MÉTODO PARA OBTENER LOS ELEMENTOS DE LAS SECCIONES CÓNICAS POR MEDIO DE DERIVACIÓN IMPLÍCITA

MARÍA CRISTINA GONZÁLEZ MAZUELO[1]
GUSTAVO ADOLFO PATIÑO JARAMILLO[2]

Resumen

En el marco del proyecto de investigación del Grupo Da Vinci, *Estrategias Didácticas para la Enseñanza y el Aprendizaje Significativo del Cálculo Diferencial,* este artículo presenta un método alternativo para encontrar expresiones simplificadas con las cuales se pueden determinar las coordenadas y las ecuaciones de los elementos de secciones cónicas, con eje focal paralelo a uno de los ejes coordenados, por medio de derivación implícita partiendo de la ecuación general. A diferencia de otros métodos, y particularmente del método clásico utilizado en los textos convencionales de geometría analítica, esta propuesta facilita la obtención de los elementos de estas secciones, pues no se requiere completar los trinomios cuadrados perfectos para llevar la ecuación general a la ecuación canónica.

1 Ingeniera Civil, Universidad Nacional de Colombia. Especialista en Patología de la Construcción, Universidad Santo Tomás. Investigadora de los grupos GT (Grupo de Investigación en Gestión Tecnológica) y del Grupo de Investigación Da Vinci del ITM. Docente de tiempo completo de la Facultad de Ciencias del ITM. E-mail: mariagonzalez@itm.edu.co

2 Ingeniero Mecánico, Universidad de Antioquia. Especialista en Combustibles Gaseosos, Universidad de Antioquia. Investigador de los grupos GITER (Grupo de Investigación en Tecnologías Energéticas) y del Grupo de Investigación Da Vinci del ITM. Docente tiempo completo de la Facultad de Ciencias del ITM. E-mail: gustavopatino@itm.edu.co

Fecha de recepción: 11 de diciembre de 2007
Fecha de aceptación: 21 de diciembre de 2007

El método presentado es fácilmente sistematizable a partir de las expresiones que se entregan, las cuales se encuentran en función de los coeficientes de las variables de la ecuación general en el dominio de los números reales.

Palabras clave

Derivada implícita, Ecuación general, Ecuación canónica, Cónicas, Parábola, Elipse, Hipérbola, Vértice, Foco.

Abstract

As a result of the research project "Strategies for differential calculus meaningful teaching and learning", this paper shows an alternative method to find simplified expressions to determine coordinates and equations for conical sections with focal axis parallel to one coordinated axis by means of implicit derivatives departing from general equation. Unlike other classical methods, and particularly conventional methods used in analytical geometry textbooks, this proposal facilitates conical sections elements and plotting as it does not require algebraic handle of the general equation to convert it to the canonical equation form.

The method shown is easy to systematize from general expressions herein given, expressed in function of the coefficients of the general equation variables in the range of the real numbers.

Key words

Implicit derivative, General equation, Canonic equation, Conical, Parabola, Ellipse, Hyperbola, Vertex, Focus.

1. Introducción

En los textos de geometría analítica, uno de los métodos clásicos propuestos para obtener los elementos de secciones cónicas a partir de su ecuación general, consiste en transformar, por medio de operaciones algebraicas, esta expresión en su expresión canónica, específicamente completando los trinomios cuadrados perfectos.

Para una persona con un buen manejo del álgebra, este método clásico puede resultar sencillo; sin embargo, cuando se trata de su aprendizaje, es evidente la dificultad que manifiestan los estudiantes para comprenderlo y aplicarlo, quizás debido a la deficiencia generalizada de éstos en los procesos reversibles, es decir, en la habilidad para devolverse después de aplicada una operación matemática[3]. No obstante, se puede abordar el tema de las secciones cónicas desde la perspectiva del cálculo diferencial y brindar un método alternativo a los tradicionalmente utilizados.

El desarrollo de la propuesta aquí presentada se hace a partir del concepto geométrico de la derivada de una curva, como una expresión general para la pendiente de todas las rectas tangentes a ella. Para el caso de las cónicas, dicho concepto permite determinar las coordenadas de los punto(s) de intersección de la cónica con sus ejes focales (vértices), pues en estos puntos en particular, la recta tangente es horizontal o vertical, como se mostrará posteriormente para cada una de ellas.

En ecuaciones generales como $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, las variables x y y están relacionadas de forma implícita, entonces se recurrirá a la derivación implícita para obtener $\frac{dy}{dx}$.

En este sentido, el método presentado permite encontrar expresiones simplificadas para obtener las coordenadas de los vértices a partir de los coeficientes de la ecuación general y por medio de la derivación implícita, para posteriormente, determinar

[3] La misma situación ha sido diagnosticada en el proyecto de investigación "Estrategias didácticas para la enseñanza y el aprendizaje significativo del cálculo diferencial", desarrollada en el grupo de investigación *Da Vinci* del ITM.

las coordenadas y ecuaciones de los otros elementos de las secciones utilizando sustituciones algebraicas y las propiedades geométricas particulares de cada una de ellas.

A continuación se presentará el desarrollo del método para cada una de las secciones cónicas: parábola, elipse e hipérbola. La circunferencia se considerará como una particularización de la elipse. El alcance de este artículo se limitó a cónicas con traslación de ejes.

Al final, se presentará un cuadro resumen con las expresiones simplificadas para los elementos de las secciones cónicas, las cuales se encuentran en función de los coeficientes de las variables de la ecuación general en el dominio de los números reales.

2. Descripción general del método

Las secciones cónicas pueden expresarse algebraicamente mediante ecuaciones de segundo grado o cuadráticas en dos variables, así:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

Con A y C no ambas cero, y $B = 0$ puesto que no hay rotación de ejes (Demana, Waits, Foley, & Kennedy, 2007, pág. 667).

Esta ecuación recibe el nombre de ***ecuación general*** de la sección cónica.

Los valores y el signo que toman A y C definen a cuál de las secciones cónicas representa la ecuación. Es así como, si en la ecuación 1 $A = 0$, se trata de una ***parábola de eje focal horizontal***, si $C = 0$ entonces se tiene una ***parábola de eje focal vertical.*** Cuando A y C toman valores diferentes de cero y tienen igual signo, la ecuación 1 representa una ***elipse,*** y si son de signos contrarios, representa una ***hipérbola.***

Nótese cómo para las parábolas es fácil identificar, a partir de la ecuación general, la dirección del eje focal dependiendo de si A o C toman el valor de cero. Sin embargo, en el caso de las elipses y las hipérbolas ya no es tan sencillo y, por lo tanto, se recurrirá a otro tipo de análisis para determinar la orientación del eje focal.

Si se aplica el concepto geométrico de derivada a las secciones cónicas sin rotación de ejes, en los vértices la recta tangente es horizontal y/o vertical (Figura 1). Por lo tanto, para determinar las coordenadas de éstos se hace necesario encontrar los puntos sobre la gráfica de las secciones cónicas, donde la derivada se hace cero o no se encuentra definida, esto es:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \qquad ó \qquad \frac{dy}{dx} = ND$$

Como se mencionó anteriormente, en la ecuación general de las secciones cónicas las variables x y y están relacionadas de forma implícita y, por lo tanto, se procederá a obtener una ecuación general para $\frac{dy}{dx}$ de cualquier sección cónica a partir de la ecuación general por derivación implícita.

Derivando implícitamente la ecuación 1 se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2Ax - D}{2Cy + E} \qquad (2)$$

Por lo tanto las gráficas de las secciones cónicas tienen sus vértices en los puntos donde se cumplen las siguientes condiciones:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \qquad si \qquad -2Ax - D = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{dy}{dx} = ND \qquad si \qquad 2Cy + E = 0 \qquad (4)$$

2.1 Método generalizado para la parábola

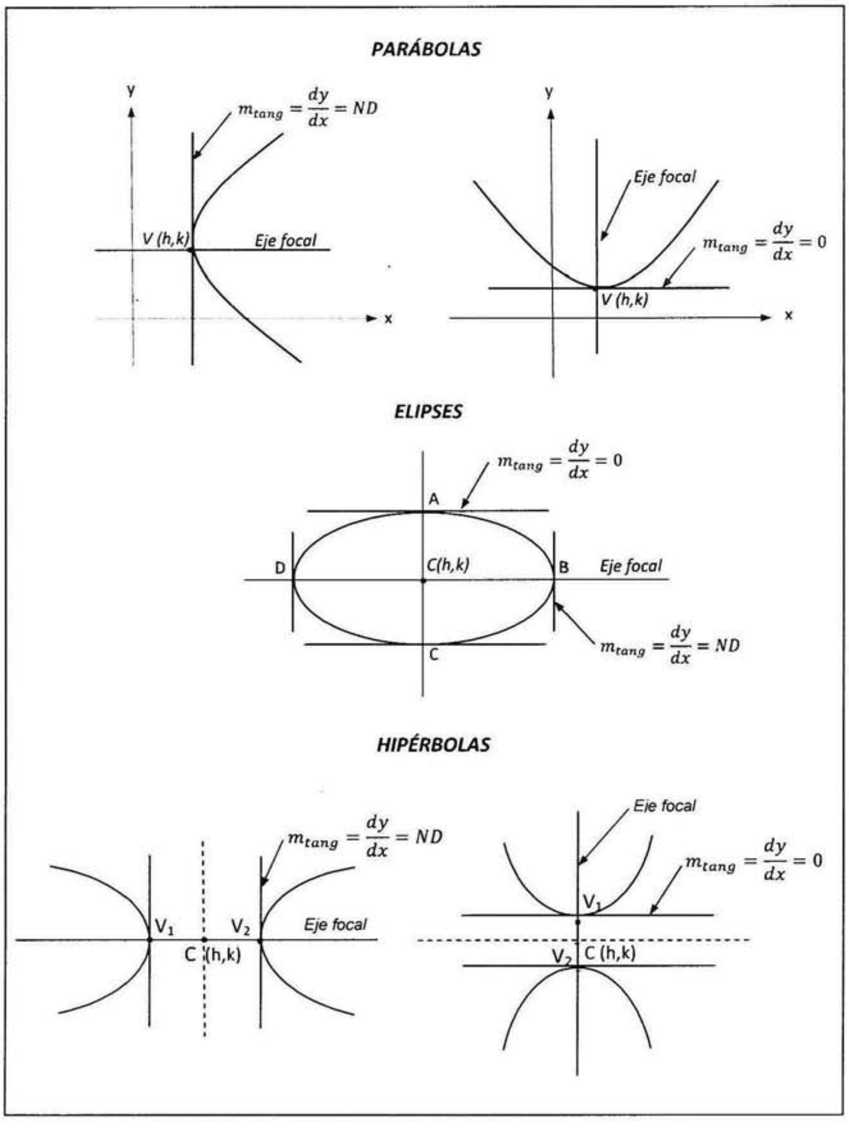
- Parábolas de eje focal horizontal

En parábolas de eje focal horizontal $A = 0$, por lo tanto la ecuación 2 queda definida como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-D}{2Cy + E}$$

Se observa cómo el valor de la derivada nunca es cero, pero $\frac{dy}{dx}$ sí puede ser indefinida cuando: $2Cy + E = 0$

FIGURA 1. RECTAS TANGENTES EN GRÁFICAS DE SECCIONES CÓNICAS

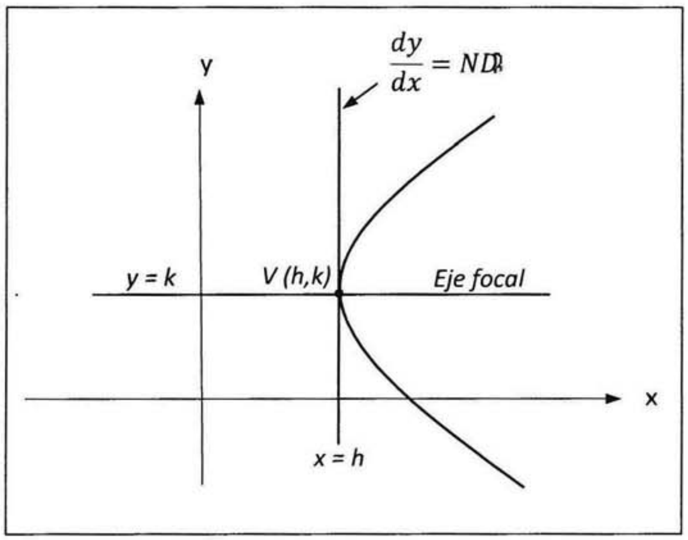


Es decir, la recta tangente a la curva es vertical en ese punto (Figura 2).

Despejando para y se obtiene:

$$y = -\frac{E}{2C} \qquad (5)$$

FIGURA 2. PARÁBOLA DE EJE FOCAL HORIZONTAL



Como puede observarse en la Figura 2, este valor de y corresponde a la ordenada k del vértice de la parábola y del foco.

Como el vértice de coordenadas *(h, k)* pertenece a la parábola, entonces debe satisfacer la ecuación 1, con A = 0. Reemplazando la ecuación 5 en la ecuación 1 y resolviendo para x se obtiene la abscisa del vértice:

$$C\left(-\frac{E}{2C}\right)^2 + Dx + E\left(-\frac{E}{2C}\right) + F = 0$$

$$Dx - \frac{E^2}{4C} + F = 0$$

Despejando se tiene:

$$x = h = \frac{E^2 - 4CF}{4CD} \qquad (6)$$

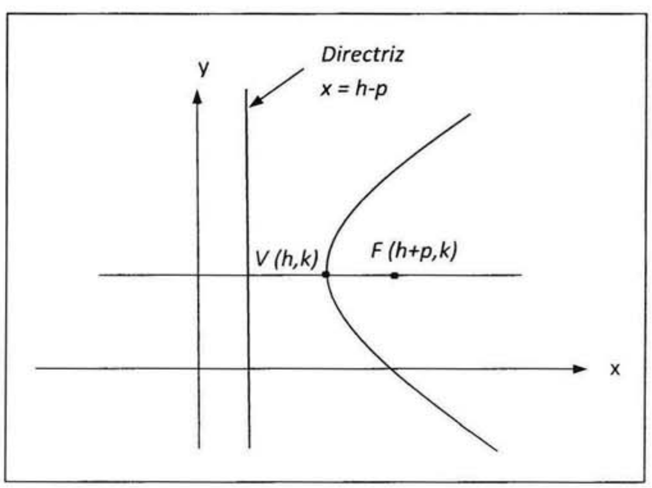
Luego el vértice tiene como coordenadas:

$$(h,k) = \left(\frac{E^2 - 4CF}{4CD}, -\frac{E}{2C} \right)$$

Como el foco no es un punto sobre la parábola, no es posible determinar sus coordenadas por medio de la derivación y, en ese caso, se hará de forma geométrica al igual que para la ecuación de la directriz (Figura 3). Para esto se requiere conocer el valor de la longitud focal, la cual está definida geométricamente (Sánchez, 2002, pág. 151) como:

$$p = -\frac{D}{4C} \qquad (7)$$

FIGURA 3. ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA DE EJE FOCAL HORIZONTAL



Por lo tanto, las coordenadas del foco, las ecuaciones de la directriz y del eje y el ancho focal están definidas respectivamente por:

$$(h+p,k)=\left(\frac{E^2-4CF-D^2}{4CD},-\frac{E}{2C}\right)$$

$$x=h-p=\frac{E^2-4CF+D^2}{4CD}$$

$$y=k=-\frac{E}{2C}$$

$$|4p|=\left|-\frac{D}{C}\right|$$

- Parábolas de eje focal vertical:

En parábolas de eje focal vertical $C=0$, por lo tanto, la ecuación 2 queda definida como:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2Ax-D}{E}$$

Se puede observar como el valor de la derivada nunca es indefinido, pero $\frac{dy}{dx}$ sí puede ser cero cuando:

$$-2Ax-D=0$$

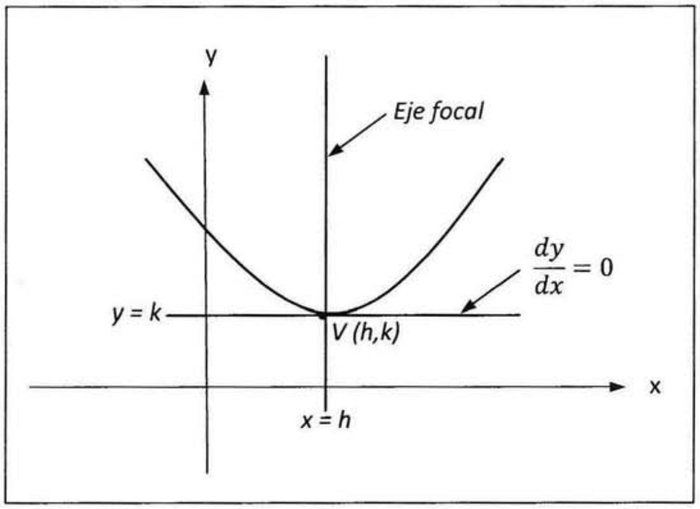
Es decir, la recta tangente a la curva es horizontal en ese punto (Figura 4). Despejando para x se obtiene:

$$x=-\frac{D}{2A} \qquad (8)$$

Como puede observarse en la Figura 4, este valor de x corresponde a la abscisa h del vértice de la parábola y del foco.

Como el vértice de coordenadas (h, k), pertenece a la parábola, entonces debe satisfacer la ecuación 1, con $C = 0$. Reemplazando la ecuación 8 en la ecuación 1 y resolviendo para y se obtiene la ordenada del vértice:

FIGURA 4. ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA DE EJE FOCAL VERTICAL



$$A\left(-\frac{D}{2A}\right)^2 + D\left(-\frac{D}{2A}\right) + Ey + F = 0$$

$$-\frac{D^2}{4A} + Ey + F = 0$$

Al resolver para y se tiene:

$$y = k = \frac{D^2 - 4AF}{4AE} \qquad (9)$$

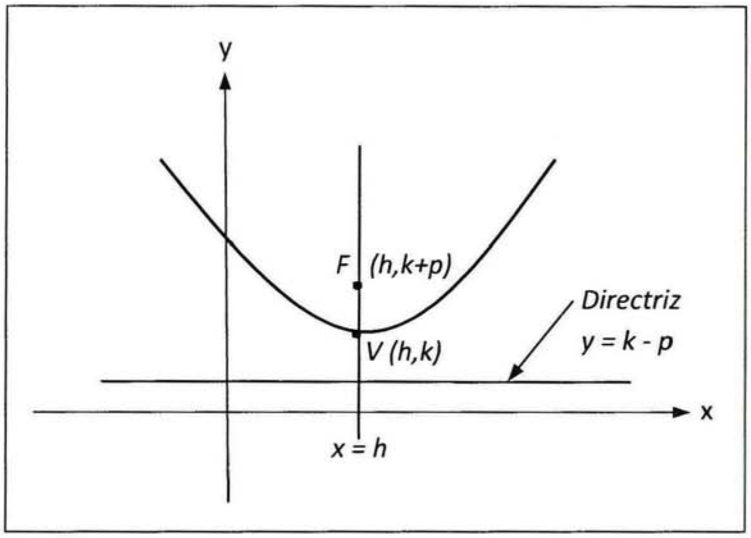
Luego el vértice tiene como coordenadas:

$$(h, k) = \left(-\frac{D}{2A}, \frac{D^2 - 4AF}{4AE}\right)$$

Al igual que en la parábola de eje focal horizontal, las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz se determinarán de forma geométrica (Figura 5). Para ello se requiere conocer el valor de la longitud focal, la cual está definida geométricamente (Sánchez, 2002, pág. 151) como:

$$p = -\frac{E}{4A} \qquad (10)$$

FIGURA 5. ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA DE EJE FOCAL VERTICAL



Por lo tanto las coordenadas del foco, las ecuaciones de la directriz y del eje y el ancho focal están definidas respectivamente por:

$$(h, k+p) = \left(-\frac{D}{2A}, \frac{D^2 - 4AF - E^2}{4AE}\right)$$

$$y = k - p = \frac{D^2 - 4AF + E^2}{4AE}$$

$$x = h = -\frac{D}{2A}$$

$$|4p| = \left|-\frac{E}{A}\right|$$

2.2 Método generalizado para la elipse

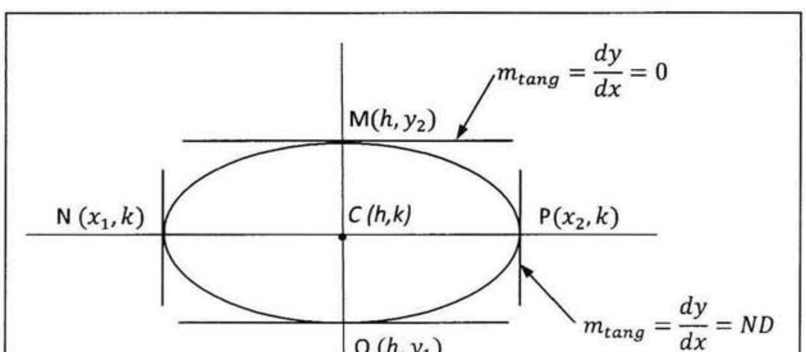
Para la elipse, en la ecuación 1, los valores de A y C son diferentes de cero y tienen igual signo. Por lo tanto, la ecuación 2 no cambia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2Ax - D}{2Cy + E}$$

Se observa en este caso cómo el valor de la derivada puede ser cero o no estar definida, es decir, la recta tangente a la curva puede ser horizontal o vertical como se muestra en la Figura 6 y, por lo tanto, se cumplen las condiciones expresadas en las ecuaciones 3 y 4.

A diferencia de las parábolas, en la elipse no es fácil determinar, a partir de la ecuación general, la orientación del eje focal, esto es, si tiene eje focal horizontal o vertical. En este caso, para determinar la orientación del eje focal, se recurrirá a las propiedades geométricas de la elipse, donde el semieje de mayor longitud corresponde al eje focal. De acuerdo con lo anterior, se procederá primero a encontrar las coordenadas de los puntos *M, N, O, P,* luego a determinar las distancias d_{MO} y d_{NP} (Figura 6) para establecer cuál de los dos corresponde al eje focal y continuar con el desarrollo del método.

FIGURA 6. VALOR DE LA PENDIENTE EN LA ELIPSE Y COORDENADAS DE LOS VÉRTICES



Sin perder generalidad, en la Figura 6 se puede observar que en los puntos *M* y *0* en los cuales $\frac{dy}{dx} = 0$, la abscisa correspondiente a estos puntos es igual a la abscisa h del centro de la elipse y en los puntos *N* y *P* en los cuales $\frac{dy}{dx} =$ *no existe,* la ordenada correspondiente es igual a la coordenada k del centro.

Despejando x en la ecuación 3 se obtiene:

$$x = h = -\frac{D}{2A} \qquad (11)$$

Despejando y en la ecuación 4 se obtiene:

$$y = k = -\frac{E}{2C} \qquad (12)$$

Luego las coordenadas del centro:

$$(h,k) = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$$

Para hallar las coordenadas de los vértices se parte de la hipótesis de que los puntos *M, N, O, P* pertenecen a la elipse, por lo tanto, deben satisfacer la ecuación 1. Reemplazando las ecuaciones 11 y 12 en la ecuación 1 se obtienen las coordenadas de dichos puntos:

Para $x = h = -\frac{D}{2A}$ se tiene:

$$A\left(-\frac{D}{2A}\right)^2 + Cy^2 + D\left(-\frac{D}{2A}\right) + Ey + F = 0$$

$$Cy^2 + Ey + \frac{4AF - D^2}{4A} = 0$$

Al resolver esta ecuación cuadrática para y se tiene:

$$y_1 = \frac{-E + \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C} \qquad (13)$$

$$y_2 = \frac{-E - \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C} \qquad (14)$$

Por lo tanto, las coordenadas de los puntos M y O están definidas por:

$$M = \left(-\frac{D}{2A}, \frac{-E + \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C} \right)$$

$$O = \left(-\frac{D}{2A}, \frac{-E - \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C} \right)$$

Para $y = k = -\frac{E}{2C}$ se tiene:

$$Ax^2 + C\left(-\frac{E}{2C}\right)^2 + Dx + E\left(-\frac{E}{2C}\right) + F = 0$$

$$Ax^2 + Dx + \frac{4CF - E^2}{4C} = 0$$

Al resolver esta ecuación cuadrática para x se tiene:

$$x_1 = \frac{-D + \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C}}}{2A} \qquad (15)$$

$$x_2 = \frac{-D - \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C}}}{2A} \qquad (16)$$

Luego las coordenadas de los puntos N y P están definidas por:

$$N = \left(\frac{-D - \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C}}}{2A}, -\frac{E}{2C} \right)$$

$$P = \left(\frac{-D + \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C}}}{2A}, -\frac{E}{2C} \right)$$

Como se mencionó anteriormente, con las coordenadas de estos puntos, se procederá a establecer si la elipse tiene eje focal horizontal o vertical determinando cuál de los 2 segmentos OM o NP es el semieje mayor.

Utilizando la fórmula de la distancia, se obtiene:

$$d_{OM} = \frac{\sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{C}$$

$$d_{NP} = \frac{\sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C}}}{A}$$

Al hacer las sustituciones correspondientes se puede presentar una de las siguientes posibilidades:

Caso No. 1: $d_{0M} < d_{NP}$ La elipse es de eje focal horizontal

Caso No. 2: $d_{0M} > d_{NP}$ La elipse es de eje focal vertical

Caso No. 3: $d_{0M} = d_{NP}$ Caso particular de la elipse: La circunferencia

Según el caso, a continuación se procederá a determinar los demás elementos de la elipse (Figura 7).

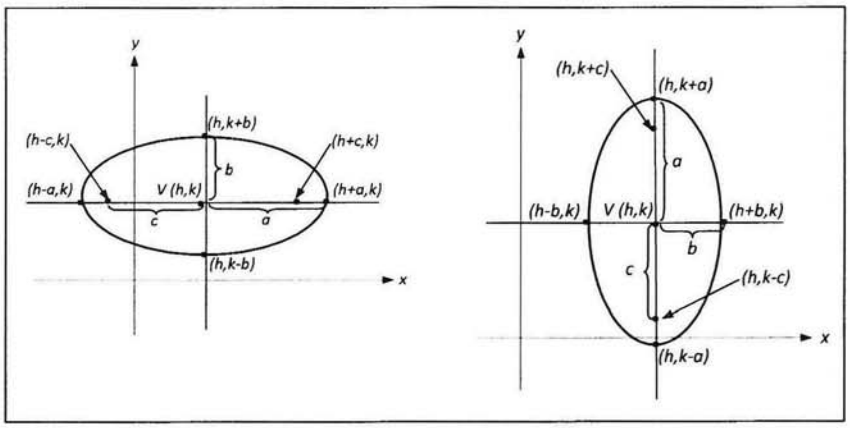
- Elipse de eje focal horizontal

  Caso No. 1: $d_{0M} < d_{NP}$ La elipse de eje focal horizontal

  La longitud de los semiejes está dada por:

  Semieje mayor $a = \frac{d_{NP}}{2}$

FIGURA 7. ELEMENTOS DE LA ELIPSE



Semieje menor $b = \dfrac{d_{OM}}{2}$

Al reemplazar a y b en la relación pitagórica para las elipses

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Se obtiene la expresión de la longitud focal:

$$c = \frac{\sqrt{(C-A)(AE^2 - 4ACF + CD^2)}}{2AC}$$

Por lo tanto, las coordenadas de los focos y la ecuación del eje focal para elipses de eje horizontal están definidas respectivamente por:

$$(h+c,k) = \left(\frac{\sqrt{(C-A)(AE^2 - 4ACF + CD^2)} - CD}{2AC}, -\frac{E}{2C}\right)$$

$$(h-c,k) = \left(\frac{-\sqrt{(C-A)(AE^2 - 4ACF + CD^2)} - CD}{2AC}, -\frac{E}{2C}\right)$$

$$y = k = -\frac{E}{2C}$$

- Elipse de eje focal vertical

Caso No. 2: $d_{0M} > d_{NP}$ La elipse de eje focal vertical

La longitud de los semiejes está dada por:

Semieje mayor $a = \frac{d_{OM}}{2}$

Semieje menor $b = \frac{d_{NP}}{2}$

Al reemplazar a y b en la relación pitagórica para las elipses

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Se obtiene la expresión de la longitud focal:

$$c = \frac{\sqrt{(A-C)(AE^2 - 4ACF + CD^2)}}{2AC}$$

Por lo tanto, las coordenadas de los focos y la ecuación del eje focal para elipses de eje vertical están definidas respectivamente por:

$$(h, k + c) = \left(-\frac{D}{2A}, \frac{\sqrt{(A-C)(AE^2 - 4ACF + CD^2)} - AE}{2AC}\right)$$

$$(h, k - c) = \left(-\frac{D}{2A}, \frac{-\sqrt{(A-C)(AE^2 - 4ACF + CD^2)} - AE}{2AC}\right)$$

$$x = h = -\frac{D}{2A}$$

Caso No. 3: $d_{0M} = d_{NP}$ representa una circunferencia

En este caso se puede utilizar cualquiera de los procedimientos descritos, teniendo en cuenta que A y C toman valores iguales y diferentes de cero.

2.3 Método generalizado para la hipérbola

Para la hipérbola en la ecuación 1 los valores de A y C son diferentes de cero y tienen signos contrarios; sin embargo, para efecto del análisis, la ecuación 2 no cambia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2Ax - D}{2Cy + E}$$

Se observa cómo en este caso el valor de la derivada puede ser cero o no estar definida, es decir, la recta tangente a la curva puede ser horizontal o vertical como se muestra en la figura 8 y, por lo tanto, se cumplen las condiciones expresadas en las ecuaciones 3 y 4.

Al igual que en las elipses, en la hipérbola no es fácil determinar, a partir de la ecuación general, la orientación del eje focal, esto es, si tiene eje focal horizontal o vertical. En este caso para determinar la orientación del eje focal se recurrirá al análisis de la pendiente de las rectas tangentes (Figura 8), para los casos de hipérbolas con eje focal horizontal y vertical, tal como se presenta a continuación.

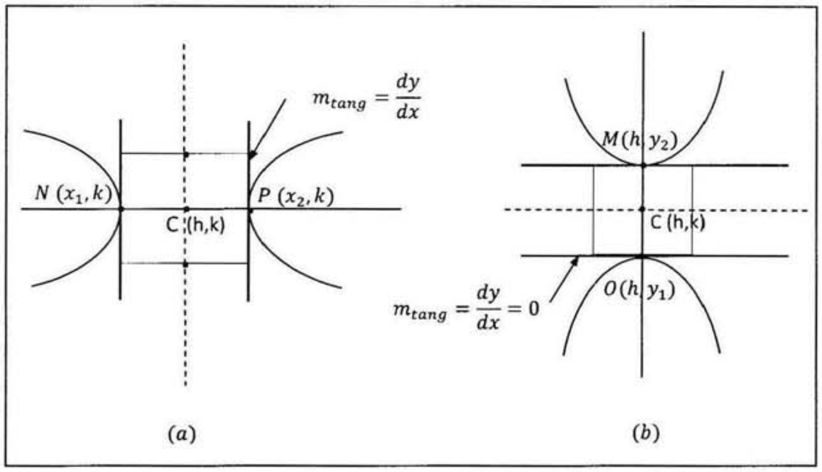
En la figura 8a se puede observar una hipérbola de eje focal horizontal donde en los vértices N y P $\frac{dy}{dx}$ = *no existe,* y la ordenada correspondiente a estos puntos es igual a la coordenada k del centro.

En este caso donde $\frac{dy}{dx}$ al despejar y en la ecuación 4 se obtiene:

$$y = -\frac{E}{2C} \qquad (17)$$

Para hallar las abscisas x_1 y x_2 de los vértices N y P se parte de la hipótesis de que éstos pertenecen a la hipérbola y, por lo tanto, deben satisfacer la ecuación 1. Reemplazando la ecuación 17 en la ecuación 1 se pueden obtener las coordenadas de dichos puntos, así:

FIGURA 8. VALOR DE LA PENDIENTE EN LA HIPÉRBOLA Y COORDENADAS DE LOS VÉRTICES



$$Ax^2 + C\left(-\frac{E}{2C}\right)^2 + Dx + E\left(-\frac{E}{2C}\right) + F = 0$$

$$Ax^2 + Dx - \left(\frac{E^2 - 4CF}{4C}\right) = 0 \qquad (18)$$

Se obtiene una expresión cuadrática, donde el valor de x está definido por:

$$x = \frac{-D \pm \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C}}}{2A} \qquad (19)$$

Si el discriminante de la ecuación 19 es positivo, esto es,

$$\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C} > 0$$

Entonces la hipérbola corta la recta $y = -\frac{E}{2C}$ en los puntos B y D (Figura 8a) y, por lo tanto, se trata de una hipérbola de eje focal horizontal.

De forma similar, en la figura 8b se puede observar una hipérbola de eje focal vertical, donde en los vértices M y O $\frac{dy}{dx} = 0$, y la abscisa correspondiente a estos puntos es igual a la abscisa del centro de la hipérbola.

En el segundo caso, donde $\frac{dy}{dx} =$ *no existe* al despejar x en la ecuación 3 se obtiene:

$$x = -\frac{D}{2A} \qquad (20)$$

Para hallar las ordenadas y_1 y y_2 de los vértices O y M se parte de la hipótesis de que éstos pertenecen a la hipérbola y, por lo tanto, deben satisfacer la ecuación 1. Reemplazando la ecuación 20 en la ecuación 1 se pueden obtener las coordenadas de dichos puntos, así:

$$A\left(-\frac{D}{2A}\right)^2 + Cy^2 + D\left(-\frac{D}{2A}\right) + Ey + F = 0$$

$$Cy^2 + Ey - \left(\frac{D^2 - 4AF}{4A}\right) = 0 \qquad (21)$$

Se obtiene una expresión cuadrática, donde el valor de y está definido por:

$$y = \frac{-E \pm \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C} \qquad (22)$$

Si el discriminante de la ecuación 22 es positivo, esto es,

$$\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A} > 0$$

Entonces, la hipérbola corta la recta $x = -\frac{D}{2A}$ en los puntos O y M (Figura 8b) y, por lo tanto, se trata de una hipérbola de eje focal vertical.

En conclusión, dependiendo del valor que tome el discriminante de las ecuaciones 19 y 22 puede establecerse si se trata de una hipérbola de eje focal horizontal o vertical.

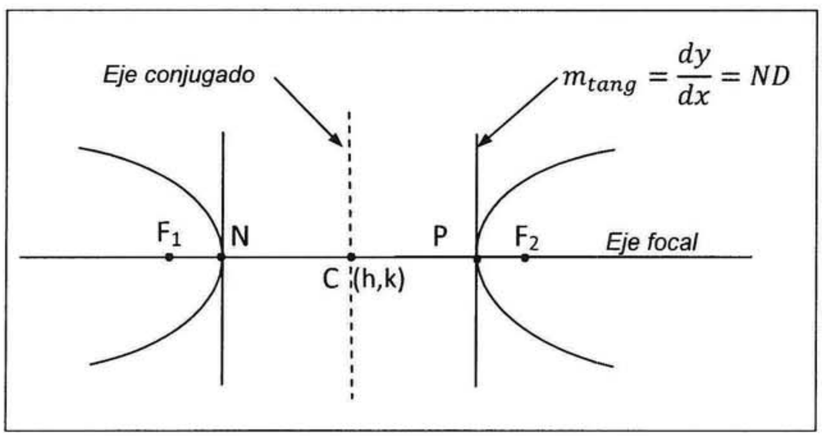
- Hipérbolas de eje focal horizontal

  Si se cumple:

$$\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C} > 0$$

Entonces tenemos una hipérbola de eje focal horizontal.

FIGURA 9. HIPÉRBOLA DE EJE FOCAL HORIZONTAL



Así con la expresión 17 se puede obtener la ordenada de los vértices. Puesto que ellos están localizados sobre el eje focal, entonces la expresión 17 también representa la ecuación de este eje y la ordenada de los otros elementos de la hipérbola que se encuentran en el eje focal, como son el centro y los focos. Al estar los vértices sobre la curva, las abscisas de estos puntos están dadas por la solución de la ecuación 18:

$$x_1 = \frac{-D + \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C}}}{2A} \qquad (23)$$

$$x_2 = \frac{-D - \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C}}}{2A} \qquad (24)$$

Por lo tanto, los vértices N y P de la hipérbola de eje focal horizontal tiene como coordenadas:

$$\left(\frac{-D \pm \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C}}}{2A}, -\frac{E}{2C} \right)$$

Al ser la curva simétrica con respecto al eje focal y al eje conjugado, entonces el centro de la hipérbola se encuentra localizado en el punto de intersección de los dos ejes (Sánchez, 2002, pág. 177). Como se mencionó anteriormente, la ordenada del centro y_c es la misma de los vértices por encontrarse estos puntos sobre el eje focal, y la abscisa, por las condiciones de simetría, está determinada por el punto medio del segmento formado por los dos vértices. En otras palabras, la expresión:

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad (25)$$

representa la ecuación para la abscisa del punto medio de un segmento, donde x_1 y x_2 son las abscisas de los vértices.

Al sustituir las ecuaciones 23 y 24 en la ecuación 25, se obtiene:

$$x_c = -\frac{D}{2A}$$

Así las coordenadas del centro de la hipérbola están definidas como:

$$(x_c, y_c) = (h, k) = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$$

Ahora se requiere conocer la longitud *2a* entre los vértices, el intercepto *b* de la curva con el eje conjugado[4] y la longitud *2c* entre los focos para determinar las coordenadas de estos últimos y las ecuaciones de las asíntotas, puesto que están definidas respectivamente como:

$$\left(h \pm c, -\frac{E}{2C}\right)$$

$$y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$$

La longitud *2a* se puede obtener como la diferencia entre las abscisas de los vértices, esto es:

$$|x_2 - x_1| = 2a \qquad (26)$$

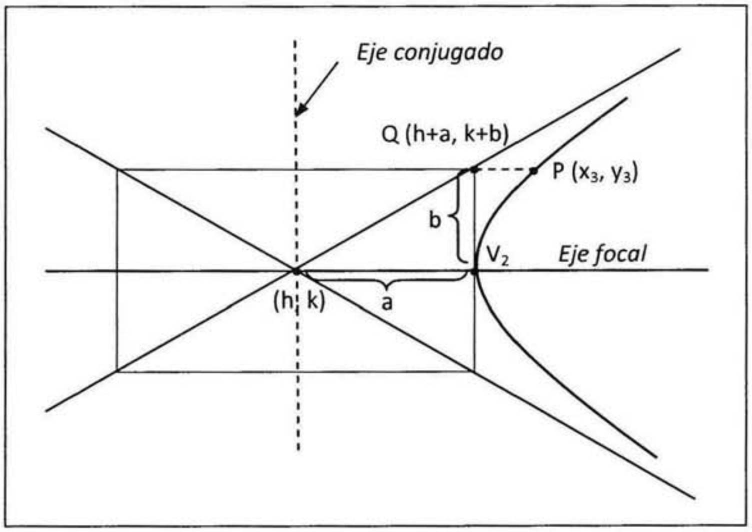
Al sustituir las ecuaciones 23 y 24 en la ecuación 26 se tiene:

$$a = \left|\frac{\sqrt{\dfrac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C}}}{2A}\right| \qquad (27)$$

Como la intersección *b* de la curva con el eje conjugado es imaginaria, se recurrirá al siguiente análisis para determinar su valor.

[4] Las ecuaciones para y se definen en términos de valor absoluto, debido a que representan distancias. Igual sucede para el caso de la hipérbola de eje focal vertical.

FIGURA 10. CONSTRUCCIÓN PARA DETERMINAR b EN HIPÉRBOLA DE EJE FOCAL HORIZONTAL



En la Figura 10 el punto Q con coordenadas (h + a, k + b) sobre la asíntota no pertenece a la curva, por tanto, para determinar el valor de b se considerará un punto $P\ (x_3, y_3)$ sobre la curva, con $y_3 = k + b$, y se procederá a partir de la ecuación canónica para hipérbolas de eje focal horizontal, así:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (28)$$

Reemplazando las coordenadas de P en la ecuación 28 se tiene:

$$\frac{(x_3-h)^2}{a^2} - \frac{(k+b-k)^2}{b^2} = 1$$

$$x_3^2 - 2hx_3 + (h^2 - 2a^2) = 0$$

Por la fórmula general se determina así el valor de la abscisa de P, x_3

$$x_3 = h \pm a\sqrt{2} \qquad (29)$$

Como $y_3 = k + b$, entonces:

$$b = y_3 - k \quad (30)$$

Por consiguiente, para obtener el valor de b se hace necesario hallar el valor de y_3, reemplazando la ecuación 29 en la ecuación 1:

$$A\left(h \pm a\sqrt{2}\ \right)^2 + Cy_3{}^2 + D\left(h \pm a\sqrt{2}\right) + Ey_3 + F = 0$$

Resolviendo para y_3, por la fórmula general, se obtiene:

$$y_3 = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4C\left[A\left(h \pm a\sqrt{2}\right)^2 + D\left(h \pm a\sqrt{2}\right) + F\right]}}{2C} \qquad (31)$$

Obtenida y_3, ya es posible hallar el valor de b a partir de la ecuación 30

$$b = \left|\frac{\sqrt{E^2 - 4C\left[A\left(h \pm a\sqrt{2}\right)^2 + D\left(h \pm a\sqrt{2}\right) + F\right]}}{2C}\right| \qquad (32)$$

Con los valores de a y b se determinan las coordenadas de los focos $(h \pm c, k)$. Debido a que los focos no son puntos sobre la hipérbola, entonces se procede a obtenerlos geométricamente utilizando la relación pitagórica:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

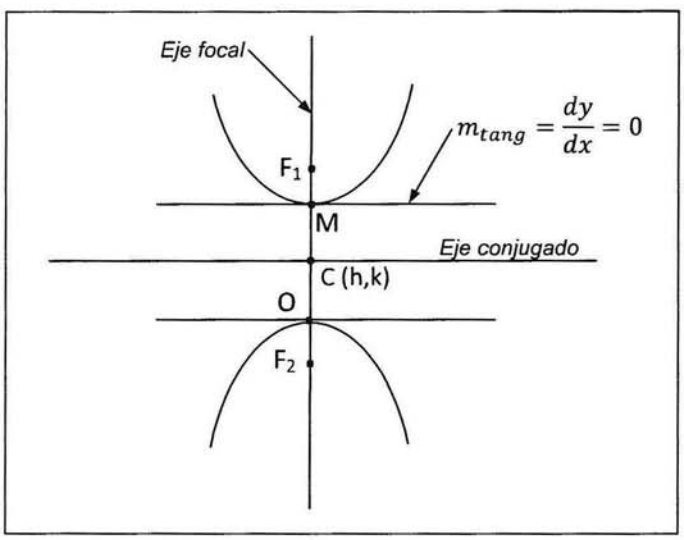
- Hipérbolas de eje focal vertical

  Si se cumple:

$$\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A} > 0$$

Entonces, tenemos una hipérbola de eje focal vertical

FIGURA 11. HIPÉRBOLA DE EJE FOCAL VERTICAL



Así, con la expresión 20, se puede obtener las abscisas de los vértices. Puesto que ellos están localizados sobre el eje focal, entonces la expresión 20 también representa la ecuación de este eje y la abscisa de los otros elementos de la hipérbola que se encuentran en el eje focal, como son el centro y los focos. Al estar los vértices sobre la curva, sus ordenadas están dadas por la solución de la ecuación 21:

$$y_1 = \frac{-E + \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C} \qquad (33)$$

$$y_2 = \frac{-E - \sqrt{\dfrac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C} \qquad (34)$$

Por lo tanto los vértices tienen como coordenadas:

$$\left(-\frac{D}{2A}, \frac{-E \pm \sqrt{\dfrac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C} \right)$$

Al igual que la hipérbola de eje horizontal, esta curva es simétrica con respecto al eje focal y al eje conjugado, entonces el centro de la hipérbola se encuentra localizado en el punto de intersección de los dos ejes (Sánchez, 2002, pág. 177). La abscisa del centro es la misma de los vértices por encontrarse dichos puntos sobre el eje focal, y la ordenada, por las condiciones de simetría, está determinada por el punto medio del segmento formado por los dos vértices. En otras palabras, la expresión:

$$y_c = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (35)$$

representa la ecuación para la ordenada del punto medio de un segmento, donde y_1 y y_2 son las ordenadas de los vértices.

Al sustituir las ecuaciones 33 y 34 en la ecuación 35, se obtiene:

$$y_c = -\frac{E}{2C}$$

Así, pues, las coordenadas del centro de la hipérbola están definidas como:

$$(x_c, y_c) = (h, k) = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C} \right)$$

Ahora se requiere conocer la longitud $2a$ entre los vértices, el intercepto b de la curva con el eje conjugado y la longitud $2c$ entre los focos para determinar las coordenadas de estos últimos y las ecuaciones de las asíntotas, puesto que son definidas respectivamente como:

$$\left(-\frac{D}{2A}, k \pm c\right)$$

$$y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$$

La longitud $2a$ se puede obtener como la diferencia entre las ordenadas de los vértices, así:

$$|y_2 - y_1| = 2a \qquad (36)$$

Al sustituir las ecuaciones 33 y 34 en 36 se tiene:

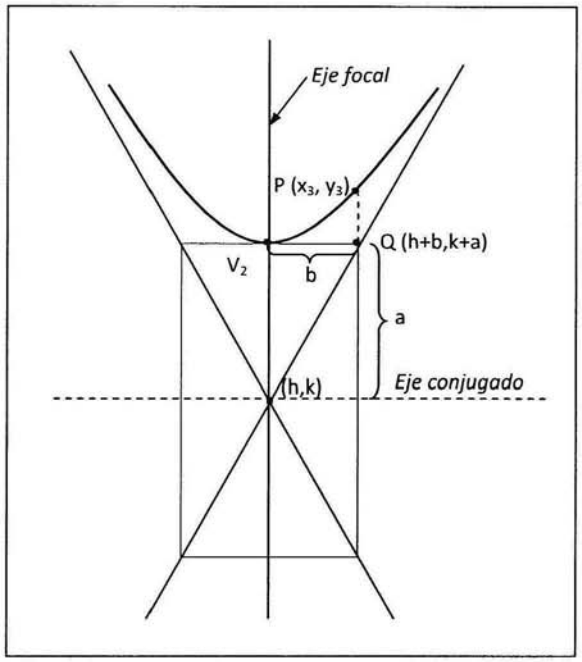
$$a = \left|\frac{\sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C}\right| \qquad (37)$$

Como la intersección b de la curva con el eje conjugado es imaginaria, para determinar este valor se recurrirá a un análisis similar al desarrollado para la hipérbola de eje focal horizontal.

En la Figura 12 el punto Q con coordenadas $(h + b, k + a)$ sobre la asíntota no pertenece a la curva, por tanto, para determinar el valor de b se considerará un punto $P\ (x_3, y_3)$ sobre la curva, con $x_3 = h + b$, y se procederá a partir de la ecuación canónica para hipérbolas de eje focal vertical:

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1 \qquad (38)$$

FIGURA 12. CONSTRUCCIÓN PARA DETERMINAR b EN HIPÉRBOLA DE EJE FOCAL VERTICAL



Reemplazando las coordenadas de P en la ecuación 38 se tiene:

$$\frac{(y_3 - k)^2}{a^2} - \frac{(h + b - h)^2}{b^2} = 1$$

$$y_3^2 - 2ky_3 + (k^2 - 2a^2) = 0$$

Por la fórmula general se determina así el valor de la ordenada de P, y_3

$$y_3 = k \pm a\sqrt{2} \qquad (39)$$

Como $x_3 = h + b$, entonces:

$$b = |x_3 - h| \qquad (40)$$

De esta forma, para obtener el valor de b se hace necesario hallar el valor de x_3, reemplazando la ecuación 39 en la ecuación 1, así:

$$Ax_3{}^2 + C\left(k \pm a\sqrt{2}\ \right)^2 + Dx_3 + E\left(k \pm a\sqrt{2}\right) + F = 0$$

Resolviendo para x_3 por la fórmula general se obtiene:

$$x_3 = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4A\left[C\left(k \pm a\sqrt{2}\right)^2 + E\left(k \pm a\sqrt{2}\right) + F\right]}}{2A} \quad (41)$$

Obtenida x_3, ya es posible hallar el valor de b a partir de la ecuación 40.

$$b = \left|\frac{\sqrt{D^2 - 4A\left[C\left(k \pm a\sqrt{2}\right)^2 + E\left(k \pm a\sqrt{2}\right) + F\right]}}{2A}\right| \quad (42)$$

Con los valores de a y b se determinan las coordenadas de los focos $(h \pm c, k)$. Debido a que los focos no son puntos sobre la hipérbola, entonces se procede a obtenerlos geométricamente utilizando la relación pitagórica:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

En la tabla 1 se hace un resumen de los resultados obtenidos para cada una de las secciones cónicas analizadas.

TABLA 1. COORDENADAS Y ECUACIONES GENERALES PARA LOS ELEMENTOS DE SECCIONES CÓNICAS

ELEMENTO	EXPRESIONES GENERALES	
	EJE FOCAL HORIZONTAL	EJE FOCAL VERTICAL
Ecuación General	$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$	
PARÁBOLAS CON VÉRTICE EN (h, k)		
Orientación del eje focal	$Si: \quad A = 0 \quad y \quad C \neq 0$	$Si: \quad C = 0 \quad y \quad A \neq 0$
Coordenadas de los vértices	$\left(\frac{E^2 - 4CF}{4CD}, -\frac{E}{2C}\right)$	$\left(-\frac{D}{2A}, \frac{D^2 - 4AF}{4AE}\right)$
Coordenadas del foco	$\left(\frac{E^2 - 4CF - D^2}{4CD}, -\frac{E}{2C}\right)$	$\left(-\frac{D}{2A}, \frac{D^2 - 4AF - E^2}{4AE}\right)$
Ecuación de la directriz	$x = \frac{E^2 - 4CF + D^2}{4CD}$	$y = \frac{D^2 - 4AF + E^2}{4AE}$
Ecuación del eje	$y = -\frac{E}{2C}$	$x = -\frac{D}{2A}$
ELIPSES CON CENTRO EN (h, k)		
Coordenadas del centro	$(h, k) = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$	
Coordenadas de los vértices	$\left(-\frac{D}{2A}, \frac{-E \pm \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C}\right)$	$\left(\frac{-D \pm \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C}}}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$
Distancia entre vértices	$d_{OM} = \frac{\sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{C}$	$d_{NP} = \frac{\sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C}}}{A}$
Orientación del eje focal	$Si: \quad d_{OM} < d_{NP}$	$Si: \quad d_{OM} > d_{NP}$
Coordenadas de los focos	$\left(\frac{\pm\sqrt{(C - A)(AE^2 - 4ACF + CD^2)} - CD}{2AC}, -\frac{E}{2C}\right)$	$\left(-\frac{D}{2A}, \frac{\pm\sqrt{(A - C)(AE^2 - 4ACF + CD^2)} - AE}{2AC}\right)$
Ecuación del eje	$y = -\frac{E}{2C}$	$x = -\frac{D}{2A}$
HIPERBOLAS CON CENTRO EN (h, k)		
Orientación del eje focal	$Si: \quad \frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C} > 0$	$Si: \quad \frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A} > 0$
Coordenadas del centro	$(h, k) = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$	
Coordenadas de los vértices	$\left(\frac{-D \pm \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C}}}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$	$\left(-\frac{D}{2A}, \frac{-E \pm \sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C}\right)$
a	$\left\lvert\frac{\sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{C}}}{2A}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{\sqrt{\frac{AE^2 - 4ACF + CD^2}{A}}}{2C}\right\rvert$
b	$\left\lvert\frac{\sqrt{E^2 - 4C\left[A\left(h \pm a\sqrt{2}\right)^2 + D\left(h \pm a\sqrt{2}\right) + F\right]}}{2C}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{\sqrt{D^2 - 4A\left[C\left(k \pm a\sqrt{2}\right)^2 + E\left(k \pm a\sqrt{2}\right) + F\right]}}{2A}\right\rvert$
c	$\sqrt{a^2 + b^2}$	
Coordenadas de los focos	$\left(h \pm c, -\frac{E}{2C}\right)$	$\left(-\frac{D}{2A}, k \pm c\right)$
Asíntotas	$y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$	$y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$

3. Discusión

El método que se plantea en este artículo es de fácil manejo para los estudiantes de los primeros semestres de educación superior, puesto que para su aplicación sólo se requiere de la identificación de los valores que toman los coeficientes de las variables que comprenden la ecuación general, y su sustitución en las expresiones entregadas. Es posible recomendar su presentación en los cursos de geometría analítica, previa construcción de los conceptos relacionados con las secciones cónicas y el estudio del método clásico, puesto que se corre el riesgo que los estudiantes mecanicen el método en detrimento del proceso analítico. En los cursos de cálculo diferencial, el desarrollo del método se puede presentar como una aplicación de la definición geométrica de la derivada.

Cuando las expresiones propuestas se aplican de forma manual, se requiere especial cuidado en las sustituciones por efectuar, debido a la gran cantidad de términos involucrados en ellas. Sin embargo, para salvar esta dificultad, se recomienda utilizar herramientas informáticas para sistematizar las expresiones simplificadas entregadas. Esto se constituye en una de las ventajas del método, pues son de fácil implementación en herramientas ofimáticas corrientes.

En aplicaciones con secciones cónicas, en el campo de la física, el método propuesto entrega las coordenadas y las ecuaciones de todos los elementos de estas secciones, sin recurrir al método clásico basado en el álgebra. Los coeficientes de las variables se pueden trabajar directamente en el dominio de los reales, a diferencia del método clásico que requeriría de un arduo trabajo de álgebra[5].

Por su parte, las expresiones que se presentan en la Tabla 1 fueron probadas para las diferentes secciones cónicas con resultados satisfactorios y exactos, sin embargo, se invita al lector a su utilización y verificación exhaustiva.

---

[5] Esto es evidente cuando en la ecuación general los coeficientes de las variables son números racionales o irracionales, donde la operatividad en el método clásico se complica en el momento de completar los trinomios cuadrados perfectos.

Es claro que el alcance del método no incluye secciones cónicas con rotación de ejes, lo cual los autores consideran un tema de interés para trabajos futuros.

Luego de una exhaustiva revisión bibliográfica, no se encontraron referencias de la aplicación de la derivada implícita para determinar las coordenadas de los vértices de secciones cónicas, de tal forma que se permitiera ampliar la discusión de los resultados aquí presentados.

4. Conclusiones

Se presentó un método alternativo para encontrar fácilmente las expresiones simplificadas que determinan las coordenadas y las ecuaciones de los elementos de secciones cónicas, las cuales se presentaron en la tabla 1, caracterizadas por su fácil aplicación y sistematización a partir de los coeficientes de las variables de la ecuación general, los cuales pueden estar en el dominio de los números Reales.

Las expresiones propuestas fueron probadas para diferentes secciones cónicas, obteniéndose resultados satisfactorios y exactos.

5. Referencias

Demana, F. D., Waits, B. K., Foley, G. D., & Kennedy, D. (2007). *Precálculo. Gráfico,numérico, algebraico.* Mexico, Mexico: Pearson.

Fleming, W., & Varberg, D. (1991). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* (Tercera ed.). Naucalpan de Juárez, México: Prentice - Hall.

Sánchez, A. V. (2002). *Fundamentos de geometría analítica* (Primera ed.). México, México: Thomson Learning.