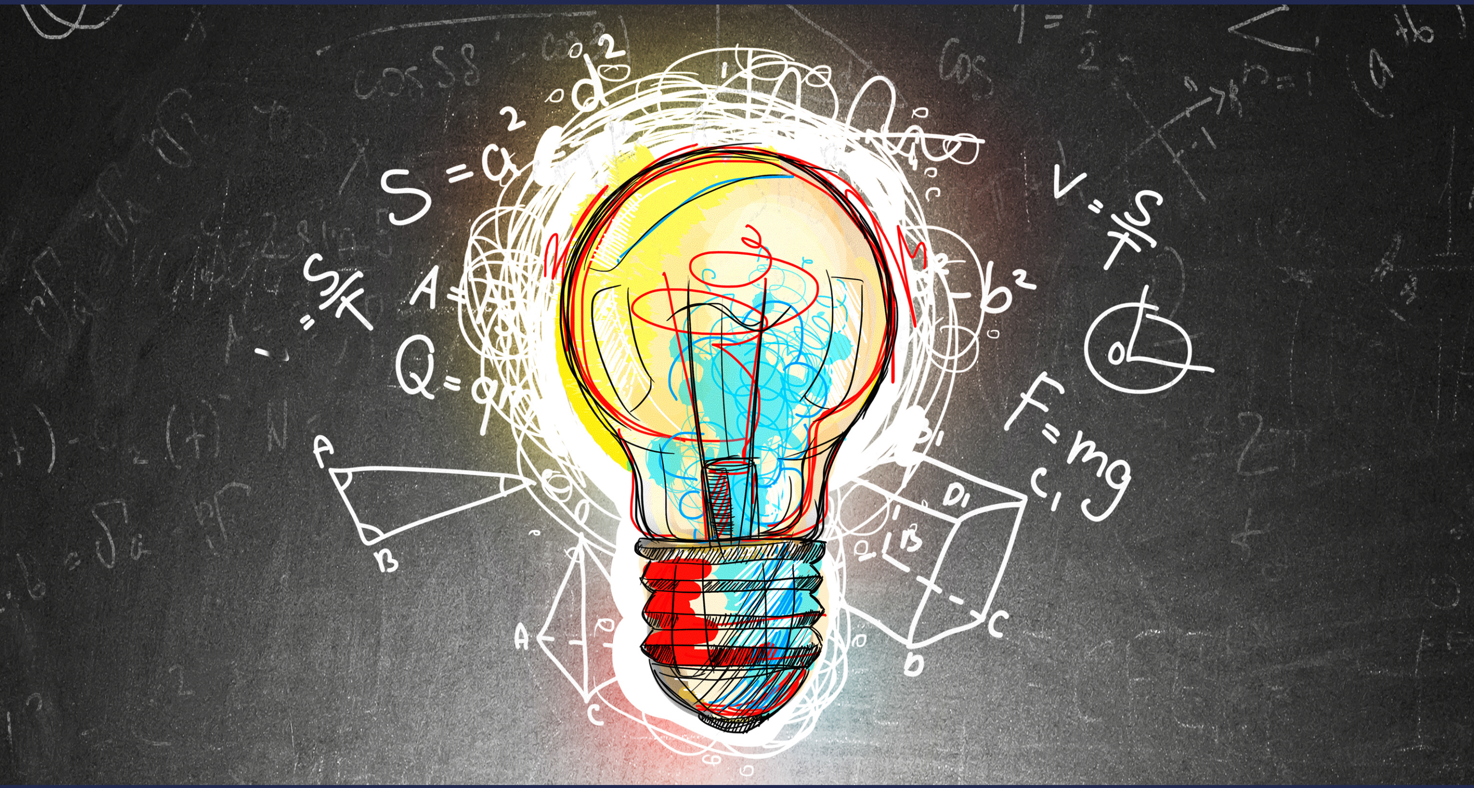
Institución Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad
80 Años

Fundamentos de aritmética

Guía para la nivelación en matemáticas básicas



María Cristina González Mazuelo

Fundamentos de aritmética

Guía para la nivelación en matemáticas básicas

Fundamentos de aritmética
Guía para la nivelación en matemáticas básicas

María Cristina González Mazuelo

ITM
Institución Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad

Institución Universitaria ITM
Fundamentos de aritmética. Guía para la nivelación en matemáticas básicas-–1ª. Edición -- Medellín: Institución Universitaria ITM, 2024.

89 páginas -- Línea profesoral
Incluye referencias bibliográficas

1. Aritmética. 2. Matemáticas básicas.
I. Institución Universitaria ITM. II. Tít. III. Serie.

Catalogación en la publicación - Biblioteca ITM

Primera edición: junio de 2024

DOI: https://doi.org/10.22430/reporte.5956

Hecho en Medellín, Colombia

Editorial ITM
Calle 75 75-101
Medellín, Colombia
Teléfono: 604 440 51 00 ext. 5197
http://catalogo.itm.edu.co
fondoeditorial@itm.edu.co

Equipo editorial

Mauricio Vanegas Gil
Director editorial

Clara María Mejía Zea
Profesional universitario EITM

Catalina Ocampo Ocampo
Editora de mesa

Olga Lucía Muñoz López
Corrección de textos

María Isabel Vera Vélez
Manuela Escobar Ortiz
Diseño y diagramación

Imagen de cubierta
Composición ilustrada
Foto chica ama las matemáticas - @ImageFlow
Freepik.com

Institución Universitaria ITM | Vigilado Mineducación. Reconocimiento de carácter académico: Resolución 6190 del 21 de diciembre de 2005, Mineducación. Reconocimiento de personería jurídica: Decreto 180 del 25 de febrero de 1992, Minjusticia. Renovación acreditación institucional de alta calidad, 8 años: Resolución 013595 del 24 de julio de 2020, Mineducación

Como citar:
Institución Universitaria ITM (2024). *Fundamentos de aritmética. Guía para la nivelación en matemáticas básicas.* Editorial ITM.

Contenido

Lista de figuras

Introducción

La aritmética, definida como el área de las matemáticas que estudia los conjuntos numéricos, las relaciones y operaciones que se establecen entre ellos, constituye hoy un lenguaje esencial tanto para la vida cotidiana como para el desarrollo de la ciencia y la técnica. Esto se debe a que el desarrollo numérico permite contar, ordenar, situar, comparar, repartir, solucionar ecuaciones, plantear y resolver problemas en diversas ramas del conocimiento.

El texto *Fundamentos de aritmética. Guía para la nivelación en matemáticas básicas,* es una compilación de los módulos de trabajo independiente correspondientes al curso Nivelatorio de Matemáticas que ofrece el Instituto Tecnológico Metropolitano - ITM, a los estudiantes próximos a ingresar a los diferentes programas de la institución. Su objetivo es hacer un repaso de algunas nociones de la aritmética que fundamentan los conceptos propios de otras áreas de las matemáticas, como el cálculo, la geometría y la estadística, entre otros.

El texto orienta dicho repaso desde los aspectos teóricos con sus respectivos ejemplos, hasta los ejercicios propuestos para el trabajo independiente. Dividido en cuatro unidades, de manera simple y con un lenguaje sencillo, apoyado en recursos gráficos, el texto facilita la comprensión de los conceptos, los procedimientos y su aplicación en distintos contextos.

UNIDAD 1

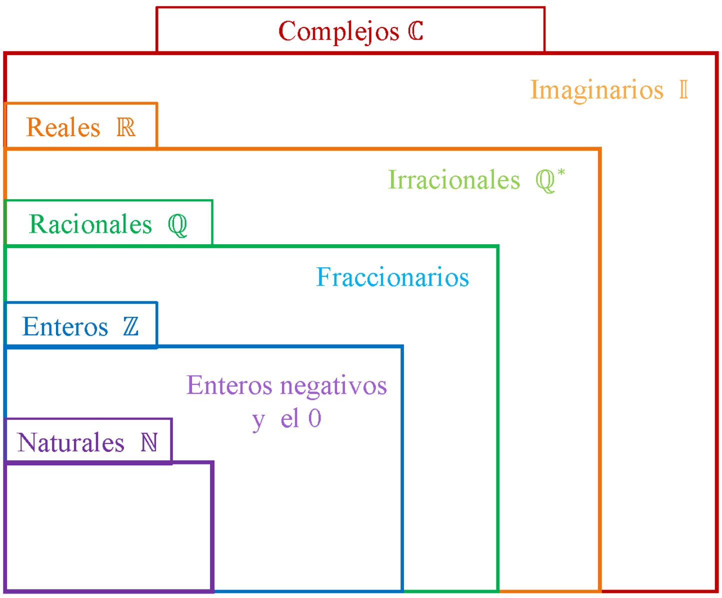
Conjuntos numéricos

1. Conjuntos numéricos

Se definen los conjuntos numéricos como una colección de números que tienen una característica común. Dentro de estos conjuntos es posible conformar otras colecciones o subconjuntos, tal como se muestra en la figura 1.

Figura 1

Conjuntos numéricos



Fuente: tomada del curso Fundamentos de Matemáticas del programa Interpretación y Traducción de Lengua de Señas Colombiana-Español modalidad virtual. Facultad de Artes y Humanidades, ITM, 2021.

De acuerdo con lo anterior y desde una perspectiva histórica, tal como se presenta en las actividades propuestas para el trabajo independiente, el primer conjunto que se configuró es el conjunto de los números naturales.

1.1. Números naturales

Los números naturales son aquellos que surgieron de la actividad de contar, por lo cual se les llama también «números de conteo».

El conjunto conformado por estos números se nombra con la letra $\mathbb{N}$ y cada uno de los elementos que lo componen está representado con la letra $\boldsymbol{n}$.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots\}$$

Así, cuando se procede a contar se comienza por el número 1 siendo este el primer elemento del conjunto; sin embargo, no es posible determinar cuando termina el conteo y por lo tanto el conjunto no tendría un último elemento.

Los primeros pitagóricos consideraban al número 1 como el número de Dios, puesto que a partir de este se generaban los otros números mediante la suma, de la siguiente forma:

$1 =$ Dios $\longrightarrow$

$$\begin{array}{c} 1+1=2 \\ 2+1=3 \\ 3+1=4 \\ \vdots \end{array}$$

En 1889 el matemático italiano Giuseppe Peano postuló cinco principios que definen los números naturales, de los cuales se destaca que «todo número natural tiene un sucesor o consecuente» y así mismo un número que lo antecede; esto último aplica para todos los números excepto el uno, el cual no tiene antecedente. De esta forma y a partir de la concepción pitagórica del 1, el antecedente y el consecuente de un número se pueden escribir de manera simbólica y generalizada como se muestra a continuación:

$$\mathbf{1} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{4} \quad \mathbf{5} \quad \mathbf{6} \quad \mathbf{7} \ldots$$

	Antecedente	Número	Consecuente
Representación simbólica:	$\downarrow$ n-1	$\downarrow$ n	$\downarrow$ n+1

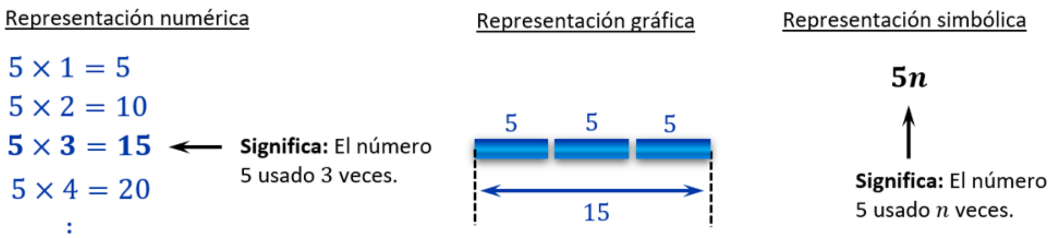
Por otra parte, dentro de este conjunto se establecen dos conceptos fundamentales: el de múltiplo y el de divisor.

1.1.1. Múltiplo

Es el número que resulta al multiplicar un número natural con todos los números naturales. También se puede pensar como el número que resulta de usar un número natural varias veces, como por ejemplo los múltiplos de 5 que se aprecian en la figura 2.

Figura 2

Múltiplos de 5



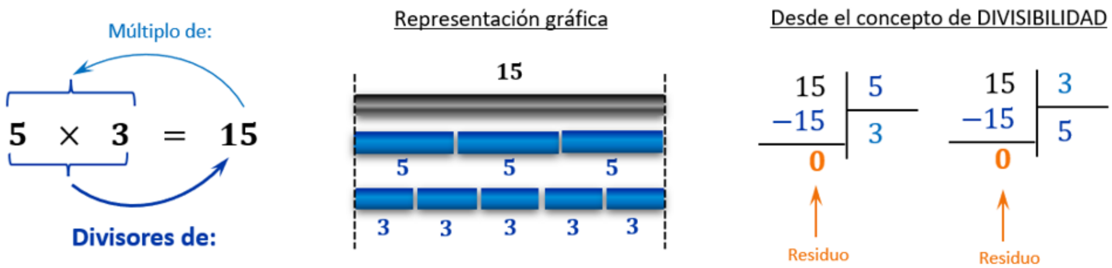
Fuente: elaboración propia (2022).

1.1.2. Divisor

Es el número que divide exactamente a otro, es decir, es aquel número natural que cabe en otro número natural sin que sobre nada. En el ejemplo anterior, si el número 15 es múltiplo de 5 y también del 3, entonces los números 5 y el 3 son ***divisores*** del 15 o los que lo dividen exactamente; esto significa que al hacer la división del 15 entre 5 o 3, el residuo es cero, tal como se observa en la figura 3. En este caso se dice también que el 15 es ***divisible*** entre 5 y 3.

Figura 3

Divisores de 5



Fuente: elaboración propia (2022).

1.1.3. Concepto de divisibilidad

La divisibilidad es la propiedad que tienen los números naturales de que al dividirlos por otro número natural, el cociente es otro número natural y el residuo es igual a cero. Para saber si un número es divisible entre otro no necesariamente se debe hacer la división: basta con inspeccionar si el número obedece a los criterios o condiciones que debe cumplir dicho número para concluir si es divisible entre otro. Algunos de los criterios más utilizados son:

Divisibilidad por 2: cuando termina en cero o en cifra par.

Divisibilidad por 3: cuando la suma de sus cifras es múltiplo de tres.

Divisibilidad por 5: cuando termina en cero o en cinco.

Divisibilidad por 7: cuando al restar el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades, el resultado es cero o múltiplo de siete.

Divisibilidad por 11: cuando la diferencia de la suma de las cifras en posición par y la de las cifras en posición impar, es cero o múltiplo de once.

1.1.4. Clasificación de los números naturales

Los números naturales se dividen en tres grupos o subconjuntos:

- **Número uno:** en la aritmética representa a la unidad.
- **Números primos:** son aquellos que sólo tienen dos divisores: el 1 y ellos mismos. Estos son: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 \ldots$
- **Números compuestos:** los que tienen más de 2 divisores. Por ejemplo, el número 15 tiene cuatro divisores: $1, 3, 5, 15$.

1.1.5. Teorema fundamental de la aritmética

Este teorema demostrado por Euclides en su libro *Elementos* en el año 350 a.C., afirma que cualquier número natural mayor que uno se puede escribir como el producto de números primos de forma única para dicho número, donde algunos pueden estar repetidos y aunque el orden de los factores pueda ser diferente, como por ejemplo:

$$\mathbf{150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5}$$

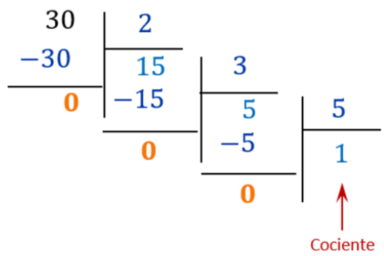
1.1.6. Operaciones con números naturales

1.1.6.1. Descomposición en factores primos o factorización

Descomponer o factorizar un número en factores primos, es el proceso mediante el cual un número natural se expresa como el producto o la multiplicación de otros números que son primos. Dicho proceso consiste en dividir el número sucesivamente entre los números primos preferiblemente en orden, es decir, comenzando por el 2, luego por el 3 y así sucesivamente hasta que el cociente sea 1. Por medio de los criterios de divisibilidad, se pueden determinar fácilmente los números primos que son divisores del número que se requiere descomponer.

Ejemplo:

30	2	← El 30 es divisible entre 2 porque cumple que es par o termina en cero.
15	3	← El 15 no es divisible entre 2 pero si entre tres puesto que al sumar sus cifras: $1+5=6$ que es múltiplo de tres.
5	5	← El 5 es un número primo y por lo tanto sólo es divisible entre si mismo y el 1.
1		



$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

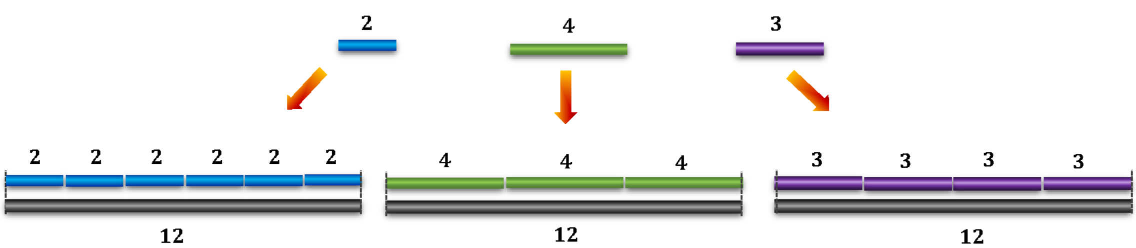
1.1.6.2. Mínimo común múltiplo

Si se retoma el concepto de múltiplo, dado un grupo de números es posible encontrar un número, el más pequeño posible, que es múltiplo de todos los números que conforman dicho grupo. De esta manera, si se representan los números naturales como segmentos de recta, entonces el mínimo común múltiplo $(m.c.m.)$ será el segmento más pequeño en donde caben exactamente los segmentos que representan a los números del grupo tal, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Si se tienen tres segmentos de medidas 2, 4 y 3, respectivamente, entonces la medida del segmento más pequeño en donde caben los tres sin que sobre nada sería 12, como se observa en la figura 4.

Figura 4

Mínimo común múltiplo entre 2, 4 y 3



Fuente: elaboración propia (2022).

De esta manera se dice que el número 12 es el mínimo común múltiplo entre el grupo de números conformados por el 2, el 4 y el 3.

El procedimiento para determinar el $m.c.m.$ entre un grupo de números, es el siguiente:

- Se descomponen los números en factores primos.
- Se seleccionan los factores comunes y no comunes con el mayor exponente, y se multiplican.

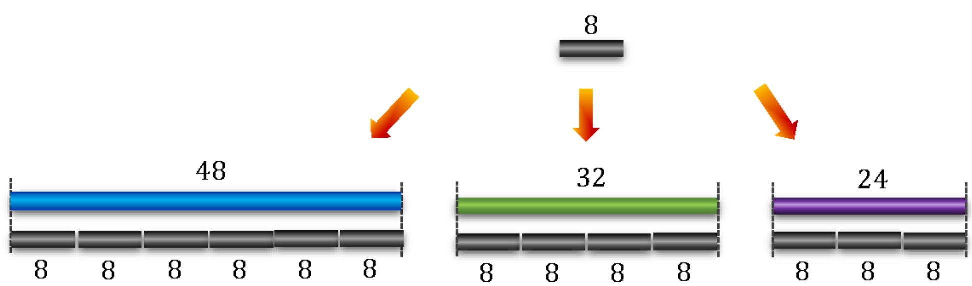
1.1.6.3. Máximo común divisor

A partir del concepto de divisor y dado un grupo de números, es posible encontrar un número, el más grande posible, que es divisor de todos los números que conforman dicho grupo. De igual forma, si se representan los números naturales como segmentos de recta, entonces el máximo común divisor $(m.c.d.)$ será el segmento más grande que cabe exactamente en los segmentos que representan a los números del grupo, tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

Si se tienen tres segmentos de medidas 48, 32 y 24, entonces la medida del segmento más grande que cabe en los tres segmentos sin que sobre nada sería 8, como se aprecia en la figura 5.

Figura 5

Máximo común divisor entre 48, 32 y 24



Fuente: elaboración propia (2022).

De esta manera se dice que el número 8 es el máximo común divisor entre los números del grupo conformado por el 48, el 32 y el 24. Cabe mencionar que si bien el 2 y el 4 también cabrían exactamente en el 48, el 24 y el 32, no son los más grandes.

El procedimiento para determinar el $m.c.d.$ entre un grupo de números es:

- Se factorizan o descomponen los números.
- Se seleccionan sólo los factores comunes con el menor exponente y se multiplican.

Actividades de trabajo independiente 1

1. Teniendo como referencia los conceptos estudiados, resuelva los ejercicios propuestos en los numerales del *a* al *e*.

   a. El número 1 era considerado por los pitagóricos como el número de Dios, debido a que a partir de este y mediante la suma se generan los otros números naturales. Si n representa a un número natural, escriba simbólicamente cuatro números consecutivos.
   b. El múltiplo de un número natural es aquel que resulta de multiplicar el número por todos los números naturales; así, $3n$ representa simbólicamente a los múltiplos de 3. De acuerdo con lo anterior, escriba la representación simbólica de los números pares y de los números impares.
   c. Los números compuestos son aquellos que tienen más de dos divisores. De acuerdo con lo anterior, dé cinco ejemplos de números compuestos que sean impares.
   d. Utilizando los criterios de divisibilidad:
      i. Determine si el 1936 es divisible entre 11.
      ii. Analice la divisibilidad del 322 por 7.
      iii. Proponga tres números mayores de 100 que sean divisibles entre 3.
   e. Escriba tres números impares múltiplos de 5 que se encuentren entre 50 y 100.

2. Determine el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor (si es posible), de los siguientes grupos de números:

   a. $(8, 20, 12)$
   b. $(30, 20, 15)$
   c. $(60, 30, 40)$
   d. $(36, 30, 45)$
   e. $(160, 280, 480)$
   f. $(100, 150, 325)$

3. En las situaciones que se plantean a continuación, identifique si debe utilizar el concepto de $m.c.m.$ o el de $m.c.d.$ para obtener la solución. Luego escoja y resuelva una situación, de cada uno de los dos conceptos identificados.

   a. Andrés tiene una cuerda de 60 metros, otra de 30 metros y una más de 40 metros. Desea cortarlas de modo que todos los trozos sean iguales, pero lo más largos posible. ¿De qué longitud debe cortar los trozos? ¿Cuántos trozos le salen de cada una de las cuerdas?

b. En el barrio, un vendedor de helados pasa cada ocho días, uno de frutas pasa cada 12 días y uno comidas rápidas cada 20 días. Si hoy pasaron los tres, ¿cuánto tiempo después volverán a encontrarse los tres en el barrio? ¿Durante ese tiempo, cuántas veces pasan cada uno por el barrio?
c. En la oficina hay tres trabajadores, Juan, Pedro y María. Juan toma tinto cada 30 minutos, Pedro cada 20 minutos y María cada 15 minutos. Si se toman el primer tinto de la mañana juntos, ¿después de cuánto tiempo se vuelven a encontrar los tres para tomarse el tinto?
d. El municipio compró tres terrenos con áreas de 160, 280 y 480 hectáreas, respectivamente, los cuales se quieren dividir en lotes iguales con la mayor superficie posible para construir proyectos de vivienda. ¿Cuál debe ser el área de estos lotes? ¿Cuántos lotes salen de cada terreno?

4. Observe el video "¿quién inventó los números?"", que encontrará siguiendo el vínculo: https://www.youtube.com/watch?v=2GzNRY2iYNg Enuncie cinco ideas que considere más importantes de las expuestas en el video.

5. Responda falso o verdadero a las siguientes afirmaciones, y justifique cada una de sus respuestas.

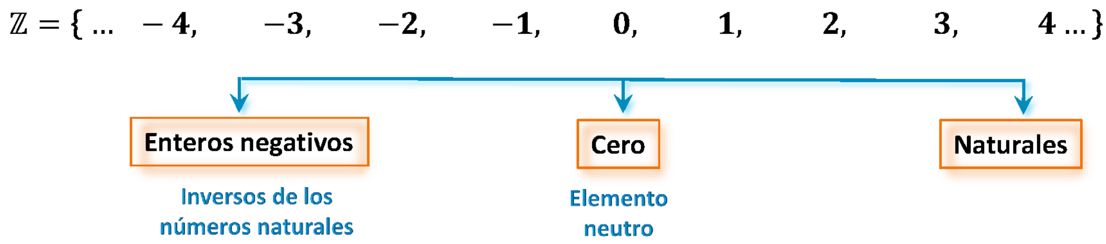
   a. El 9 es un número primo, puesto que es impar.
   b. Si m representa a un número par y n a uno impar, entonces el número que resulta de la operación: $3m + 2n$ es un número par.
   c. El mínimo común múltiplo de los números $28, 35$ y 56 es el 7.
   d. Al descomponer el 24 en factores primos, se puede observar que sólo el 2 y el 3 lo dividen exactamente, es decir, son sus únicos divisores.
   e. El -12 es un número compuesto.

1.2. Números enteros

El conjunto de los números enteros denotado con la letra $\mathbb{Z}$, es aquel conformado por los números naturales, el cero y los opuestos o negativos de los números naturales. Este conjunto se puede escribir por extensión, tal y como se observa en la figura 6.

Figura 6

Números enteros



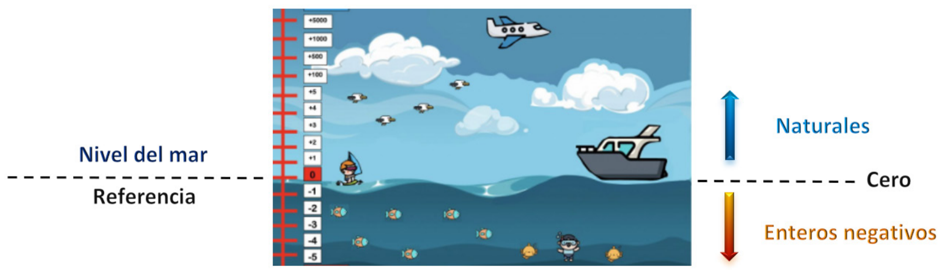
Fuente: elaboración propia (2022).

El conjunto de los números enteros se caracteriza porque no tiene primer elemento ni último, y porque todos los números que lo conforman tienen antecedente y consecuente. Al igual que el conjunto de los números naturales, este es un conjunto discreto, es decir que entre dos números enteros consecutivos no existe otro número entero. De esta forma, si a y b son números enteros consecutivos cualquiera, donde a es menor que b $(a < b)$, entonces $b - a = 1$.

En el ámbito de la Física, los números enteros se pueden concebir a partir del establecimiento de un sistema de referencia, tal como se muestra en la figura 7.

Figura 7

Ejemplo de sistema de referencia para números enteros



Fuente: https://piruletea.com/los-numeros-enteros

1.2.1. Operaciones con números enteros

1.2.1.1. Suma y resta

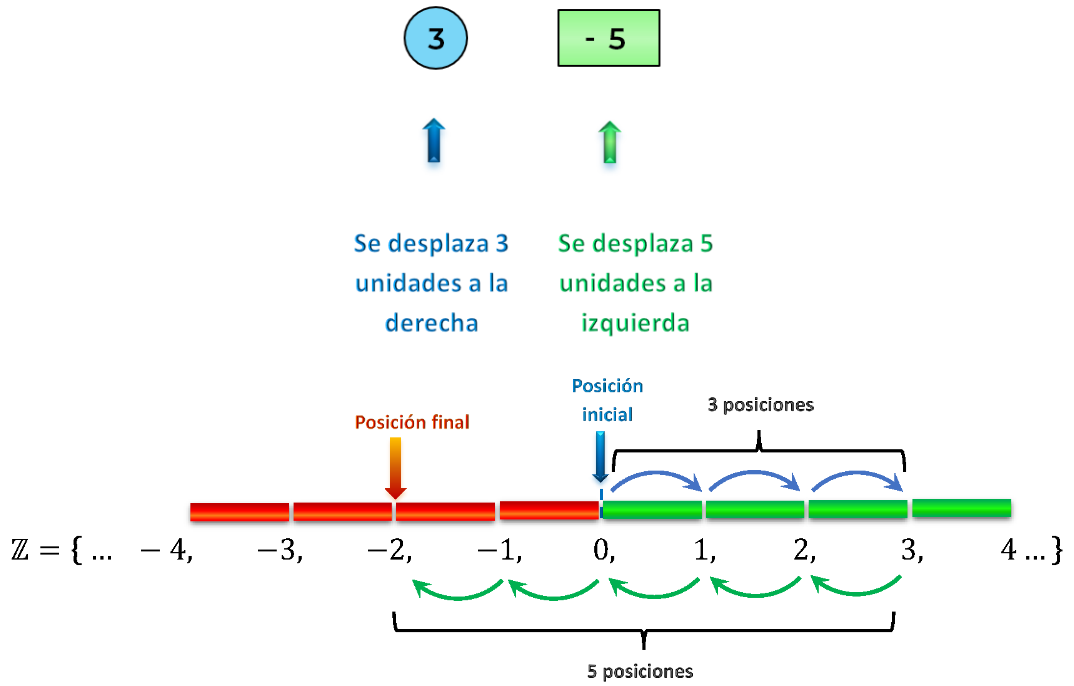
Para sumar y restar números enteros, en principio se puede realizar en la recta numérica de la siguiente forma:

Paso 1. Se identifica la posición correspondiente al número cero en la recta numérica (posición inicial).

Paso 2. A partir de la posición cero o posición inicial, se desplazan las unidades indicadas en la operación de la siguiente manera: si el número es positivo, el desplazamiento se hace hacia la derecha, y si el número es negativo entonces el desplazamiento se hace hacia la izquierda, tal como se muestra en el ejemplo de la figura 8.

Figura 8

Suma y resta de números enteros



Fuente: elaboración propia (2022).

Así, para hallar el resultado de la resta $3-5$, partiendo de la posición cero se desplaza primero 3 unidades a la derecha y luego desde ahí 5 unidades hacia la izquierda. De esta forma la posición final es el resultado de la operación:

$$3-5=-2$$

Cabe mencionar que si primero se hubiera desplazado 5 unidades hacia la izquierda y luego 3 a la derecha, la posición final sigue siendo la misma.

Sumar y restar en la recta numérica es sencillo, siempre y cuando se trate de números pequeños; sin embargo, para sumar y restar números muy grandes o incluso varios números, representarlos en la recta numérica y proceder a contar posiciones puede ser muy complejo, y de ahí que se utilice otro tipo de procedimiento.

Así, para sumar y restar números enteros, se puede proceder de la siguiente manera:

Signos iguales

Cuando los dos números tienen signos iguales entonces se suman y se conserva el signo.

Ejemplo: $-345 - 256$

$$\begin{array}{r} 345\ + \\ 256 \\ \hline 601 \end{array}$$

$$-345 - 256 = -601$$

Signos distintos

Cuando los dos números tienen signos distintos entonces al mayor (sin considerar el signo) se le resta el menor y se coloca el signo del mayor.

Ejemplo: $126 - 572$

$$\begin{array}{r} 572\ - \\ 126 \\ \hline 446 \end{array}$$

$$126 - 572 = -446$$

Advertencia

Al sumar o restar números enteros, no se aplican las leyes de los signos: estas sólo son válidas para las multiplicaciones y divisiones.

1.2.1.2. Multiplicación y división

Para multiplicar y dividir números enteros, se utilizan las propiedades del inverso para el producto o las también llamadas «leyes de los signos»:

- $-(-u) = u$
- $(-u).v = u.(-v) = -u.v$
- $(-u).(-v) = u.v$
- $(-1).u = -u$

De esta forma, si se van a multiplicar dos o más números enteros, se procede aplicando primero las leyes de los signos y luego efectuando el producto de los números, tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$2 \times (-5) \times (-4) \times (-3)$$

$u.(-v) = -u.v$

$$(-) \qquad (-)$$

$(-u).(-v) = u.v$

$$(+) \qquad (-)$$

$u.(-v) = -u.v$

$$(-)(2 \times 5 \times 4 \times 3) = -120$$

Observación

Cuando un entero negativo se va a multiplicar con otros números, se recomienda escribirlo entre paréntesis para evitar confusiones con la operación resta.

1.3. Números racionales

El conjunto de los números racionales representado por la letra $\mathbb{Q}$, lo conforman aquellos números que se pueden escribir de la forma: $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$, con a y b números enteros, y donde a recibe el nombre de numerador y b el de denominador.

a ⟵ **Numerador:** Representa el número de partes que se toman de la partición.

b ⟵ **Denominador:** Representa al número de partes iguales en las que se divide la unidad.

Ejemplo:

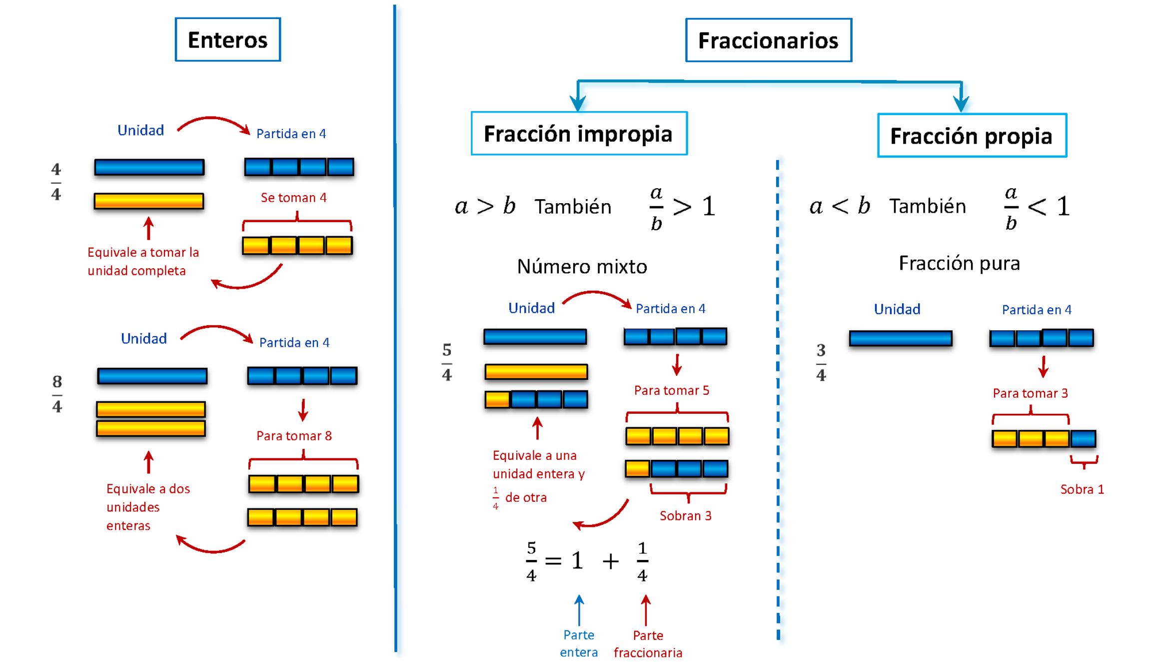
2 ⟵ Numerador

3 ⟵ Denominador

Los números racionales se clasifican en dos grupos: los números enteros y los fraccionarios. Estos últimos a su vez se clasifican en fracciones impropias o números mixtos, y fracciones propias o fracción pura, como puede apreciarse en la figura 9.

Figura 9

Clasificación de los números racionales



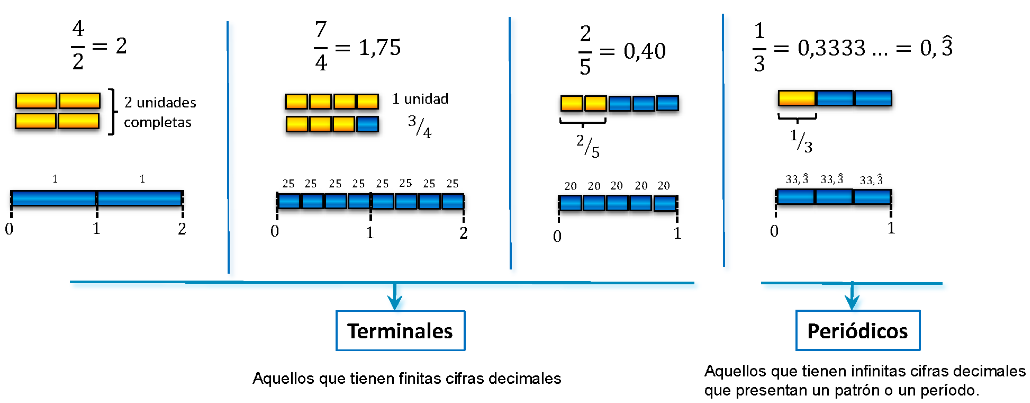
Fuente: elaboración propia (2022).

Los números racionales también se pueden escribir en forma decimal, es decir, en un sistema en base 10, tal como se muestra en la figura 10.

Figura 10

Números racionales escritos en forma decimal

ENTEROS						.	DECIMALES				
Centenas de mil	Decenas de mil	Unidades de mil	Centenas	Decenas	Unidades		décimas	centésimas	milésimas	diezmilésimas	cienmilésimas
100000	10000	1000	100	10	1	Punto	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{100000}$
							0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001



Fuente: elaboración propia (2022).

Al escribir los números racionales en forma decimal, estos se clasifican en dos grupos: los racionales terminales que son aquellos que tienen finitas cifras decimales, y los racionales periódicos que son aquellos que tienen infinitas cifras decimales que presentan un patrón o un período.

1.3.1. Operaciones con números racionales

1.3.1.1. Amplificación

La amplificación es la operación mediante la cual un número racional se escribe como la razón, con números enteros más grandes. Para amplificar un número racional basta con multiplicar tanto el numerador como el denominador por un número entero cualquiera, tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

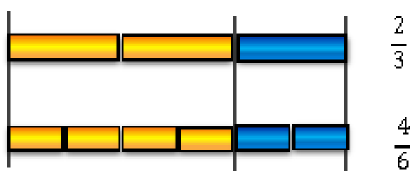
$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{4}{6}$$

$$a \times 1 = a$$

En el ejemplo anterior nótese que multiplicar por $\frac{2}{2}$ equivale a multiplicar por 1, y teniendo en cuenta la propiedad modulativa para el producto, se puede afirmar que $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. Así los números y son fracciones equivalentes, es decir, fracciones que representan la misma cantidad, como se puede observar gráficamente en la figura 11.

Figura 11

Fracciones equivalentes



Fuente: elaboración propia (2022).

De esta forma, las fracciones equivalentes pueden obtenerse por amplificación o simplificación.

1.3.1.2. Simplificación

La simplificación es la operación mediante la cual un número racional se escribe como la razón, con números enteros más pequeños. Para simplificar un número racional, se procede de la siguiente forma:

Paso 1. Se descompone en factores primos tanto el numerador como el denominador.

Paso 2. Se aplica la propiedad invertiva para el producto, es decir, $\frac{a}{a} = 1$

Ejemplo:

$$\frac{30}{42} \underbrace{=}_{\text{Paso 1}} \frac{2 \times 3 \times 5}{2 \times 3 \times 7} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}} \times \frac{5}{7} \overset{\text{Paso 2}}{=} 1 \times 1 \times \frac{5}{7} = \frac{5}{7}$$

1.3.1.3. Suma y resta

a. De igual denominador

Para sumar y restar números racionales que tienen el mismo denominador, basta con dejar el mismo denominador y sumar los numeradores, siguiendo el mismo procedimiento presentado para los números enteros, tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$\underbrace{\frac{2}{5} - \frac{13}{5} - \frac{1}{5} + \frac{4}{5}}_{} = \frac{\overbrace{2 - 13 - 1 + 4}^{}}{5} = -\frac{8}{5}$$

b. Distinto denominador

Cuando los números racionales tienen distinto denominador, se procede de la siguiente manera:

Paso 1. Determinar el común denominador, el cual está dado por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Paso 2. Se divide el común denominador por el denominador de cada uno de los números racionales y su resultado se multiplica por el numerador correspondiente.

Paso 3. Se suman o restan los números obtenidos en el paso 2.

Ejemplo: realice la siguiente operación:

$$\frac{7}{20}-\frac{4}{15}$$

Paso 1

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$20 = 2\times 2\times 5 \qquad 15 = 3\times 5$$

$$m.c.m = 2\times 2\times 3\times 5 = 60$$

Paso 2

$$\frac{7}{20}-\frac{4}{15}=\frac{21-16}{60}$$

Paso 3

$$\frac{21-16}{60}=\frac{5}{60}$$

1.3.1.4. Multiplicación y división

a. Multiplicación

Para multiplicar números racionales inicialmente y en lo posible, se procede a simplificarlos: se factorizan los numeradores y denominadores de todos los números involucrados en la multiplicación, para luego aplicar la propiedad invertiva.

Una vez efectuada la simplificación se multiplica «derecho», esto es, numeradores con numeradores y denominadores con denominadores. Si en la multiplicación hay racionales negativos, se procede entonces aplicando primero las leyes de los signos y luego efectuando el producto de los números, así como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$\frac{12}{35}\times\left(-\frac{3}{4}\right)\times\frac{10}{21}=\frac{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{3}}{\cancel{5}\times 7}\times\left(-\frac{3}{\cancel{2}\times\cancel{2}}\right)\times\frac{2\times\cancel{5}}{\cancel{3}\times 7}=-\frac{3\times 2}{7\times 7}=-\frac{6}{49}$$

Simplificación

Leyes de los signos

Multiplicación "derecho"

b. División

Para dividir números racionales, se escribe la división como una multiplicación, multiplicando por el inverso multiplicativo o el recíproco del número por el cual se va a dividir, y luego se efectúa la multiplicación de acuerdo con el procedimiento propuesto en el numeral anterior. Se define entonces el *recíproco* de un número, como aquel que al multiplicarlo por dicho número da como resultado 1. Así, el recíproco de un número racional $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$, con a y $b \neq 0$. Si se trata de un número entero «a», entonces su recíproco es $\frac{1}{a}$, con $a \neq 0$.

Ejemplo:

Simplificación

$$\frac{5}{18} \div \frac{2}{15} \div \frac{10}{4} = \frac{5}{18} \otimes \frac{15}{2} \otimes \frac{4}{10} = \frac{\cancel{5}}{2 \times \cancel{3} \times 3} \times \frac{\cancel{3} \times 5}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2} \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times \cancel{5}} = \frac{5}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$$

Recíproco de $\frac{2}{15}$ — Recíproco de $\frac{10}{4}$

Multiplicación "derecho"

Observación

Cuando en cualquiera de las operaciones entre números racionales se encuentra un número entero, antes de comenzar a efectuar la operación indicada se escribe el número entero como un racional, colocando en su denominador el 1. Lo anterior se fundamenta en la propiedad modulativa para el producto, donde cualquier número dividido por 1 da como resultado el mismo número, es decir, $\frac{a}{1} = a$.

Ejemplo 1: Amplifique cinco veces el número -7

$$-7 = -\frac{7}{1} \times \frac{5}{5} = -\frac{35}{5}$$

Factor de amplificación

Ejemplo 2: resuelva la siguiente operación: $\frac{3}{5}+\frac{7}{2}-4$

Escribir el entero en su forma racional $\frac{a}{b}$

$$\frac{3}{5}+\frac{7}{2}-4=\frac{3}{5}+\frac{7}{2}-\frac{4}{1}=\frac{3}{5}+\frac{7}{2}-\frac{4}{1}=\frac{6+35-40}{10}=\frac{1}{10}$$

Aplicar la propiedad modulativa $\frac{a}{1}=a$

Actividades de trabajo independiente 2

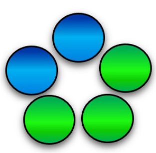
1. Teniendo como referencia los conceptos estudiados, resuelva los ejercicios propuestos en los numerales del *a* al *e*.

   a. Las fracciones equivalentes son aquellas que representan la misma cantidad. Estas fracciones se construyen multiplicando el numerador y el denominador por un mismo número, es decir, $\frac{a}{b}\times\frac{k}{k}=\frac{ak}{bk}$. De acuerdo con esto, proponga tres fracciones que sean equivalentes y represéntelas gráficamente.

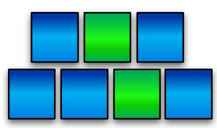
   b. Escoja un numero entero negativo y escríbalo en su forma racional, es decir, de la forma $\frac{a}{b}$, donde $b\neq 1$.

   c. Represente gráficamente el número $\frac{7}{5}$ y escríbalo en forma decimal.

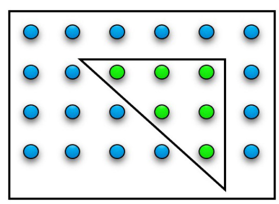
   d. Dadas las siguientes gráficas, escriba un número racional que represente la porción en color verde.



i.



ii.



iii.

   e. El recíproco de un número racional $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$ porque se cumple $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$ con a y $b\neq 0$. Si se trata de un número entero «a», entonces su recíproco es $\frac{1}{a}$, con $a\neq 0$.
   De acuerdo con lo anterior, complete la siguiente tabla:

Número	Recíproco
$\mathbf{5}$	
	$\frac{2}{3}$
$-\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{7}}$	
$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$	
	$-a$
	1
$\mathbf{2}+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$	

2. Efectúe las operaciones que se indican a continuación y simplifique su respuesta en aquellos que sea posible:

   a. Utilizando la recta numérica, halle el valor de: $-10+15-3-4+8-1$

   b. Si $x=2$, $y=-3$, $z=-7$ y $w=4$, determine el valor de: $z-w+x-y$

   c. Resuelva: $365-427-12+524-147-225$

   d. $\frac{(-15)(-2)(-7)(4)}{(-12)(-5)}=$

   e. Simplifique los siguientes números: $\frac{40}{125}, \frac{420}{1400}, \frac{156}{264}$

   f. El resultado de $\frac{2}{3}-\frac{11}{3}-\frac{7}{3}+\frac{5}{3}-\frac{1}{3}$ es:

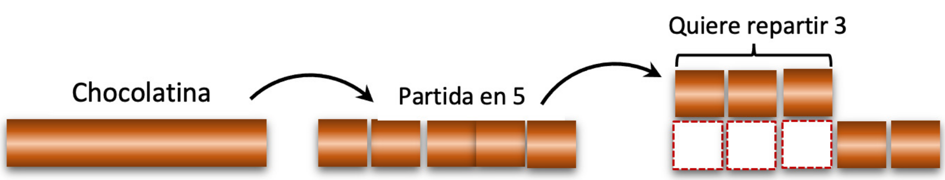
   g. $-1+\frac{2}{15}-\frac{7}{20}-\frac{4}{3}$

   h. $6\times\left(-\frac{4}{9}\right)\times\frac{1}{24}\times\frac{20}{35}$

   i. $\frac{2}{15}\div\frac{7}{27}\div(-8)$

3. Para las situaciones que se plantean a continuación, seleccione la respuesta correcta:

   a. Andrés tiene una chocolatina que divide en cinco pedazos iguales, de los cuales piensa regalar de a un pedazo a tres de sus amigos, quedándose él con dos de ellos, de la siguiente forma:



Luego llegan otros amigos, por lo que le toca dividir la chocolatina en más de cinco pedazos iguales. Si Andrés se quiere quedar con la misma porción de chocolatina del principio, ¿en cuántos pedazos le tocará dividir la chocolatina y al final a cuántos amigos les va a compartir de a un pedazo?

i. La puede dividir en 10 pedazos y repartir de a un pedazo a 8 amigos.
ii. La puede dividir en 15 pedazos y repartir de a un pedazo a 9 amigos.
iii. La puede dividir en 8 pedazos y repartir de a un pedazo a 6 amigos.
iv. La puede dividir en 12 pedazos y repartir de a un pedazo a 10 amigos.

b. En una obra, tres trabajadores deben construir un muro de adobe. Uno de ellos construye $\frac{1}{5}$ del muro, el segundo los $\frac{3}{8}$. Entonces la operación que se debe hacer para hallar la porción del muro que le toca construir al tercer trabajador, es:

i. $\frac{1}{5} + \frac{3}{8}$
ii. $1 - \frac{1}{5} + \frac{3}{8}$
iii. $1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{8}$
iv. $\frac{1}{5} + \frac{3}{8} - 1$

c. Todos los días, despachan desde una carnicería a un puesto de hamburguesas, tres bolsas de $\frac{7}{4}$ de kilo de carne molida. Si para fabricar una hamburguesa se requiere de $\frac{1}{12}$ de kilo de carne, la operación que permite hallar el número de hamburguesas que se pueden vender en el puesto cada día, es:

i. $3 \times \frac{7}{4} \times \frac{1}{12}$
ii. $\frac{7}{4} \div 3 \times \frac{1}{12}$
iii. $3 \div \frac{7}{4} \div \frac{1}{12}$
iv. $3 \times \frac{7}{4} \div \frac{1}{12}$

4. Observe detenidamente los videos que encontrará siguiendo los vínculos que se muestran a continuación, referidos a cómo escribir un número racional desde su forma decimal a la forma $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$.

De decimal terminal a fracción: https://www.youtube.com/watch?v=F5TT9lzXJW8

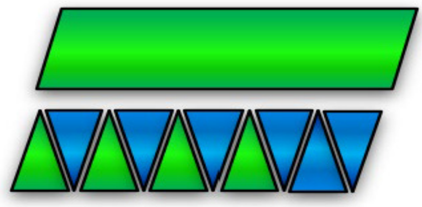
De periódico puro a fracción: https://www.youtube.com/watch?v=HgLY1hHF1JQ

Conforme a lo estudiado, escriba los siguientes números en la forma $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$.

a. $0{,}125$
b. $2{,}\hat{6}$
c. $1{,}75$
d. $0{,}9\widehat{18}$

Consulte y explique cómo escribiría en la forma $\frac{a}{b}$ el número $3{,}2\widehat{16}$

5. A partir de la figura que se presenta a continuación, resuelva las preguntas dadas en los numerales del a al e.



a. ¿Cuál es la fracción que se representa en la figura?
b. Escriba dicha fracción en su forma decimal.
c. ¿La figura representa una fracción propia o impropia?
d. Si se considera solo la parte inferior de la figura, ¿cuál es la fracción que se representa con la porción coloreada en azul? ¿Esta fracción a qué porcentaje equivale?
e. Compruebe que el resultado de la operación $2 - \frac{7}{5}$ está representando la porción de la figura coloreada en azul.

1.4. Números irracionales

El conjunto de los números irracionales denotado con la letra $\mathbb{Q}^*$, está conformado por aquellos números que no se pueden escribir de la forma $\frac{a}{b}$, con a y b números enteros y $b \neq 0$, es decir, no son racionales, y por lo tanto al escribirlos en su forma decimal no son ni terminales ni periódicos, esto es, que tienen infinitas cifras decimales que no tienen un período específico.

Así, el conjunto de los números irracionales se divide en dos subconjuntos o tipos de números: los básicos o algebraicos y los trascendentes, como puede observarse en la figura 12.

Figura 12

Números irracionales

Básicos o Algebraicos

Aquellos que son la raíz cuadrada de los números naturales **excepto** los cuadrados perfectos.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10} \ldots$

Trascendentes

$\pi = 3{,}14159265358979323846\ldots$

$e = 2{,}71828182845904523536\ldots$

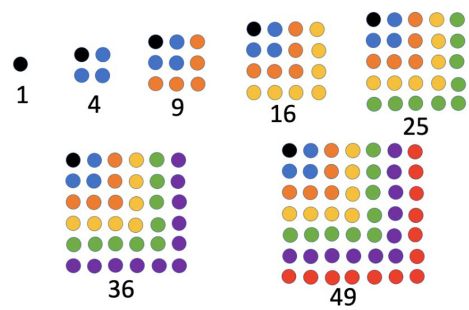
Fuente: elaboración propia (2022).

Observación

Un número cuadrado perfecto es aquel que resulta de multiplicar un número natural por sí mismo. Estos números reciben el nombre de «cuadrados», porque se pueden representar como puntos colocados de tal manera que se forma un cuadrado, como puede apreciarse en la figura 13.

Figura 13

Números cuadrados perfectos



Fuente: https://jaime.gia.ec/pitagoras-los-numeros-y-su-teorema/

Por lo anterior, si por ejemplo $3^2 = 9$ entonces $\sqrt{9} = 3$, donde 3 es un número natural, entero y racional, por ende no es irracional.

Una de las propiedades de los cuadrados perfectos, es que el n-ésimo número cuadrado n^2 es igual a la suma de los n primeros números impares, así:

$2^2 = 1 + 3 = 4$

$3^2 = 1 + 3 + 5 = 9$

$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$

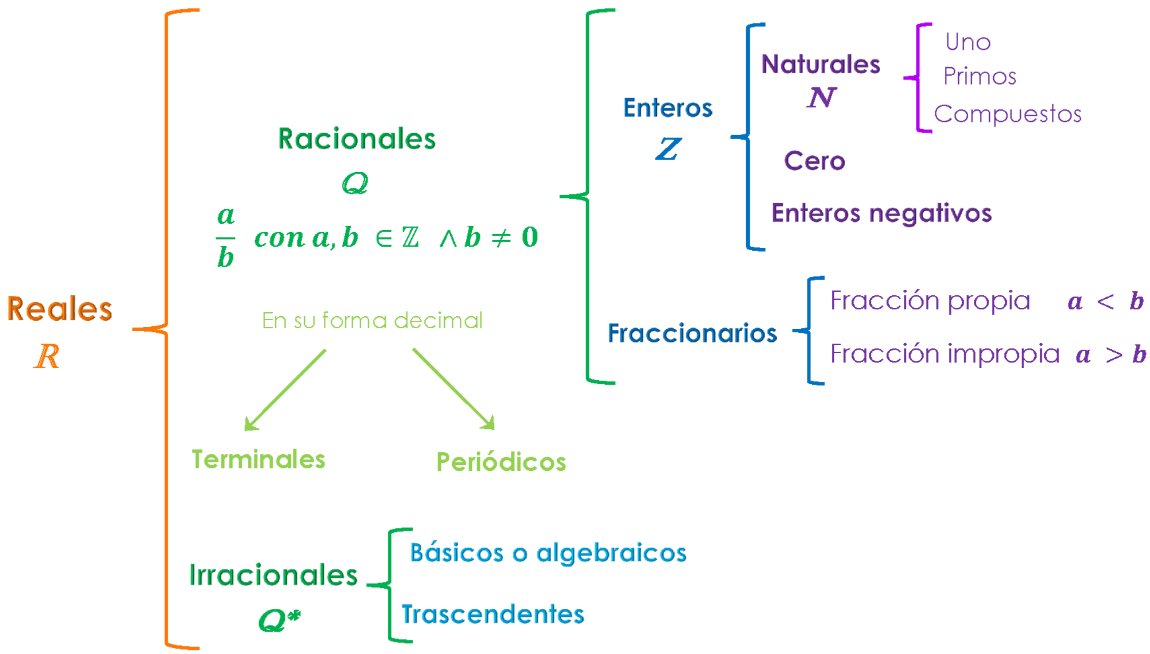
$\vdots$

1.5. Números reales

El conjunto de los números reales denotado con la letra $\mathbb{R}$, está conformado por la unión de los números racionales y los números irracionales, conforme se muestra en la figura 14.

Figura 14

Números reales



Fuente: elaboración propia (2022).

En el esquema anterior puede observarse, por ejemplo, que los números naturales son igualmente números enteros y también números racionales, puesto que se pueden expresar de la forma $\frac{a}{b}$ con a y b números enteros y $b \neq 0$. Lo anterior implica que ningún número natural es a su vez irracional. Algo similar sucede con los enteros y fraccionarios.

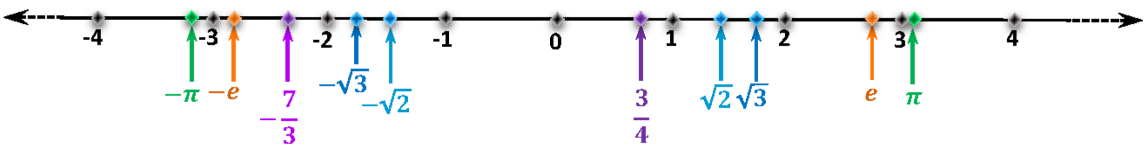
El conjunto de los números reales se caracteriza en primer lugar por ser un conjunto continuo, es decir, entre un número real y otro existen infinitos números reales. De lo anterior se puede afirmar que este conjunto está conformado por infinitos números dispuestos en un orden específico de acuerdo con su magnitud, y se representen con la letra x.

1.5.1. Representación de los números reales en la recta numérica

Los números reales se representan gráficamente en la recta numérica. Dicha recta está formada por infinitos puntos dispuestos sucesivamente en una misma dirección, en donde a cada uno de ellos se le asigna un número real mediante una relación biunívoca entre un punto de la recta y un número real, es decir, en la cual a cada punto le corresponde uno y sólo uno de los números reales y a cada número real le corresponde uno y sólo uno de los puntos que conforman la recta numérica, tal y como se muestra en la figura 15.

Figura 15

Representación de algunos números reales en la recta numérica

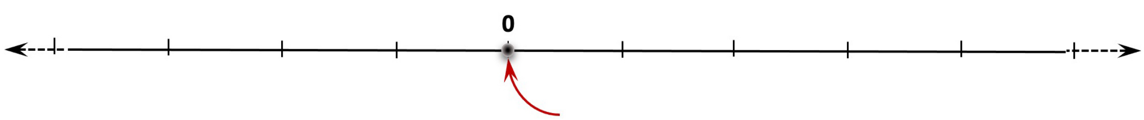


Fuente: elaboración propia (2022).

La ubicación de los números reales en la recta numérica comienza con los números enteros, trazando una línea recta dividida en varios segmentos de igual longitud. Posteriormente se escoge uno de los segmentos centrales en los que se dividió la recta y en su punto inicial se coloca el número cero, tal como se muestra en la figura 16.

Figura 16

Ubicación del cero en la recta numérica

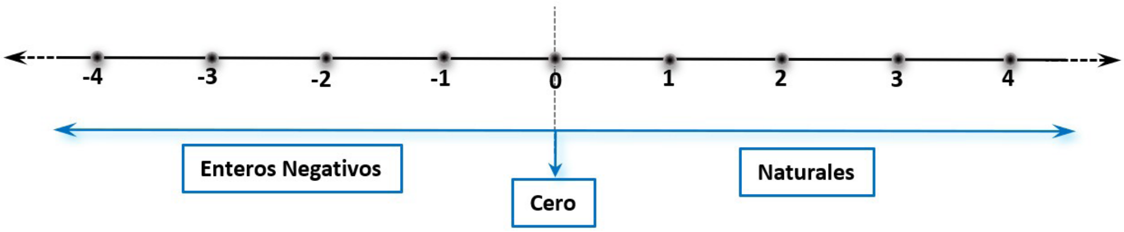


Fuente: elaboración propia(2022).

Así, al final de cada segmento y a la derecha del cero, se ubican los números naturales conforme al orden establecido en el conteo. Luego, teniendo el cero como «espejo», a la izquierda de este se ubican los inversos de los números naturales, es decir los enteros negativos, tal como puede apreciarse en la figura 17.

Figura 17

Ubicación de los números enteros en la recta numérica



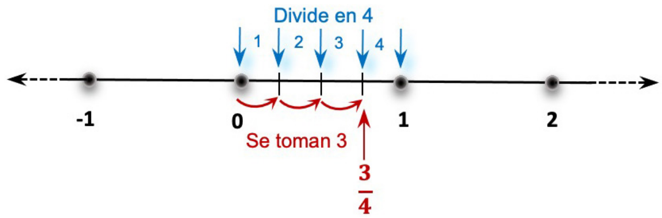
Fuente: elaboración propia (2022).

Para ubicar los números fraccionarios en la recta numérica, se retoma la definición de número racional como aquellos de la forma: $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$, con a y b números enteros, donde b recibe el nombre de denominador y representa al número de partes iguales en que se divide la unidad, y a el de numerador, representando así el número de partes que se toman de dicha división.

De esta manera si se va a representar una fracción propia, por ejemplo $\frac{3}{4}$, se parte de la posición correspondiente al número cero en la recta numérica donde previamente se encuentran ubicados los números enteros, y como el $\frac{3}{4}$ es un número positivo, se divide la primera unidad a la derecha del cero en cuatro segmentos iguales, de los cuales se cuentan tres a partir del cero. Así se ilustra en la figura 18.

Figura 18

Ubicación de una fracción propia en la recta numérica

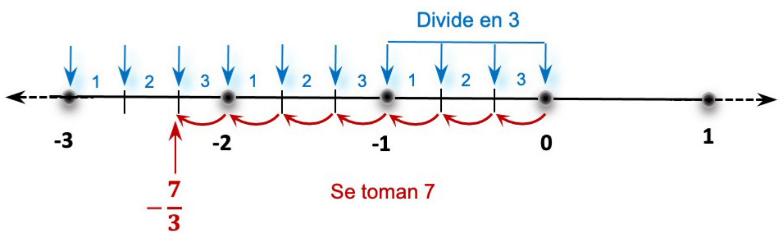


Fuente: elaboración propia (2022).

Para representar una fracción impropia, esta vez negativa como por ejemplo $-\frac{7}{3}$, se procede de manera similar, es decir, desde la posición del cero se divide el segmento que está inmediatamente a la izquierda de este en tres partes iguales. Dado que se deben tomar siete partes, lo cual es superior al número en que se dividió la unidad, se dividen igualmente en tres partes cada uno de los dos segmentos que le siguen y, a partir del cero, se cuentan siete pedazos hacia la izquierda tal como se muestra en la figura 19.

Figura 19

Ubicación de una fracción impropia negativa en la recta numérica



Fuente: elaboración propia (2022).

La representación de números irracionales en la recta numérica se hace de manera geométrica, utilizando para ello el teorema de Pitágoras. En el video cuyo vínculo se indica a continuación, se encuentra una explicación detallada de cómo se procede en tal caso: https://www.youtube.com/watch?v=HeQAE4bbVjc

1.5.2. Relaciones de orden de los números reales

Cuando los números reales se representan en la recta numérica conforme a un orden determinado, es posible establecer entre ellos unas relaciones de orden o comparaciones según uno sea mayor, menor o igual que otro. De esta forma, al comparar dos números reales a y b sólo se puede cumplir una de las siguientes situaciones:

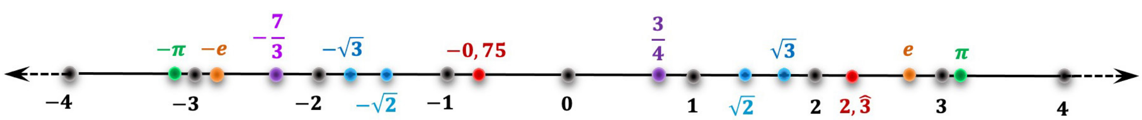
Que a sea ***menor*** que b, en lenguaje simbólico se escribe como $a < b$.

Que a sea ***mayor*** que b, en lenguaje simbólico se escribe como $a > b$.

Que a sea ***igual*** que b, en lenguaje simbólico se escribe como $a = b$.

Así, para comparar un número real con otros, basta con ubicarlo en la recta numérica, donde se puede constatar que los números más grandes que él se encuentran localizados a su derecha y los más pequeños a su izquierda. En general, dados dos números reales cualquiera a y b , si la diferencia $(a-b)$ es un número real positivo, entonces $a > b$.

Considere por ejemplo la siguiente recta numérica, donde se encuentran ubicados algunos números reales:



Si se quiere comparar en términos de las relaciones de orden el número $\frac{3}{4}$ con $\sqrt{3}$, se puede observar que el $\sqrt{3}$ se encuentra más a la derecha que el $\frac{3}{4}$ y de ahí que el $\sqrt{3}$ sea mayor que el $\frac{3}{4}$, lo cual en lenguaje simbólico se expresa como $\sqrt{3} > \frac{3}{4}$.

Para facilitar la escritura de estas relaciones en lenguaje simbólico, se puede hacer una analogía entre el símbolo > o < con la punta de una flecha que siempre va a señalar al número más pequeño, tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

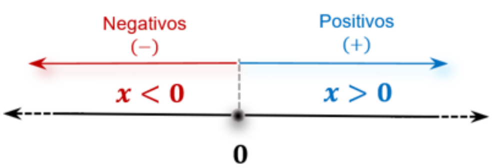
En la recta numérica el -2 se encuentra a la izquierda del $-0,75$, y por lo tanto -2 es mas pequeño que $-0,75$. Esto en lenguaje simbólico se escribe como:

$$-2 \quad < \quad -0,75$$

La punta de la flecha señala al número menor

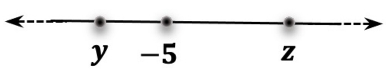
Teniendo como referencia el cero en la recta numérica, se puede observar que los números ubicados a su derecha son positivos y por lo tanto éstos son mayores que él. De la misma manera, los números que están a la izquierda del cero son negativos y de ahí que éstos sean menores que él.

De lo anterior se puede decir que si x representa a un número real cualquiera, entonces en lenguaje simbólico los números reales positivos se escriben como $\boldsymbol{x > 0}$, y los negativos como $\boldsymbol{x < 0}$. De forma gráfica se puede representar como se muestra a continuación:



Observación

Es posible que no se conozca el valor de los números, pero si se conoce su posición en la recta numérica, se puede establecer la relación de orden. En la siguiente gráfica se presenta la disposición de tres números reales en la recta numérica, en donde a dos de ellos no les asignaron valor y por tanto pueden representar a cualquier número que cumpla la relación de orden propuesta en la recta:



Teniendo como referencia esta recta, se puede afirmar lo siguiente:

- $y < -5$
- $z > -5$ y $z > y$
- El hecho de que z se encuentre a la derecha de -5 no necesariamente implica que z sea un número positivo, puesto que z al ser mayor que -5 podría tomar el valor de -3 o -1, incluso el valor de cero.

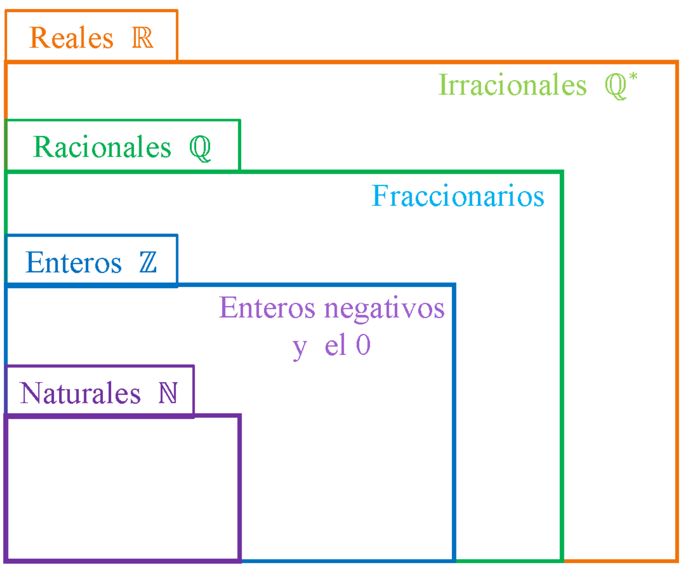
Actividades de trabajo independiente 3

1. Teniendo como referencia los conceptos estudiados hasta el momento, resuelva los ejercicios propuestos en los numerales del *a* al *f*.

   Dé tres ejemplos de números que satisfagan la condición dada

   a. Números reales positivos, pero no naturales.
   b. Números racionales, pero no enteros.
   c. Fracciones propias mayores que -1.
   d. Números enteros, pero no compuestos.
   e. Fracciones impropias mayores que 2.
   f. Números irracionales básicos negativos.

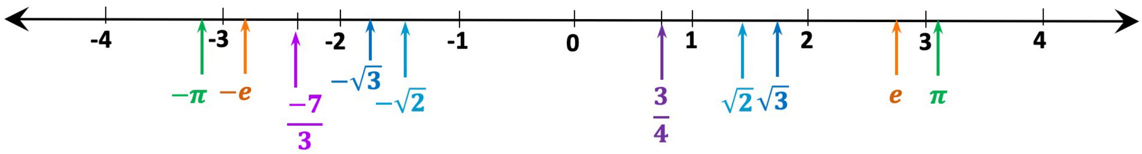
2. En el cuadro que se presenta a continuación, ubique los siguientes números reales conforme al conjunto numérico que pertenezcan.



Números reales

-3	$-\pi$
$2{,}5$	2^3
$\frac{10}{5}$	$2\sqrt{3}$
e	$0,\widehat{45}$
0	$-\sqrt{8}$
$\sqrt{16}$	6
$-\frac{7}{3}$	-1
	$3{,}1416$

3. Teniendo como referencia la recta numérica que se presenta a continuación, compare las siguientes parejas de números reales utilizando las relaciones de igualdad $(=)$ y desigualdad $(<, >)$.



6 ____ 2	e ____ $\sqrt{2}$	$-\sqrt{9}$ ____ -3
-1 ____ -5	π ____ $-\pi$	$0{,}6$ ____ $0{,}\hat{6}$
$-\frac{7}{3}$ ____ -2	$-\frac{20}{2}$ ____ -10	$-2{,}7$ ____ $-e$
-3 ____ 0	0 ____ 4	$-\frac{5}{5}$ ____ -1

4. A partir de la representación de los números reales en la recta numérica y las relaciones de orden, complete los enunciados que se presentan a continuación:

a. Si x es un número a la izquierda de 4, en lenguaje simbólico esto se escribe: ______.

b. Si $x > -2$, entonces -2 se encuentra al lado____________de x.

c. Si $x < 0$ entonces $-x$________0.

d. Si $-1 > x$ eso implica que x es un número__________.

5. De acuerdo con lo estudiado, represente en una recta numérica cada uno de los siguientes grupos de números:

a. $0, 4, -7, -10, 3, -1$

b. $\frac{3}{5}, -\frac{1}{4}, \frac{7}{2}, -\frac{12}{6}, \frac{4}{4}, -1\frac{2}{3}$

c. $1.25, -0.6, 1.3, 1.\hat{3}, -2.5\hat{8}, 4.\hat{9}$ Sugerencia: escríbalos de la forma $\frac{a}{b}$

d. $\sqrt{3}, -\sqrt{5}, 3\sqrt{2}$

En los numerales del 6 al 9, seleccione la respuesta correcta.

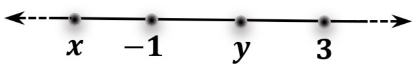
6. Del número $\frac{\sqrt{64}}{8}$ se puede decir que:

   a. Es una fracción impropia o número mixto, puesto que $a > b$,
   b. Es un número irracional básico, puesto que en el numerador está la raíz cuadrada de un número natural.
   c. Es un número natural que no es ni primo ni compuesto.
   d. Es un número compuesto porque tiene más de dos divisores.

7. Si $x > 0$ y $y < 0$, se puede decir que:

   a. $x - y > 0$
   b. $x - y = 0$
   c. $x - y < 0$
   d. No se puede afirmar nada, puesto que no se conocen los valores de x ni de y.

8. Teniendo como referencia los números que se presentan en la recta numérica que se muestra a continuación, indique cuál de las siguientes afirmaciones es falsa.



   a. x representa a cualquier número menor que -1.
   b. Como $-1 < y$, entonces y representa necesariamente a un número positivo.
   c. $y > x$
   d. $3 > y > -1$

9. De acuerdo con las relaciones de orden, si $x = -\frac{7}{3}$ entonces se puede afirmar que:
   a. $x > -1$
   b. $x = -2,\hat{3}$
   c. x se encuentra a la derecha del -2
   d. x es mayor que $-\frac{1}{2}$

ANEXO 1

Repuestas de las actividades de trabajo independiente

Actividades de trabajo independiente 1

1.a. $n, n+1, n+2, n+3$
1.b. Par: $2n$ Impar: $2n+1$
1.c. Por ejemplo: $35, 21, 51, 243, 1875$
1.d.
- **i.** Es divisible entre 11
- **ii.** Es divisible entre 7
- **iii.** Por ejemplo: $300, 531, 711$

1.e. Por ejemplo: $75, 60, 95$

2.a. $m.c.m = 120$ y $m.c.d = 4$
2.b. $m.c.m = 60$ y $m.c.d = 5$
2.c. $m.c.m = 120$ y $m.c.d = 10$
2.d. $m.c.m = 180$ y $m.c.d = 3$
2.e. $m.c.m = 3360$ y $m.c.d = 40$
2.f. $m.c.m = 3900$ y $m.c.d = 25$

3.a. Trozos de 10 m. De la primera cuerda salen 6 trozos, de la segunda 3 y de la tercera 4.
3.b. Se encuentran cada 120 días. En ese tiempo el vendedor de helados pasa 15 veces, el de frutas 10 veces y el de comidas rápidas 6 veces.
3.c. Se encuentran cada 60 minutos (1 hora)
3.d. El área de los lotes es de 40 m^2. Del primer terreno se sacan 4 lotes, del segundo 7 y del tercero 12.

4.a. Falso
4.b. Verdadero
4.c. Falso
4.d. Falso
4.e. Falso

Actividades de trabajo independiente 2

1.a. Por ejemplo: $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{12}{15}$

1.b. Por ejemplo: $-3 = -\frac{15}{5}$

1.c. $\frac{7}{5} = 1.4$

1.d.

i. $\frac{3}{5}$

ii. $\frac{2}{7}$

iii. $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

1.e.

Número	Recíproco
5	$\frac{1}{5}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$
$-\frac{6}{7}$	$-\frac{7}{6}$
$\frac{1}{x}$	x
$-\frac{1}{a}$	$-a$
1	1
$2+\frac{3}{5}$	$\frac{5}{13}$

2.a 5

2.b -6

2.c 78

2.d -14

2.e $\frac{40}{125} = \frac{8}{25}$ $\frac{420}{1400} = \frac{3}{10}$ $\frac{156}{264} = \frac{13}{22}$

2.f -4

2.g $-\frac{51}{20}$

2.h $-\frac{4}{63}$

2.i $-\frac{9}{28}$

3.a Opción ii

3.b Opción iii

3.c Opción vi

4.a $0{,}125 = \frac{1}{8}$

4.b $2{,}\widehat{6} = \frac{8}{3}$

4.c $1{,}75 = \frac{7}{4}$

4.d $0{,}9\widehat{18} = \frac{34}{37}$

5.a $\frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

5.b $1{,}4$

5.c Impropia

5.d $\frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 60\%$

5.e $2 - \frac{7}{5} = \frac{3}{5}$

Actividades de trabajo independiente 3

1.a. Por ejemplo: $\sqrt{6}\,, \frac{4}{5}, \pi$

1.b. Por ejemplo: $-\frac{2}{3}, 0, \widehat{4}\,, \frac{25}{43}$

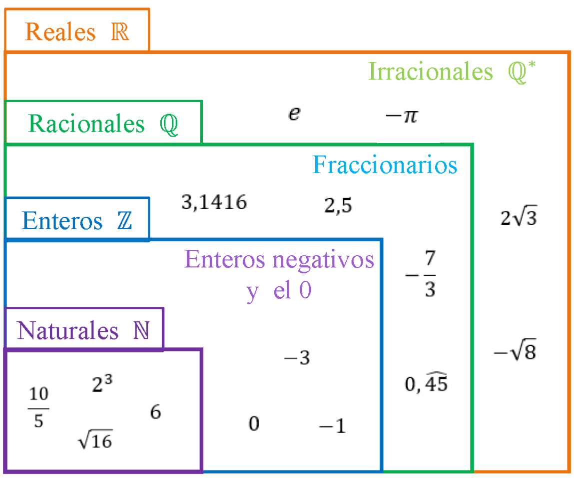
1.c. Por ejemplo: $-\frac{1}{5}, \frac{7}{8}, -\frac{4}{3}$

1.d. Por ejemplo: $5, 37, 41$

1.e. Por ejemplo: $\frac{16}{7}, \frac{23}{6}, \frac{10}{3}$

1.f. Por ejemplo: $-\sqrt{13}\,, 2\sqrt{5}\,, -\sqrt{10}$

2.



3.

$6 \;\underline{>}\; 2$	$e \;\underline{>}\; \sqrt{2}$	$-\sqrt{9} \;\underline{=}\; -3$
$-1 \;\underline{>}\; -5$	$\pi \;\underline{>}\; -\pi$	$0{,}6 \;\underline{<}\; 0{,}\widehat{6}$
$-\frac{7}{3} \;\underline{<}\; -2$	$-\frac{20}{2} \;\underline{=}\; -10$	$-2{,}7 \;\underline{>}\; -e$
$-3 \;\underline{<}\; 0$	$0 \;\underline{<}\; 4$	$-\frac{5}{5} \;\underline{=}\; -1$

4.a $x < 4$ **4.b** Izquierdo **4.c** $-x > 0$ **4.d** Negativo

6. Opción c **7.** Opción a **8.** Opción b **9.** Opción b

Referencias

Alarcón, S. González, M. (2015). *Matemáticas básicas. Guías de Trabajo Independiente*. Fondo Editorial ITM.

Miller, C. Vern, H. (1999). *Matemática: Razonamiento y Aplicaciones*. Editorial Pearson Educación.

SwokowskI, E. Cole, J. (2006). *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica*. Editorial Thomson.

Stewart, J. lothan, R. Saleem, W. (2007). *Precálculo*. Editorial Thomson.

Zill, D. Dewar, J. (2012). *Algebra, trigonometría y geometría analítica*. Editorial McGraw Hill.

UNIDAD 2

Propiedades de los números reales

2. Propiedades de los números reales

Cuando de las operaciones entre números reales se trata, deben tenerse en cuenta dos aspectos: el primero, dependiendo de la operación en que los números se encuentren implicados, no sólo adoptan una función muy específica dentro de la misma, sino que también reciben un nombre específico asociado a dicha función; y el segundo, que dichas operaciones están sometidas a unas propiedades, las cuales establecen qué se puede o no hacer en la ejecución de las mismas.

De acuerdo con lo anterior, y en relación con la función que desempeñan los números en una operación, se definen los conceptos que se presentan a continuación.

2.1. Definiciones

2.1.1. Término

Es el nombre que recibe un número cuando se opera con otro mediante la suma o la resta, por ejemplo:

$$\frac{2}{3} - 7 + \sqrt{5}$$

TÉRMINOS

El $\frac{2}{3}$ es un número racional fraccionario, pero al estar relacionado con otros números bajo sumas y restas recibe el nombre de «término», y su función en la expresión dada estará supeditada a las propiedades establecidas para dichas operaciones.

2.1.2. Factor

Es el nombre que recibe un número cuando se opera con otro, mediante la multiplicación o la división. Por ejemplo, en la siguiente expresión:

$$\frac{\frac{2}{3} \times 7}{\sqrt{5}}$$

FACTORES

Se aprecia que el $\frac{2}{3}$ sigue siendo un número racional fraccionario, pero al estar relacionado con otros números en una multiplicación recibe el nombre de «factor», y como tal su función dentro de la expresión estará condicionada por las propiedades establecidas para dicha operación.

Observación

Cuando un número funciona como factor en una operación, especialmente si es negativo, debe escribirse entre paréntesis para denotar claramente la relación entre los números, por ejemplo:

$$7-\frac{2}{3}+\sqrt{5} \qquad\qquad 7\left(-\frac{2}{3}\right)+\sqrt{5}$$

Resta
Término
Multiplicación
Factor

Dentro de las operaciones, los números ya sean términos o factores, tienen un contrario o un inverso, es decir, un número que dentro de la operación los anula o los cancela. Estos números son los inversos aditivos para los términos y los recíprocos para los factores.

2.1.3. Inverso o inverso aditivo

El inverso aditivo de un número es aquel que al sumarlo o restarlo con el número se obtiene el módulo de la suma o cero, esto es, $a+(-a)=0$. Para establecer el inverso de un número, basta con cambiar el signo del número de la siguiente manera:

$$\frac{2}{3} \xrightarrow{\text{Inverso}} -\frac{2}{3} \quad \text{porque} \quad \frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0$$

2.1.4. Recíproco o inverso multiplicativo

El recíproco de un número es aquel que al multiplicarlo o dividirlo con el número, se obtiene el módulo del producto o uno, esto es, $a\times(\frac{1}{a})=\frac{a}{a}=1$. Para establecer el recíproco de un número racional, basta con que el numerador y el denominador cambien de posición, como se observa en este ejemplo:

$$\frac{2}{3} \xrightarrow{\text{Recíproco}} \frac{3}{2} \quad \text{porque} \quad \frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{6}{6}=1$$

Si se trata de un número entero se escribe éste en su forma racional, y luego el numerador y el denominador cambian de posición de la siguiente manera:

$$7 \xrightarrow{\text{Se escribe:}} \frac{7}{1} \xrightarrow{\text{Recíproco}} \frac{1}{7} \quad \text{porque} \quad \frac{7}{1} \times \frac{1}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

Sobre los números reales se efectúan dos operaciones fundamentales: la suma y el producto o multiplicación. Lo anterior, teniendo en cuenta que la resta es una suma y la división una multiplicación.

Observación

La resta se constituye en una suma, cuando un número real cualquiera se suma con el inverso de otro número mediante la siguiente reescritura:

$$a - b = a + (-b)$$

Ejemplo:

$$7 - 3 \xrightarrow{\text{Se escribe:}} 7 + (-3) \quad \text{también} \quad -3 + 7$$

La división se constituye en un producto, cuando cualquier número real se multiplica con el recíproco de otro, de la siguiente manera:

$$a \div b = a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

Ejemplo:

$$7 \div 3 \xrightarrow{\text{Se escribe:}} 7 \times \frac{1}{3} \quad \text{también} \quad \frac{7}{3}$$

Así, la suma y la multiplicación están sujetas a unas reglas o propiedades que definen cual es el procedimiento y el orden válidos para la ejecución de dichas operaciones. Estas propiedades denominadas también como ***«propiedades de campo»*** son:

2.2. Propiedades

2.2.1. Propiedad clausurativa o de cerradura

El resultado de la suma o la multiplicación entre números reales es otro número real.

Ejemplo:

$$\underbrace{\underset{\text{Fracción propia}}{\frac{1}{2}} + \underset{\text{Natural}}{3} = \underset{\text{Fracción impropia}}{\frac{7}{2}}}_{\text{Reales}} \quad \text{y} \quad \underbrace{\underset{\text{Natural}}{4} \times \underset{\text{Fracción impropia}}{\left(-\frac{5}{2}\right)} = \underset{\text{Entero}}{-10}}_{\text{Reales}}$$

2.2.2. Propiedad conmutativa

El orden en que se sumen o se multipliquen los números, no afecta el resultado.

Suma: $a+b=b+a$ Multiplicación: $a\times b=b\times a$

Ejemplo:

$$\overbrace{\boxed{\frac{2}{3}} + \boxed{\frac{5}{3}}}^{\text{ANTES}} = \overbrace{\boxed{\frac{5}{3}} + \boxed{\frac{2}{3}}}^{\text{DESPUÉS}} = \boxed{\frac{7}{3}} \quad \text{y} \quad \overbrace{\boxed{\frac{2}{3}} \times \boxed{\frac{5}{3}}}^{\text{ANTES}} = \overbrace{\boxed{\frac{5}{3}} \times \boxed{\frac{2}{3}}}^{\text{DESPUÉS}} = \boxed{\frac{10}{9}}$$

Cambio en el orden de los términos

Cambio en el orden de los factores

⚠ **Advertencia**

- La propiedad conmutativa no aplica para la resta, es decir: $a\text{-}b\neq b\text{-}a$.

Ejemplo:

$$\underbrace{7-5}_{2} \neq \underbrace{5-7}_{-2}$$

$$2 \neq -2$$

Pero si la resta se escribe como una suma, se puede aplicar sin problema, de la siguiente forma:

$$7-5 \xrightarrow{\text{Se escribe como}} \underbrace{7+(-5)}_{2} = \underbrace{-5+7}_{2}$$

$$2 = 2$$

- La propiedad conmutativa no aplica para la división, es decir: $a \div b \neq b \div a$.

Ejemplo:

$$3 \div 5 \neq 5 \div 3$$

$$\frac{3}{5} \neq \frac{5}{3}$$

Gráficamente:

Fracción propia

Fracción impropia

2.2.3. Propiedad asociativa

Es aquella que permite efectuar agrupaciones o desagrupaciones entre términos o entre factores, con la intención de operarlos fácilmente sin que se modifique el resultado. Estas agrupaciones se escriben haciendo uso de los signos de agrupación, usualmente con paréntesis ( ).

Para la suma: $a + b+c= (a+b)+c=a+(b+c)=b + (a+c)$

Para la multiplicación: $a \times b\times c= (a\times b)\times c=a\times (b\times c)=b \times (a\times c)$

Ejemplo:

$$-5 + 3 + 4 - 10 - 1$$

$$-5 - 10 - 1 + 3 + 4$$

$$(-5 - 10 - 1) + (3 + 4)$$

$$-16 + 7$$

$$-9$$

Advertencia

- El hecho de que en una expresión aritmética haya signos de agrupación, no necesariamente implica que se haya aplicado la propiedad asociativa.

Propiedad conmutativa para el producto

$$\overset{\text{ANTES}}{3 + 5 \times 2} = \overset{\text{DESPUÉS}}{3 + (2 \times 5)}$$

$$3 + 10 = 3 + 10$$

$$13 = 13$$

En el ejemplo anterior los factores ya se encuentran asociados, así en la primera parte de la expresión no tengan los signos de agrupación; esto se debe al orden de las operaciones, tema que se tratará posteriormente, y de ahí que el único cambio fue el del orden de los factores, es decir que se aplicó la propiedad conmutativa pero no una asociativa.

- No se puede aplicar la propiedad asociativa en expresiones en las cuales se presenta una combinación de términos y factores, por ejemplo:

$$\underbrace{3+\underbrace{5\times 2}_{10}}_{13} \neq \underbrace{\underbrace{(3+5)}_{(8)}\times 2}_{16} \neq \underbrace{\underbrace{(3\times 2)}_{(6)}+5}_{11}$$

- La resta no es asociativa con paréntesis, por ejemplo:

$$1\text{-}(2\text{-}3) \neq (1\text{-}2)\text{-}3$$
$$1\text{-}(\text{-}1) \neq (\text{-}1)\text{-}3$$
$$2 \neq \text{-}4$$

2.2.4. Propiedad distributiva (de la multiplicación con respecto a la suma)

Está referida a que si se tiene la multiplicación de dos factores, en donde uno de ellos es una suma o resta, se puede multiplicar el factor por cada uno de los términos que conforman la suma, es decir:

$$a\times(b\pm c)=a\times b \pm a\times c$$

Ejemplo:

$$-3\times(7+2)=\underbrace{(-3)\times 7}+\underbrace{(-3)\times 2}=-21-6=-27$$

Advertencia

- Son los factores los que distribuyen a términos, al contrario no aplica:

$$\frac{c}{(a+b)} \neq \frac{c}{a} \pm \frac{c}{b}$$

- El exponente no distribuye a términos:

$$(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$$

- Los factores no distribuyen a otros factores:

$$a(b \times c) \neq a \times b \times a \times c \qquad \text{tampoco} \qquad \frac{a \times b}{c} \neq \frac{a}{c} \times \frac{b}{c}$$

Observación

Un signo menos antes de un paréntesis implica un cambio de signo en los términos, tanto para agrupar como para desagrupar.

$$-(a+b)=-1(a+b)=-a-b$$

2.2.5. Propiedad modulativa o de la identidad

Tanto para la suma como para la multiplicación existe un número denominado ***módulo*** tal que al operarlo con otros números reales no afecta el resultado. Así el módulo de la suma es el cero y el de la multiplicación es el uno.

Para la suma: $a \pm 0 = a$ $\longrightarrow$ Módulo aditivo es el 0

Para la multiplicación: $\begin{cases} a \times 1 = a \\ \dfrac{a}{1} = 1 \end{cases}$ $\longrightarrow$ Módulo multiplicativo es el 1

Es de anotar que los módulos, dentro de la operación correspondiente, no suelen escribirse en la medida que no se modifica el resultado; sin embargo, en otras operaciones sí tiene injerencia y por lo tanto es imprescindible escribirlo. Por lo anterior, adicionalmente se enuncian las siguientes propiedades.

2.2.5.1. Propiedades del elemento neutro

i. $a\times 0=0$

ii. $\frac{0}{a}=0$ con $a\neq 0$

iii. $\frac{a}{0}$ y $\frac{0}{0}$ son indeterminaciones matemáticas

iv. Si $a\times b=0$ es porque $a=0$ o $b=0$ o ambas.

v. $\frac{a}{a}\neq 0$ porque $\frac{a}{a}=1$ por la propiedad invertiva

2.2.5.2. Propiedad invertiva o de los inversos

Para cada número real, existe un número real que lo elimina dentro de cada una de las operaciones: estos son el inverso aditivo para la suma, y el inverso multiplicativo o recíproco para la multiplicación.

Para la suma: $a+(-a)=0$

Para la multiplicación: $a\times\frac{1}{a}=\frac{a}{a}=1$ con $a\neq 0$

Como se explicó anteriormente, el inverso aditivo de un número es el mismo número, pero con el signo contrario. Y el recíproco es el número escrito de la forma $\frac{a}{b}$, intercambiando las posiciones del numerador y el denominador, así: $\frac{b}{a}$.

Esta propiedad es muy importante al momento de efectuar simplificaciones, tal y como se presenta en el ejemplo a continuación, o para despejar incógnitas en la solución de ecuaciones lineales.

Ejemplo:

P. invertiva

P. modulativa

$$\frac{105}{165}=\frac{\cancel{3}\times\cancel{5}\times 7}{\cancel{3}\times\cancel{5}\times 11}=\boxed{1}\times\boxed{1}\times\frac{7}{11}=\frac{7}{11}$$

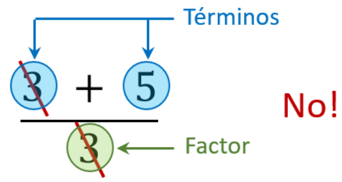
P. invertiva

Factorización

$$\begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

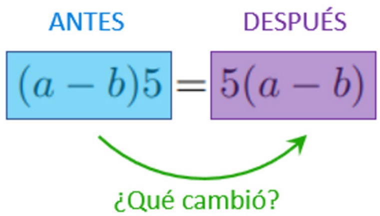
Advertencia

Un término se elimina con otro término, y un factor con otro factor. Cuando de efectuar operaciones se trata, hay que tener muy presente la función que cumple un número dentro de dicha operación, es decir, si es un término o es un factor. En consecuencia, no es correcto eliminar un término con un factor, como se muestra en el siguiente ejemplo:



Actividades de trabajo independiente 4

1. Para identificar fácilmente en una expresión la propiedad aplicada, se puede recurrir a las preguntas: ¿Qué pasó? O, ¿qué cambió? Esto, entre la expresión que está antes de la igualdad y la expresión que se encuentra después de la misma, tal como se muestra en el siguiente ejemplo:



En el ejemplo, entre el antes y el después, se observa que hubo un cambio de posición de los factores que constituyen la expresión; es decir, en el antes el factor $(a\text{-}b)$ está de primero y el 5 de segundo, y después el 5 pasó a estar de primero y $(a\text{-}b)$ de segundo. De esta manera, la propiedad que refiere un cambio de posición entre los términos o los factores es la propiedad conmutativa, y de ahí se infiere que esta fue la propiedad aplicada en la expresión.

De acuerdo con lo anterior, enuncie la propiedad de los números reales aplicada en cada una de las expresiones dadas.

a. $3+(5-1)=(3+5)-1$ Propiedad(es) ____________

b. $7-2-6=-2-6+7$ Propiedad(es) ____________

c. $\frac{a+b-c}{2}=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{c}{2}$ Propiedad(es) ____________

d. $\left(-\frac{7}{3}\right)\left(-\frac{3}{7}\right)=1$ Propiedad(es) ____________

e. $a(c-0)-b=ac-b$ Propiedad(es) ____________

f. $-\sqrt{2}\,(1)=-\sqrt{2}$ Propiedad(es) ____________

g. $ab(c+d)=ab(d+c)=abd+abc$ Propiedad(es) ____________

h. $\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}\right)=0$ Propiedad(es) ____________

i. $bc+(a-b)c=bc+ac-bc=ac$ Propiedad(es) ____________

j. $3\left(a-\frac{1}{3}\right)=3a-\left(3\times\frac{1}{3}\right)=3a$ Propiedad(es) ____________

k. $\frac{x.y}{z}=x\left(\frac{y}{z}\right)$ Propiedad(es) ____________

l. $-2\left[\left(\frac{1}{3}\right)x\right]=(-2)\left(\frac{1}{3}\right)x$ Propiedad(es) ____________

En los numerales del 2 al 4, seleccione la respuesta correcta.

2. En la expresión: $-2-5\{(3\div8)+4(-1)\}$, el 5 cumple las funciones de:

a. Una base

b. Un factor

c. Un término

d. Un exponente

3. De las siguientes expresiones, en la única que se cumple la propiedad modulativa es:

a. $\left(\frac{1}{7}\right)+\left(-\frac{1}{7}\right)=0$

b. $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)=1$

c. $-\pi\times0=0$

d. $x-y(z+0)=x-yz$

4. Si $(x+1)(-3)=0$, entonces:

a. $x+1=3$ para que se cumpla la propiedad invertiva para el producto: $(3)(-3)=0$

b. $x+1=-\frac{1}{3}$ cumpliendo la propiedad invertiva para el producto: $\left(-\frac{1}{3}\right)(-3)=\frac{3}{3}=0$

c. $x=-1$ para que se cumpla que si $0.(-3)=0$

d. $x=2$ para que se cumpla la propiedad invertiva para la suma, así: $3-3=0$

5. El recíproco del número $\sqrt{2}$ es:

a. $-\sqrt{2}$

b. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

c. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

d. No tiene recíproco

ANEXO 2

Repuestas de las actividades de trabajo independiente

Actividades de trabajo independiente 4

1.a. Asociativa
1.b. Conmutativa
1.c. Distributiva
1.d. Invertiva para el producto
1.e. Modulativa para la suma
1.f. Modulativa para el producto
1.g. Conmutativa y distributiva
1.h. Invertiva para la suma
1.i. Distributiva e invertiva para la suma
1.j. Distributiva e invertiva para el producto
1.k. Asociativa
1.l. Asociativa

2. Opción b
3. Opción d
4. Opción c
5. Opción c

Referencias

Alarcón, S. González, M. (2015). *Módulos de Trabajo Independiente: Matemáticas básicas.* Fondo Editorial ITM.

Miller, C. Vern, H. (1999). *Matemática: Razonamiento y Aplicaciones*. Editorial Pearson Educación.

SwokowskI, E. Cole, J. (2006). *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica.* Editorial Thomson.

Stewart, J. lothan, R. Saleem, W. (2007). *Precálculo*. Editorial Thomson.

Zill, D. Dewar, J. (2012). *Algebra, trigonometría y geometría analítica.* Editorial McGraw Hill.

UNIDAD 3

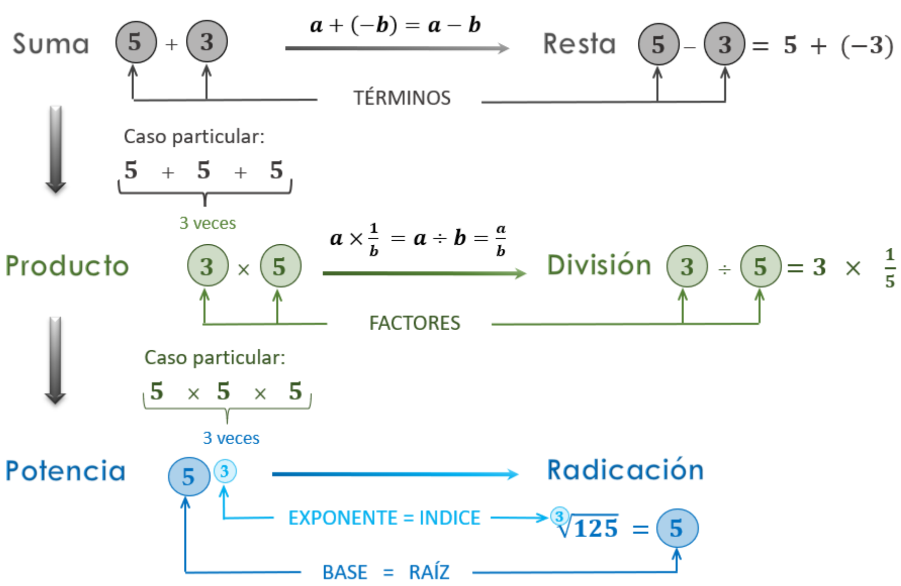
Operaciones con números reales

3. Operaciones con números reales

En las operaciones, un número real se relaciona con otro para formar un nuevo número; sin embargo, existen operaciones que son exclusivas de ciertos conjuntos numéricos, como es el caso del Mínimo Común Múltiplo en los números naturales o la simplificación para los números racionales, tal como se presentó en las unidades 1 y 2, respectivamente. No obstante, hay operaciones que aplican para cualquier número real: estas operaciones son la suma, el producto y la potencia, tal como se muestra en la figura 20.

Figura 20

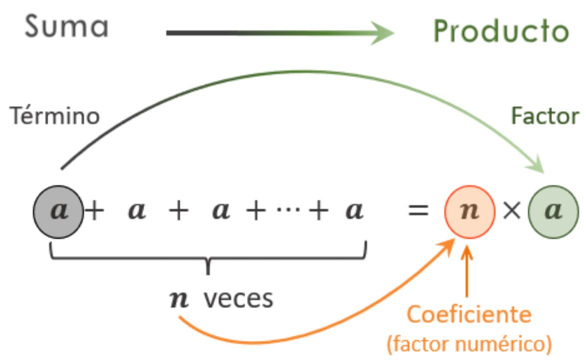
Operaciones en los números reales



Fuente: elaboración propia (2022).

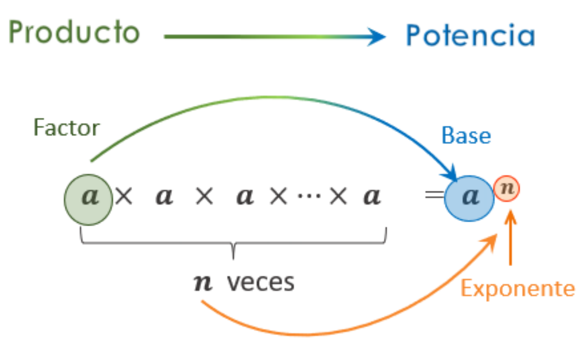
En el esquema de la figura 20 se observa que la suma se presenta como la operación principal, es decir, como aquella de la cual se desprenden las otras operaciones. Es así como el producto o la multiplicación constituye un caso particular de la suma, cuando un número se suma por sí mismo varias veces. En el ejemplo se observa que al sumarse el 5 por sí mismo 3 veces, equivale a la multiplicación 3×5.

En general:



De manera similar, un caso particular de la multiplicación es la potencia, la cual se presenta cuando un número real se multiplica por sí mismo varias veces. En el ejemplo de la figura 20, 5^3 significa el número 5 multiplicado por sí mismo 3 veces, esto es $5 \times 5 \times 5$. Al igual que los números se designan como término o factor, dependiendo de si se están sumando o multiplicando respectivamente, en la potencia el número que se multiplica por sí mismo se denomina «base», y al número que representa las veces que se repite dicha multiplicación se le llama «exponente».

En general:



Por su parte, para las operaciones resta y división cabe recordar que en la unidad referida a las propiedades de los números reales, se enunció la operación «resta» como una suma. Es decir, cuando se suma un número real con el inverso de otro: $a - b = a+(-b)$, y la división como la multiplicación de un número por el recíproco de otro: $a \div b = a \times \frac{1}{b}$, de ahí que la división entre dos números a y b representada como $a \div b$ se pueda escribir de la forma $\frac{a}{b}$.

3.1. Polinomio aritmético

Un polinomio aritmético es una expresión matemática, en la cual se combinan las operaciones fundamentales aplicadas sobre números reales. Resolver un polinomio aritmético significa realizar las operaciones planteadas entre los distintos números implicados en el polinomio, a fin de obtener como resultado otro número real.

Ejemplo:

$$-4(-2)+3(2^3)-\{-4+2(-2)+[-(5-6)+2]-\frac{18}{6}\}-[4-2(-3)]$$

3.2. Orden de las operaciones

Dentro de un polinomio aritmético las operaciones tienen un orden de ejecución, el cual depende del contexto en que se plantean. En matemáticas, para establecer dicho orden, se utilizan unos símbolos denominados «signos de agrupación»: ( ),{ } , [ ]. De acuerdo con lo anterior, el orden en que se deben ejecutar las operaciones depende de si el polinomio que las contiene, dispone o no de estos signos. De esta manera se plantean dos situaciones: el orden de las operaciones cuando la expresión no cuenta con signos de agrupación y cuando sí los tiene.

3.2.1. Orden de ejecución de las operaciones sin signos de agrupación

Para efectuar las operaciones planteadas en un polinomio aritmético cuando no se tienen signos de agrupación, inicialmente se realizan las potencias para convertir bases y exponentes a factores, y luego las multiplicaciones y divisiones para convertir factores en términos, los cuales finalmente se suman o se restan según sea el caso.

Ejemplo:

Determine el resultado de: $5 \times 2^2 - \frac{3^2}{15} + 4(-2)$

Solución:

Efectúan las potencias $\quad 5 \times \boxed{2^2} - \frac{\boxed{3^2}}{15} + 4(-2)$

Operan los factores $\quad \boxed{5 \times 4} - \boxed{\frac{9}{15}} + \boxed{4(-2)}$

Realiza la suma $\quad \boxed{20 - \frac{3}{5} - 8} = \frac{100 - 3 - 40}{5} = \frac{57}{5}$

Observación

Anteriormente se había hecho la recomendación de escribir entre paréntesis los números negativos cuando se van a multiplicar con otros, tal como es el caso del -2 en el ejemplo anterior, donde el paréntesis no está definiendo el orden de la operación sino indicando que en la expresión el -2 se comporta como un factor.

3.2.2. Orden de ejecución de las operaciones con signos de agrupación

En caso de que en el polinomio aritmético haya signos de agrupación, se puede proceder de dos formas: la primera, «destruyendo paréntesis», esto es, aplicando la propiedad distributiva con el fin de eliminar los paréntesis y continuar con el orden establecido en el numeral anterior; y la segunda, resolviendo primero las operaciones que están dentro de los signos de agrupación. Para esta última, en el caso de que dentro de un signo de agrupación haya otros signos de agrupación, las operaciones se van resolviendo de «adentro hacia afuera», tal como se indica en el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

Determine el resultado del siguiente polinomio aritmético:

$$\left\{-4+2(-2)+[-(5-6)+2]-\frac{18}{6}\right\}-[4-2(-3)]$$

Solución:

$$\left\{-4+2(-2)+[-\boxed{(5-6)}+2]-\frac{18}{6}\right\}-[4-\boxed{2(-3)}]$$

*Se efectúan conforme al procedimiento establecido en el numeral 1

$$\left\{-4+\boxed{2(-2)}+[\boxed{-(-1)+2}]-\boxed{\frac{18}{6}}\right\}-[\boxed{4-(-6)}]$$

$$\{\boxed{-4-4+3-3}\}-[10]$$

$$\{-8\}-[10]=-18$$

*Se efectúan conforme al procedimiento establecido en el numeral 1

Observación

(*) Si dentro de un signo de agrupación no hay más signos, entonces las operaciones que hay dentro de este se efectúan siguiendo el protocolo establecido en el numeral anterior, tal como se realizó en el ejemplo mostrado.

Advertencia

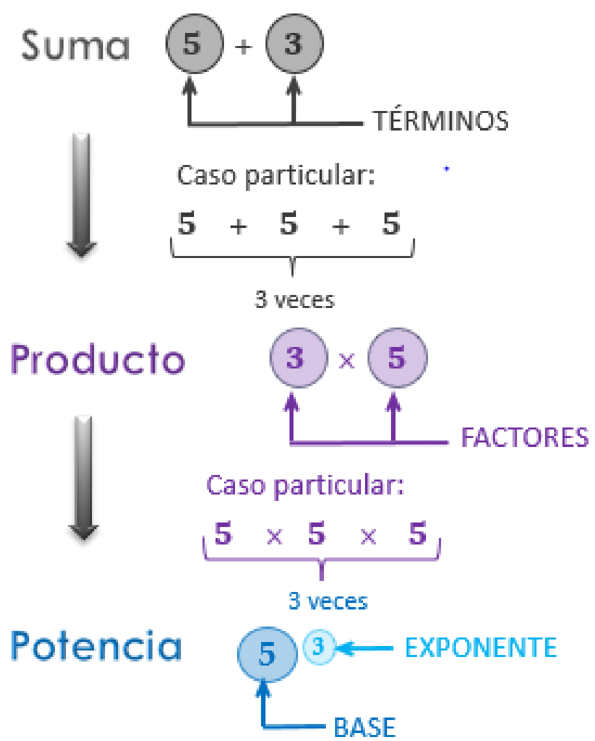
Al momento de efectuar las operaciones propuestas en un polinomio aritmético, hay que identificar claramente la función que ejercen los números en dicho polinomio, es decir, reconocer si son bases, exponentes, factores o términos. Lo anterior debido a que los términos se suman y se restan con otros términos, los factores se multiplican o se dividen con otros factores, y las potencias se operan con otras potencias siempre y cuando tengan igual base, tal como se explicará en la siguiente unidad.

- $\frac{\cancel{3}-5}{\cancel{3}}$ es incorrecto puesto que $\frac{3-5}{3}$ Término Factor
- $3+2\times 4\neq 5\times 4$ es incorrecto ya que en la expresión: $3+2\times 4=3+8$ Término Factor

- $3^2 \neq 6$ es incorrecto dado que 3^2 significa: $\underbrace{3 \times 3}_{2\ \text{veces}} = 9$
- $2 \times 5^2 \neq 10^2$ es incorrecto debido a que: $\underset{\text{Factor}}{2} \times \underset{\text{Base}}{5}^2 = 2 \times 25 = 50$
- $\frac{\cancel{2}^3}{\cancel{2}} \neq 1^2$ es incorrecto puesto que: $\frac{\overset{\text{Base}}{2}^3}{\underset{\text{Factor}}{2}} = 2^2$ por las leyes de las potencias

Actividades de trabajo independiente 5

1. Dependiendo de la operación en la que se encuentren relacionados, los números reales no solo cumplen una función específica y están supeditados a determinadas propiedades, sino que también adquieren un nombre asociado a dicha función. Por ello, cuando un número se relaciona con otro mediante las operaciones de suma o resta, recibe el nombre de ***«término»***; si se trata de las operaciones multiplicación y división, se denomina ***«factor»***; y en la operación potencia se denomina ***«base»*** si es el número que se multiplica por sí mismo varias veces, o ***«exponente»*** si es el número de veces en que un número se multiplica por sí mismo:



De acuerdo con lo anterior, en los numerales del *a* al *e*, seleccione la respuesta correcta:.

a. En la expresión: $-2\{-5(3+8)+4(-1)\}$, el -2 cumple las funciones de:

- **i.** Un término
- **ii.** Un factor
- **iii.** Una base
- **iv.** Un exponente

b. En la expresión: $-4(-2)+5(3^2)$, el 3^2 cumple las funciones de:

- **i.** Un exponente
- **ii.** Un término
- **iii.** Una base
- **iv.** Un factor

c. En la expresión: $-\{-3[-5(7-9)^5+(-6)]\}$, el (-6) cumple las funciones de:

- **i.** Un factor
- **ii.** Un término
- **iii.** Un exponente
- **iv.** Una base

d. En la expresión: $-8(-2)-[(-4)^2+(7+5)^{-1}]$, el -1 cumple las funciones de:

- **i.** Una base
- **ii.** Un factor
- **iii.** Un exponente
- **iv.** Un término

e. En la expresión: $\frac{(-10+4)(-3)}{(-1-2)^2}$, la resta $(-1-2)$ cumple las funciones de:

- **i.** Un exponente
- **ii.** Un término
- **iii.** Una base
- **iv.** Un factor

2. Realice las operaciones indicadas, aplicando las propiedades de los números reales y el orden de las operaciones donde así se requiera.

a. $-8(-2)-[(-4)+(7+3)]$

b. $-\{-3[5-(7-9)(-6)]+(-1+4)\}$

c. $\frac{(-10+4)(-3)}{-7-2}$

d. $\frac{(-6+3)(-4)+5}{-(-5-1)}$

e. $9-\{3-8[4-3(5+2-10)-2(4-5)-3]+4-8\}+2$

f. $20-2\{3[(2-8)+(6+2)(2-7)]-4\}-\{3+7[2-5(2-6)]\}$

g. $-4(-2)+3(2^3)-\{-4+2(-2)+[-(5-6)+2]-\frac{18}{6}\}-[4-2(-3)]$

h. $-4-\frac{3}{2}\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{1}{6}+2\right)\left[\left(\frac{2}{3}\div\frac{7}{9}\right)-3\right]$

i. $-3\left(1-\frac{5}{3}\right)-\frac{1}{4}\left[2\left(-\frac{3}{2}\div 6\right)\right]-\left(\frac{1}{2}\right)$

j. $\left(3+\frac{4}{3}\right)-4-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}-2\right)-\left[\left(\frac{2}{3}\div\frac{7}{9}\right)-3\right]$

k. $-\left\{-\left(-\frac{2}{5}+1\right)+3\left(-\frac{18}{6}\div\frac{1}{2}\right)\right\}-\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{7}{9}\right)\div 3\times\frac{5}{4}\right]$

3. Responda falso o verdadero a las siguientes afirmaciones, y justifique cada una de sus respuestas.

a. La operación 2×3^2 da como resultado 36

b. $5a+2a+a=8a$

c. Al simplificar $\frac{6^x}{2}$ se obtiene como resultado 3^x

d. Para resolver el polinomio $10-4\{-1+2(3-5)\}$, se procede de la siguiente manera:

$$\begin{gathered}=6\{-1+2(-2)\}\\ =6\{-1-4\}\\ =6\{-5\}\\ =-30\end{gathered}$$

e. El resultado del polinomio aritmético $-8(-2)-[(-4)+(7+3)]$ es 10.

4. Con las matemáticas podemos dar solución a situaciones problema que se presentan en la cotidianidad: de ahí su importancia. Para resolver una situación en particular, se requiere en primer lugar expresar dicha situación en lenguaje matemático, que en este caso consiste en escribirla como un polinomio aritmético.

De acuerdo con lo anterior, identifique para cada una de las situaciones que se plantean, el polinomio aritmético que las representa.

a. El doble de la edad de María aumentada en 3 años. Si María tiene 14 años, la operación que permite resolver la situación es:

i. $14\div 2+3$

ii. $14+(2\times 3)$

iii. $2\times 14+3$

iv. $2\times(14+3)$

b. Tres de los grupos de matemáticas están conformados por distinto número de estudiantes. Generalmente asisten a las asesorías los tres quintos de los estudiantes del primer grupo, la mitad del segundo grupo y todos los del tercer grupo menos cinco estudiantes. Si el primer grupo tiene 10 estudiantes, el segundo 12 y el tercero 7, entonces las operaciones que permiten resolver la situación son:

i. $3\div5+10+12\div2+7\text{-}5$

ii. $(3\times10)\div5+(12\div2)+(7\text{-}5)$

iii. $(3\div5\times10)+(2\times12)+(7\text{-}5)$

iv. $3\times(10\div5)+(2\div12)+(7\text{-}5)$

ANEXO 3

Repuestas de las actividades de trabajo independiente

Actividades de trabajo independiente 5

1.a. Opción ii
1.b. Opción iv
1.c. Opción ii
1.d. Opción iii
1.e. Opción iii

2.a. 10

2.b. -24

2.c. $\frac{18}{5}$

2.d. $\frac{17}{6}$

2.e. 108

2.f. 147

2.g. 30

2.h. $-\frac{107}{84}$

2.i. $\frac{17}{16}$

2.j. $\frac{481}{84}$

2.k. $\frac{10501}{540}$

3.a. Falso
3.b. Verdadero
3.c. Falso
3.d. Falso
3.e. Verdadero

4.a. Opción iii
4.b. Opción ii

Referencias

Alarcón, S. y González, M. (2015). *Matemáticas básicas. Guías de trabajo independiente.* Fondo Editorial ITM.

Miller, C., Heeren, V. y Hornsby, J. (1999). *Matemática: razonamiento y aplicaciones* (8.a ed.) Editorial Pearson Educación.

Swokowski, E. y Cole, J. (2006). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* (11.a ed.) Editorial Thomson.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2007). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo* (5.a ed.). Editorial Thomson.

Zill, D. y Dewar, J. (2012). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica* (3.a ed.). Editorial McGraw-Hill.

UNIDAD 4

Potenciación y radicación

4. Potenciación y radicación

En la unidad 3 se presentó la operación «potencia» como un caso particular de la multiplicación, esto es, cuando un número se multiplica por sí mismo varias veces.

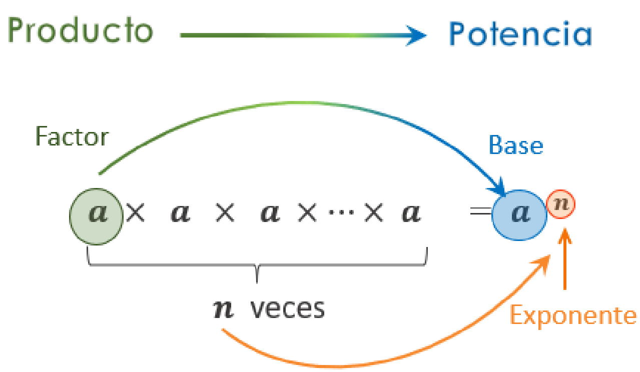
Por su importancia en el campo de la ciencia, sus características y las propiedades que la rigen, esta operación suele presentarse de manera independiente de las otras operaciones: ese es el objetivo de esta unidad.

4.1. Potenciación

La potencia se define como un producto «repetido», es decir, cuando un número se multiplica por sí mismo varias veces. Así, al número que se multiplica se le denomina «base», y al número de veces que se repite la multiplicación se le llama «exponente». Este último es un número natural por representar un número de veces y de ahí que se denote con la letra n tal como se presenta en la figura 21.

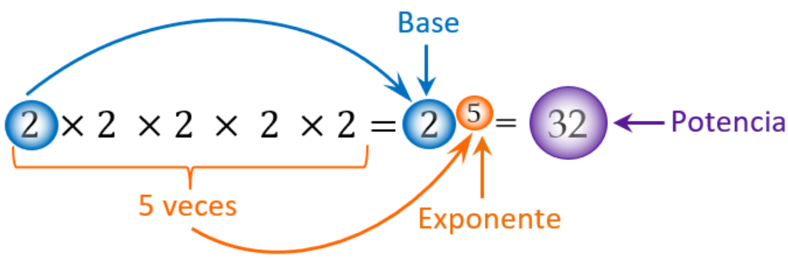
Figura 21

Operación «potencia» como un producto



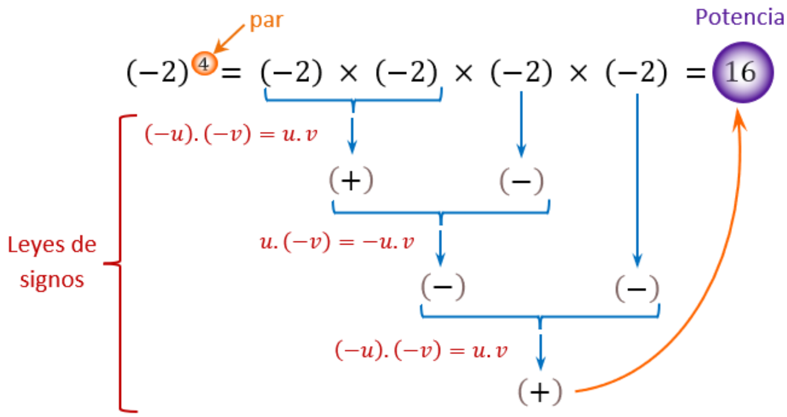
Fuente: elaboración propia (2022).

Ejemplo:



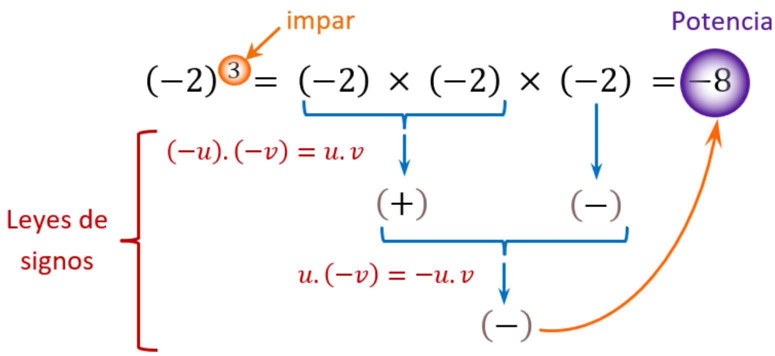
Cuando la base es un número negativo, el valor que toma la potencia depende de si el exponente es par o impar. Así en el primer caso, donde el exponente es un número par, el valor que adquiere la potencia es positivo, tal como se muestra a continuación:

Ejemplo:



Y en caso de que el exponente sea impar, el valor de la potencia será negativo.

Ejemplo:



En general:
Si x representa a cualquier número positivo, esto es $x>0$, entonces:

$$\text{Si } x > 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} (-x)^n = x^n & \text{si } n \text{ es par} \\ (-x)^n = -x^n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

La potenciación también tiene unas reglas que le son propias, las cuales son de gran utilidad al momento de realizar operaciones entre potencias, por ejemplo al simplificar expresiones.

4.1.1. Propiedades de las potencias o leyes de los exponentes

Siendo x,m,n números reales y x diferente de cero, esto es, $x,m,n \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$, entonces:

- Para multiplicar potencias de igual base, se deja la misma base y se suman los exponentes.

$$\boxed{x^m\, x^n = x^{m+n}}$$

Ejemplo:

$$x^{4} . x^{3} = x^{4+3} = x^{7}$$

Demostración

$$x^{4} . x^{3} = \underbrace{(x.x.x.x).(x.x.x)}_{\text{7 veces}} = x^{7}$$

- Para dividir potencias de igual base, se deja la misma base y se restan los exponentes.

$$\frac{x^m}{x^n}=x^{m-n}$$

Ejemplo:

$$\frac{x^{5}}{x^{2}} = x^{5-2} = x^{3}$$

Demostración

$$\frac{x^{5}}{x^{2}} = \frac{\cancel{x}.\cancel{x}.\overbrace{x.x.x}^{3\text{ veces}}}{\cancel{x}.\cancel{x}} = x^{3}$$

- Para efectuar la potencia de una potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

$$(x^m)^n=(x^n)^m=x^{(m.n)}$$

Ejemplo:

$$(x^{3})^{2} = x^{3\times 2} = x^{6}$$

Demostración

$$(x^{3})^{2} = \underbrace{x^{3}.\,x^{3}}_{2\text{ veces}} = \underbrace{(x.x.x)(x.x.x)}_{6\text{ veces}} = x^{6}$$

- Si el exponente de una potencia es cero, independiente del valor que tome la base a excepción del cero, el resultado siempre va a ser uno.

$$x^0=1$$

Demostración

$$\frac{x^{n}}{x^{n}}=\frac{\overbrace{\cancel{x}.\cancel{x}.\cancel{x}\ldots\cancel{x}}^{n\text{ veces}}}{\cancel{x}.\cancel{x}.\cancel{x}\ldots\cancel{x}}=1$$

Propiedad invertiva $\frac{a}{a}=1$

$$\frac{x^{n}}{x^{n}}=x^{n-n}=x^{0}$$

Ley de las potencias para la división

Si $\frac{x^n}{x^n}=1$ y $\frac{x^n}{x^n}=x^0$ entonces:

Propiedad transitiva de la igualdad

$$1=x^0$$

Ejemplo:

$$(x+5)^{0}=1$$

Base

Potencia

- Si una potencia con cualquier base tiene como exponente uno, entonces tendrá como resultado la misma base.

$$\boxed{x^1=x}$$

- La n-*ésima* potencia de una multiplicación, es igual a la multiplicación de cada factor elevado a la n-*ésima* potencia.

$$\boxed{(x\,.\,y)^n=x^n.y^n}$$

Ejemplo:

$$(2\,.\,x\,.\,y)^{3}=2^{3}.x^{3}.y^{3}=8x^3y^3$$

Demostración

$$(2\,.\,x\,.\,y)^3 = \overbrace{(2.x.y)(2.x.y)(2.x.y)}^{3\text{ veces}}$$

$$= \underbrace{(2\,.\,2\,.\,2)}_{3\text{ veces}}\underbrace{(x\,.\,x\,.\,x)}_{3\text{ veces}}\underbrace{(y\,.\,y\,.\,y)}_{3\text{ veces}} = 2^3.x^3.y^3$$

- La n-*ésima* potencia de una división, es igual a la división de cada factor elevado a la n-*ésima* potencia.

$$\boxed{\left(\frac{x}{y}\right)^n = \left(\frac{x^n}{y^n}\right)}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{3}{x}\right)^2 = \frac{3^2}{x^2} = \frac{9}{x^2}$$

Demostración

$$\left(\frac{3}{x}\right)^2 = \overbrace{\left(\frac{3}{x}\right)\left(\frac{3}{x}\right)}^{2\text{ veces}} = \frac{(3\,.\,3)}{(x\,.\,x)} = \frac{3^2}{x^2}$$

2 veces

- En una división de potencias, es posible «subir» una potencia del denominador al numerador y viceversa, cambiando simplemente el signo al exponente.

$$\boxed{\left(\frac{1}{x^n}\right) = x^{-n} \text{ con } x \neq 0}$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{x^{3}} = x^{-3}$$

Cambia el signo del exponente

Demostración

$$\frac{1}{x^{3}} \overset{\text{Ley de las potencias}}{=} \frac{x^0}{x^3} \overset{\text{Ley de las potencias para la división}}{=} x^{0-3} \overset{\text{Propiedad modulativa para la suma}}{=} x^{-3}$$

Observación

Esta propiedad permite escribir el recíproco de un número, como una potencia:

Número	Recíproco	Recíproco como potencia
7	$\frac{1}{7}$	7^{-1}
$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$
a^2	$\frac{1}{a^2}$	a^{-2}
x	$\frac{1}{x}$	x^{-1}

Demostración de la propiedad invertiva para el producto, con leyes de las potencias:

Propiedad: $a \times \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$ también $a \times a^{-1} = a^{1-1} = a^0 = 1$

Como ya se mencionó, estas propiedades se utilizan para efectuar algunas operaciones como la multiplicación y división de polinomios, y la simplificación de expresiones racionales, entre otras. A continuación se presentan un ejercicio de operaciones con potencias y una propuesta para su ejecución.

Ejemplo:

Utilice las propiedades de la potencia para efectuar la siguiente operación. Escriba las respuestas solo con exponentes positivos.

$$\left(\frac{2x^{-2}\,y}{8x^{2}\,y^{-1}}\right)^{-3} \div \left(\frac{16\,(xy)^{5}}{x^{-5}\,y^{9}}\right)^{2}$$

Solución:

Procedimiento sugerido

$$\left(\frac{2x^{-2}y}{8x^{2}y^{-1}}\right)^{-3} \div \left(\frac{16\,(xy)^{5}}{x^{-5}y^{9}}\right)^{2}$$

Factorizar los números compuestos para convertirlos en potencias y los números que no tienen exponente aplicar la propiedad $x = x^1$

$$\left(\frac{2^{1}\,x^{-2}\,y^{1}}{2^{3}\,x^{2}\,y^{-1}}\right)^{-3} \div \left(\frac{2^{4}\,(x^{1}\,y^{1})^{5}}{x^{-5}y^{9}}\right)^{2}$$

Convertir la división en un producto, multiplicando por el recíproco, en este caso cambiando el signo al exponente

$$\left(\frac{2^{1}x^{-2}y^{1}}{2^{3}x^{2}y^{-1}}\right)^{-3} \times \left(\frac{2^{4}\,(x^{1}y^{1})^{5}}{x^{-5}y^{9}}\right)^{-2}$$

Efectuar las operaciones propuestas según el orden presentado previamente, en este caso comenzando con las potencias aplicando la propiedad $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$

$$\frac{2^{-3}x^{6}y^{-3}}{2^{-9}x^{-6}y^{3}} \times \frac{2^{-8}x^{-10}y^{-10}}{x^{10}y^{-18}}$$

Convertir las divisiones en producto multiplicando por los recíprocos de las potencias del denominador aplicando $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$.

$$2^{-3}x^{6}y^{-3}\;2^{9}\,x^{6}y^{-3} \times 2^{-8}x^{-10}y^{-10}\;x^{-10}y^{18}$$

Asociar las potencias de igual base y sumar los exponentes aplicando $x^m x^n = x^{m+n}$

$$2^{-3}\,x^{6}\,y^{-3}\,2^{9}\,x^{6}\,y^{-3}\,2^{-8}\,x^{-10}\,y^{-10}\,x^{-10}\,y^{18}$$

Base 2: $-3+9-8=-2$
Base x: $6+6-10-10=-8$
Base y: $-3-3-10+18=2$

$$2^{-2}x^{-8}y^{2}$$

Escribir la respuesta con exponentes positivos aplicando $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$

$$\frac{y^{2}}{2^{2}\,x^{8}} = \frac{y^{2}}{4x^{8}}$$

Si es posible efectuar las operaciones indicadas.

4.2. Radicación

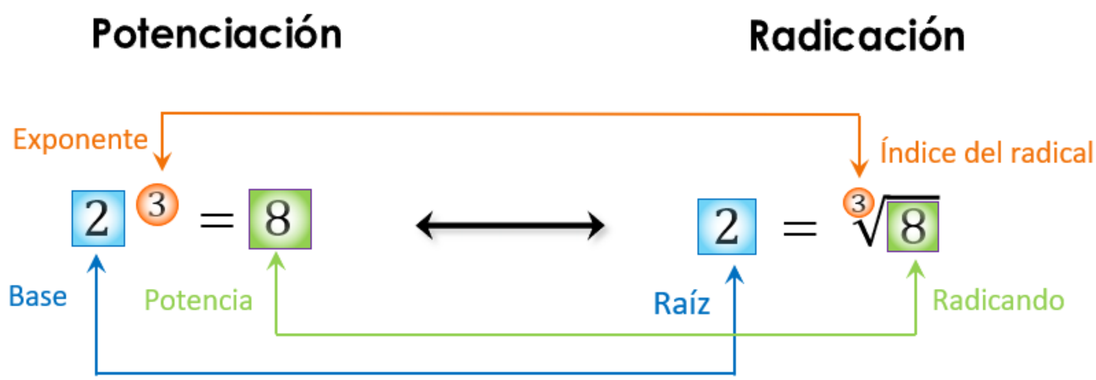
Es la operación mediante la cual se encuentra la base, conociendo la potencia y el exponente previamente. De esta forma, se dice que la raíz n-*ésima* de un número N es la base a, que al elevarla a una potencia n da como resultado el número N. Es decir:

$$\sqrt[n]{N}=a \quad \text{si y sólo sí} \quad a^n=N$$

Lo anterior significa que la potencia es la operación inversa de la radicación, y la radicación es la operación inversa de la potenciación. La relación entre la potenciación y la radicación se puede observar en la figura 22.

Figura 22

Relación entre la potenciación y la radicación

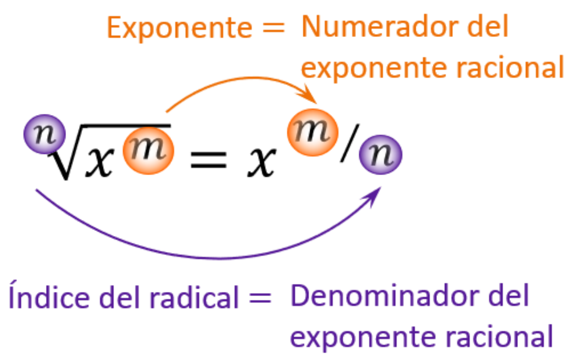


Fuente: elaboración propia (2022).

En la figura 22 se puede observar que la raíz es una base y que el índice del radical es un exponente; en este sentido, la función de los números que conforman una potencia en la radicación es la misma, solo cambia su nombre. Por lo tanto, es posible presentar la radicación como una potenciación, donde el exponente es un número racional, como se aprecia en la figura 23.

Figura 23

La radicación como una potencia de exponente racional



Fuente: elaboración propia (2022).

Dicho de otro modo, se puede afirmar que «la raíz de una potencia es la división de los exponentes», donde el exponente de la potencia pasa a ser el numerador del exponente racional y el índice del radical pasa al denominador de esta.

Ejemplo:

Utilice las propiedades de la potencia para efectuar la siguiente operación. Escriba las respuestas solo con exponentes positivos.

$$\sqrt[3]{x^2}=x^{2/3}$$

Concebir la radicación como una potencia con exponente racional, permite explicar lo siguiente:

$$\sqrt[\cancel{n}]{x^{\cancel{n}}} = x \quad \text{porque} \quad \sqrt[n]{x^n} = x^{n/n} = x^1 = x$$

Observación

En la potenciación se mostró que independiente de si la base es un número positivo o negativo, cuando el exponente es un número par, el resultado de la potencia es siempre un número positivo.

Ejemplo:

Si $x>0$ y $k=2n$, entonces: $\begin{cases} x^k=x^k & \text{Si } x=2 \rightarrow 2^4=16 \\ (-x)^k=x^k & \text{Si } x=-2 \rightarrow (-2)^4=16 \end{cases}$

Pero, si el exponente es un número impar, entonces el resultado de la potencia es positivo si la base es positiva y es negativa si la base es negativa:

Si $x>0$ y $k=2n+1$, entonces:

$x^k=x^k$ Si $x=2 \rightarrow 2^3=8$

$(-x)^k=-x^k$ Si $x=-2 \rightarrow (-2)^3=-8$

De lo anterior se puede observar que el resultado de una potencia siempre es positivo cuando el exponente es par, y como consecuencia en la radicación, cuando el índice del radical (exponente) es par, el radicando (potencia) siempre es un número positivo, todo esto dentro del conjunto de los números reales. Del ejemplo se tiene entonces:

Potenciación		Radicación
Si $\boxed{2}^{4} = \boxed{16}$	$\longleftrightarrow$	$\sqrt[4]{\boxed{16}} = \boxed{2}$
Si $(\boxed{-2})^{4} = \boxed{16}$	$\longleftrightarrow$	$\sqrt[4]{\boxed{16}} = \boxed{-2}$

Significa que:

$\sqrt[4]{\boxed{16}} = |\boxed{2}|$

En general:

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x| \text{ si } n \text{ es par} \\ x \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Ejemplos:

Índice par

$\sqrt[2]{9} = |3| = \pm 3$ porque $\begin{cases} \sqrt[\cancel{2}]{3^{\cancel{2}}} = 3 \\ \sqrt[\cancel{2}]{(-3)^{\cancel{2}}} = -3 \end{cases}$

Índice impar

$\sqrt[3]{8} = 2$ porque $\sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{3}}} = 2$

$\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $\sqrt[\cancel{3}]{(-2)^{\cancel{3}}} = -2$

Así como en la potenciación, la radicación también tiene sus leyes, que igualmente son muy útiles para efectuar otras operaciones como la simplificación de expresiones.

4.2.1. Propiedades de la radicación o leyes de los radicales

Siendo x,m,n números reales y x diferente de cero, esto es, $x,m,n \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$, entonces:

La raíz n-*ésima* de una multiplicación se puede escribir como la multiplicación de las raíces n-*ésimas* de cada uno de los factores que la constituyen.

$$\sqrt[n]{x.y}=\sqrt[n]{x}\,.\,\sqrt[n]{y}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{8\,x^3} = \sqrt[3]{8}\,.\,\sqrt[3]{x^3}$$

Factorizando el 8

$$= \sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{3}}}\,.\,\sqrt[\cancel{3}]{x^{\cancel{3}}} = 2x$$

- La raíz n-*ésima* de una división se puede escribir como la división de las raíces n-*ésimas* de cada uno de los factores que la constituyen.

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[4]{\frac{x^{12}}{81}} = \frac{\sqrt[4]{x^{12}}}{\sqrt[4]{81}}$$

Factorizando el 81

$$\frac{\sqrt[4]{x^{12}}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{x^{12/4}}{3^{4/4}} = \frac{x^3}{3}$$

- La raíz n-*ésima de otra raíz se puede escribir como una sola raíz, donde el índice corresponde a la multiplicación de los índices de las raíces implicadas.*

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m.n]{x}$$

Ejemplo:

$$= \sqrt[3]{\sqrt[2]{128x^6}} = \sqrt[6]{128\,x^6}$$

Factorizando el 128

$$= \sqrt[\cancel{6}]{2^{\cancel{6}}\,x^{\cancel{6}}} = 2x$$

Observación

Cabe mencionar que para ilustrar con mayor claridad la aplicación de la propiedad en el ejemplo anterior, a la raíz cuadrada se le colocó el índice, pero cuando el índice del radical es dos, este no se suele colocar. Es decir, cuando una raíz no tiene explícito el índice, se asume que es una raíz cuadrada, de la siguiente forma:

$$\boxed{\sqrt{x}=\sqrt[n]{x}}$$

Advertencia

Conforme a las propiedades de la potenciación y la radicación, tanto el exponente como el radical sólo se pueden «distribuir» bajo factores y nunca bajo términos. Esto es:

$$(x\pm y)^n \neq x^n \pm y^n \qquad \text{ni} \qquad \sqrt[n]{x\pm y}=\sqrt[n]{x}\pm\sqrt[n]{y}$$

4.2.2. Operaciones con radicales

Al igual que en la potenciación, las propiedades se utilizan para efectuar algunas operaciones como la simplificación multiplicación, división o simplificación de expresiones algebraicas, entre otras. Sin embargo, y a fin de facilitar las operaciones, se propone en lo posible escribir los radicales como potencias racionales y luego aplicar las propiedades de las potencias, tal como se muestra en el ejemplo a continuación.

Ejemplo:

Simplificar al máximo la siguiente expresión y escriba su respuesta con exponentes positivos.

$$\left(\sqrt[3]{\frac{32\,x^{-2}y^{5}}{9\,x^{\frac{3}{2}}\,y^{-\frac{1}{2}}}}\right)^{-3} \div \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x^{4}\,y^{-1}}}}{6x^{-\frac{5}{2}}}$$

Solución:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{32\,x^{-2}y^{5}}{9\,x^{\frac{3}{2}}\,y^{-\frac{1}{2}}}}\right)^{-3} \div \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x^{4}\,y^{-1}}}}{6x^{-\frac{5}{2}}}$$

$$\left(\sqrt[3]{\frac{2^{5}\,x^{-2}\,y^{5}}{3^{2}\,x^{\frac{3}{2}}\,y^{-\frac{1}{2}}}}\right)^{-3} \div \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x^{4}\,y^{-1}}}}{2^{1}3^{1}x^{-\frac{5}{2}}}$$

$$\left(\frac{2^{\frac{5}{3}}x^{-\frac{2}{3}}\,y^{\frac{5}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}\,x^{\frac{3}{6}}\,y^{-\frac{1}{6}}}\right)^{-3} \div \frac{x^{\frac{4}{6}}\ y^{-\frac{1}{6}}}{2^{1}3^{1}x^{-\frac{5}{2}}}$$

$$\left(\frac{2^{\frac{5}{3}}\,x^{-\frac{2}{3}}\,y^{\frac{5}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}\,x^{\frac{1}{2}}\,y^{-\frac{1}{6}}}\right)^{-3} \times \frac{x^{-\frac{2}{3}}\ y^{\frac{1}{6}}}{2^{-1}3^{-1}x^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{2^{-\frac{15}{3}}x^{\frac{6}{3}}\,y^{-\frac{15}{3}}}{3^{-\frac{6}{3}}\,x^{-\frac{3}{2}}\,y^{\frac{3}{6}}} \times \frac{x^{-\frac{2}{3}}\ y^{\frac{1}{6}}}{2^{-1}3^{-1}x^{\frac{5}{2}}}$$

$$2^{-5}x^{2}y^{-5}\ 3^{2}\ x^{\frac{3}{2}}\ \ y^{-\frac{1}{2}} \times\ x^{-\frac{2}{3}}\ y^{\frac{1}{6}}\ \ 2^{1}\ 3^{1}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$2^{-5}x^{2}y^{-5}\ 3^{2}\ x^{\frac{3}{2}}\ \ y^{-\frac{1}{2}} \times\ x^{-\frac{2}{3}}\ y^{\frac{1}{6}}\ \ 2^{1}\ 3^{1}\ x^{-\frac{5}{2}}$$

$$2^{-4}3^{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{17}{3}}$$

$$\frac{3^{3}}{2^{4}\ x^{\frac{1}{3}}\ y^{\frac{17}{3}}} = \frac{27}{16\ x^{\frac{1}{3}}\ y^{\frac{17}{3}}}$$

Procedimiento sugerido

Factorizar los números compuestos para convertirlos en potencias y los números que no tienen exponente aplicar la propiedad $x = x^{1}$

Escribir los radicales como potencias racionales aplicando las propiedades:

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m.n]{x}$, $\sqrt[n]{x\,y} = \sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{y}$, $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

y $\sqrt[n]{x^{m}} = x^{\frac{m}{n}}$.

Convertir la división en un producto, multiplicando por el recíproco, en este caso cambiando el signo al exponente y simplificar los exponentes donde sea posible.

Efectuar las operaciones propuestas según el orden presentado previamente, en este caso comenzando con las potencias aplicando la propiedad $(x^{m})^{n} = x^{m.n}$

Convertir las divisiones en producto multiplicando por los recíprocos de las potencias del denominador aplicando $\frac{1}{x^{n}} = x^{-n}$.

Asociar las potencias de igual base y sumar los exponentes aplicando $x^{m}x^{n} = x^{m+n}$

$$\begin{cases} \text{Base 2: } -5+1=-4 \\ \text{Base 3: } 2+1=3 \\ \text{Base } x\text{: } 2+\frac{3}{2}-\frac{2}{3}-\frac{5}{2}=\frac{1}{3} \\ \text{Base } y\text{: } -5-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=-\frac{17}{3} \end{cases}$$

Escribir la respuesta con exponentes positivos aplicando $\frac{1}{x^{n}} = x^{-n}$

Si es posible efectuar las operaciones indicadas.

Actividades de trabajo independiente 6

1. Utilice las propiedades de la potencia para simplificar cada una de las siguientes expresiones. Escriba las respuestas, solo con exponentes positivos.

a. $x^4\,x^3$

b. $\dfrac{x^{16}}{x^5}$

c. $\dfrac{x^7}{x^{-3}}$

d. $\dfrac{x^6}{x^8}$

e. $\dfrac{y^{-2}}{y^{-5}}$

f. $\dfrac{x^6}{x^{-6}}$

g. $(-2\,a^{-2})^2$

h. $-3^2\,(-5)^2$

i. $\left(\dfrac{-27x^3}{y^{-6}}\right)^{\frac{2}{3}}$

j. $\sqrt[3]{\dfrac{8}{125}x^6y^3}$

k. $\sqrt{\dfrac{-27x^4}{-3x^{-4}}}$

l. $\sqrt{\dfrac{1}{(36x^{-6}y^2)^4}}$

m. $\left(\dfrac{2(x^3)^2y^{-1}z^4}{8x^{-2}y\,z^{-4}}\right)^{-3}$

n. $\dfrac{\sqrt[5]{y^{10}.z^5}}{\sqrt[3]{y^{-2}.z^3}}$

o. $\left(\dfrac{3(x^{-2})^3\,y\,z^2}{27x^{-2}\,y^{-1}z^7}\right)^{-1}\div\left(\dfrac{81(x.z)^5\,y^{-1}}{y^2\,x^{-5}\,z^{-5}}\right)^2$

p. $\left(\sqrt{\dfrac{8}{x^3y^{-\frac{1}{3}}}}\right)^{-5}\div\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{xy^{-1}}}{16x^{-\frac{2}{3}}}}$

q. $\left(\dfrac{10x^2y^3}{6\,x\,y^{-3}}\right)^{-2}$

r. $\dfrac{\sqrt{27\,xy}\;.\;\sqrt[3]{3x^2y^4}}{x^2y^3}$

s. $\left(\dfrac{4y^2z^{3/2}}{\sqrt[3]{x}}\right)^2\div\left(\dfrac{y^{-8}}{16x^4z^6}\right)^{-1/2}$

t. $\left(\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{xy^{-1}}}{25x^{-\frac{2}{3}}}}\right)^{-1}\div\sqrt{\dfrac{125}{x^3\,y^{-\frac{1}{3}}}}$

2. En los numerales del 2.1 al 2.5, seleccionar la respuesta correcta. Justifique su selección con el correspondiente procedimiento.

2.1. Dadas las siguientes afirmaciones, seleccione la correcta.

a. Según las leyes de las potencias $-2^4=16$

b. El recíproco de 49 es 7^{-2}

c. Aplicando las leyes de los radicales $\sqrt{(4-x^2)}=2-x$

d. Si $a<0$ entonces $(-a)^3<0$

2.2. De acuerdo con las leyes de las potencias, el resultado de $(-5)^{-3}$ es:

a. 15

b. $\dfrac{1}{5^3}$

c. -125

d. $-\dfrac{1}{125}$

2.3. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es falsa y justifique su respuesta.

a. El resultado del producto $(-1)^{-1}\,(-1)^{-1}$ es $(-1)^{0}$

b. Si n es par y $x<0$, entonces $\sqrt[n]{x^n}<0$

c. Al efectuar $\sqrt{(x\sqrt{x})}$ se obtiene $(\sqrt[4]{x})^3$

d. El cociente $\frac{x^2}{x^{-2}}=x^0=1$

2.4. Al aplicar las leyes de las potencias a $(x^n)^{-1}$ con $x\neq 0$, se obtiene:

a. $-x^n$

b. $-\frac{1}{x^n}$

c. x^{-n}

d. $\frac{1}{x^{-n}}$

2.5. Al escribir la expresión $\sqrt[6]{x^3+y^2}$ con exponentes racionales, se obtiene:

a. x^2+y^3

b. $(x^3+y^2)^{\frac{1}{6}}$

c. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{3}}$

d. $(x^3+y^2)^6$

3. Complete la siguiente tabla a partir del ejemplo presentado y las indicaciones dadas

Forma de multiplicación	Base	Exponente	Forma de potencia	Valor	Forma de radical	Raíz
$(-2)(-2)(-2)(-2)$	-2	4	$(-2)^4$	16	$\sqrt[4]{16}$	-2
			5^6			
					$\sqrt[5]{243}$	
		3		-216		
$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$						
		2		49		
	10		10^4			

ANEXO 4

Repuestas de las actividades de trabajo independiente

Actividades de trabajo independiente 6

1.a. x^7

1.b. x^{11}

1.c. x^{10}

1.d. $\frac{1}{x^2}$

1.a. x^3

1.f. x^{12}

1.g. $\frac{4}{a^4}$

1.h. -225

1.i. $-9x^2 y^4$

1.j. $\frac{2}{5}x^2y$

1.k. $3x^4$

1.l. $\frac{x^{12}}{1296\, y^4}$

1.m. $\frac{64y^6}{x^{12} z^{24}}$

1.n. $y^{8/3}$

1.o. $\frac{y^4}{3^6 x^{12} z^{15}}$

1.p. $\frac{x^{20/3}}{2^{7/2} y^{2/3}}$

1.q. $\frac{9}{25x^2 y^{12}}$

1.r. $\frac{3^{11/6}}{x^{1/3} y^{5/6}}$

1.s. $\frac{4}{x^{8/3}}$

1.t. $2^{1/2} x^{2/3}$

2.1. Opción b

2.2. Opción d

2.3. Opción d

2.4. Opción c

2.5. Opción b

3.

Forma de multiplicación	Base	Exponente	Forma de potencia	Valor	Forma de radical	Raíz
(-2)(-2)(-2)(-2)	-2	4	$(-2)^4$	16	$\sqrt[4]{16}$	-2
(5)(5)(5)(5)(5)(5)	5	6	5^6	15625	$\sqrt[6]{15625}$	5
(3)(3)(3)(3)(3)	3	5	3^5	243	$\sqrt[5]{243}$	3
(-6)(-6)(-6)	-6	3	$(-6)^3$	-216	$\sqrt[3]{(-216)}$	-6
$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	3	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$\frac{1}{27}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$	$\frac{1}{3}$
(7)(7)	7	2	7^2	49	$\sqrt{49}$	7
(10)(10)(10)(10)	10	4	10^4	10000	$\sqrt[4]{10000}$	10

Fundamentos de aritmética. Guía para la nivelación en matemáticas básicas

Fuentes tipográficas: Montserrat para texto corrido, en 12 puntos, para títulos en Montserrat 14 puntos, subtítulos en Montserrat 12 puntos y Cambria Math para fórmulas matemáticas.

Línea Profesoral

Fundamentos de aritmética. Guía para la nivelación en matemáticas básicas, es una compilación de los módulos de trabajo independiente correspondientes al curso Nivelatorio de Matemáticas que ofrece el Instituto Tecnológico Metropolitano - ITM, a los estudiantes próximos a ingresar a los diferentes programas de la institución. Su objetivo es hacer un repaso de algunas nociones de la aritmética que fundamentan los conceptos propios de otras áreas de las matemáticas, como el cálculo, la geometría y la estadística, entre otros.

El texto orienta dicho repaso desde los aspectos teóricos con sus respectivos ejemplos, hasta los ejercicios propuestos para el trabajo independiente. Dividido en cuatro unidades, de manera simple y con un lenguaje sencillo, apoyado en recursos gráficos, el texto facilita la comprensión de los conceptos, los procedimientos y su aplicación en distintos contextos.

@ITMFondoEditorial

@editorial_itm

Editorial ITM 25 Años

Alcaldía de Medellín
Distrito de
Ciencia, Tecnología e Innovación