



Institución Universitaria

# **Mejora de la eficiencia hidráulica de una bomba centrífuga operada como turbina utilizando métodos de optimización**

**Diego Alejandro Penagos Vásquez**

Instituto Tecnológico Metropolitano

Facultad de ingenierías

Medellín, Colombia

Año 2023

# Mejora de la eficiencia hidráulica de una bomba centrífuga operada como turbina utilizando métodos de optimización

**Diego Alejandro Penagos Vásquez**

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:

**Magister en Gestión Energética Industrial**

Director (a):

Magister, Jonathan Andrés Graciano Uribe

Codirector (a):

Doctor, Luis Fernando Grisales Noreña

Línea de Investigación:

Computación Avanzada, Diseño Digital y Procesos de Manufactura (CADD-ProM)

Grupo de Investigación:

Materiales Avanzados y Energía (MATyER)

Instituto Tecnológico Metropolitano

Facultad de Ingenierías

Medellín, Colombia

2023

*Hacer el bien y no mirar a quién,  
es la senda que lleva a lo más alto.  
La recompensa es la paz en el alma,  
y un mundo mejor como resultado.*

*Cuando extendemos nuestras manos con amor,  
la vida nos premia con un don del cielo.  
Cada acto noble, un tesoro en sí mismo,  
enriquece el alma y el mundo en desvelo.*

*Así que sigue el camino de la virtud y la bondad,  
donde la recompensa es la felicidad.  
Hacer el bien es la senda a seguir,  
y enriquece la vida, sin duda alguna, aquí.*

*Hacer el Bien: una adaptación inspirada en las  
enseñanzas de Ralph Waldo Emerson*

# Agradecimientos

A mis padres Diego Luis Penagos Sánchez y Blanca Rubiela Vásquez Gil, por instruirme y formarme como persona, al brindarme un apoyo incondicional. Agradezco por motivarme para la culminación de este proyecto de vida.

Quiero agradecer al Magister Jonathan Andrés Graciano Uribe y al Doctor Luis Fernando Grisales Noreña por dedicar su tiempo a mi formación y por confiar en mí para llevar a cabo este maravilloso proyecto. Son asesores espectaculares, que siempre han estado en constante apoyo. Reconozco también su disposición en incluirme en sus proyectos y ayudarme a crecer como profesional.

Expreso mi gratitud a todos mis profesores que hicieron parte de mi formación como estudiante de maestría. Ellos contribuyeron de forma comedida y profesional en el intercambio de conocimientos e ideas y propuestas para mejorar este proyecto de investigación.

Deseo expresar mi especial agradecimiento al grupo de investigación Materiales Avanzados y Energía (MATyER), en particular a la línea Computación Avanzada y Diseño Digital (CADD), por brindarme la oportunidad de llevar a cabo mi proyecto de Maestría en Gestión Energética Industrial en sus laboratorios. A los docentes de la línea CADD, Diego Andrés Hincapié Zuluaga y Sebastián Vélez García, gracias por su incondicional ayuda y apoyo en esta etapa de formación.

Quiero mostrar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que, con su respaldo, guía y consejo, desempeñaron un papel fundamental en la realización de este trabajo. Aprecio todas las muestras de apoyo y, sobre todo, la amistad que me han brindado.

## Resumen

Para una generación hidroeléctrica eficiente de bombas operando como turbina, la modificación de la geometría del impulsor es un factor clave. Aunque se ha investigado correlaciones matemáticas, simulaciones numéricas y optimización para la mejora en el desempeño de la turbina, los estudios no consideraron la relación directa entre las condiciones de operación en el punto de mayor eficiencia respecto a la geometría del impulsor. Por otra parte, los estudios de optimización actuales no tienen en cuenta las condiciones operativas de la turbo máquina, además se omitió la comparación entre algoritmos presentes en el estado del arte. El objetivo de este trabajo es mejorar la eficiencia hidráulica de una bomba operando como turbina, mediante la modificación de la geometría del impulsor y aplicación de métodos de optimización. Para alcanzar el objetivo de este trabajo de investigación, se caracterizó el impulsor y se desarrollaron siete modelos analíticos con base la ecuación de Euler para turbo máquinas, que se diferenciaron en las consideraciones geométricas del impulsor. Los modelos se validaron mediante la estimación y comparación de 28 bombas encontradas en la literatura. Posteriormente, mediante rutinas de optimización mediante el algoritmo por enjambre de partículas (PSO), algoritmo de búsqueda por vórtice (VSA) y algoritmo de enjambre de salpas (SSA), se estimó los parámetros adecuados del impulsor mejorado. Finalmente, se realizó la simulación fluido dinámica de un caso estudio, donde se validó la eficiencia obtenida del impulsor mejorado respecto a la geometría original. Como resultado, el modelo de mejor desempeño estimó la cabeza hidráulica con un error relativo promedio de 9,57 %, respecto a datos experimentales proporcionados en la literatura. Por otra parte, el algoritmo que precisó mejores resultados fue el algoritmo PSO, con una desviación estándar de 0,152 m en la cabeza hidráulica. Por último, la eficiencia simulada con el impulsor optimizado fue de 77,8 %, aumentando el 1,1 %, respecto a la eficiencia original de la turbo máquina. Con esto, se logró mejorar una opción existente en la generación hidroeléctrica que permita una conversión de energía más eficiente.

**Palabras clave:** bomba operando como turbina, eficiencia hidráulica, PSO, VSA, SSA.

## Abstract

For efficient hydroelectric power generation using pumps as turbines, the modification of the impeller's geometry is a key factor. Although mathematical correlations, numerical simulations, and optimization have been investigated to improve turbine performance, these studies did not consider the direct relationship between site conditions at the best efficiency point and the impeller's geometry. Furthermore, current optimization studies do not take into account the operational conditions of the turbomachine, and the comparison between algorithms in the state of the art was omitted. The objective of this work is to enhance the hydraulic efficiency of a pump operating as a turbine by modifying the impeller's geometry and applying optimization methods. To achieve the goal of this research, the impeller was characterized, and seven analytical models based on the Euler equation for turbomachinery were developed, differing in the geometric considerations of the impeller. The models were validated by estimating and comparing them to 28 pumps found in the literature. Subsequently, optimization routines using particle swarm optimization (PSO), vortex search algorithm (VSA), and salp swarm algorithm (SSA) were employed to estimate the suitable parameters for the improved impeller. Finally, a fluid dynamic simulation of a case study was conducted to validate the efficiency obtained from the improved impeller compared to the original geometry. As a result, the best-performing model estimated the hydraulic head with an average relative error of 9.57%, compared to experimental data provided in the literature. Furthermore, the PSO algorithm yielded the best results, with a standard deviation of 0.152 m in hydraulic head. Lastly, the simulated efficiency with the optimized impeller was 77.8 %, representing a 1.1 % increase compared to the original efficiency of the turbomachinery. This achievement contributes to improving an existing option in hydroelectric generation, enabling more efficient energy conversion.

**Keywords:** pump as turbine, hydraulic efficiency, PSO, VSA, SSA.

# Contenido

<b>1. Bombas operando como turbina .....</b>	<b>5</b>
1.1 Marco teórico.....	5
1.1.1 Contexto energético local .....	5
1.1.2 Centrales hidroeléctricas.....	6
1.1.3 Bomba centrífuga.....	7
1.1.4 Bomba centrífuga operada como turbina.....	11
1.1.5 Selección de la bomba operando como turbina .....	14
1.1.6 Tipos de impulsores radiales.....	15
1.1.7 Ecuaciones de rendimiento en bombas.....	17
1.1.8 Comportamiento de la partícula de fluido al interior del impulsor .....	18
1.1.9 Principios físicos del cálculo de la cabeza hidráulica .....	20
1.1.10 Validación de la ecuación de Euler para turbo máquinas.....	26
1.2 Estado del arte .....	30
1.2.1 Análisis numérico y experimental .....	30
1.2.2 Cálculo de parámetros en el punto de mayor eficiencia .....	32
1.2.3 Correlaciones matemáticas.....	34
1.2.4 Modificaciones geométricas en impulsores radiales .....	34
1.2.5 Optimización .....	40
1.2.6 Pérdidas hidráulicas .....	44
<b>2. Metodología.....</b>	<b>46</b>
2.1 Caracterización del perfil hidráulico .....	47
2.2 Modelos analíticos del impulsor de PAT .....	52
2.2.1 Selección de la PAT para optimización.....	53
2.2.2 Restricciones técnico operativas.....	54
2.2.3 Construcción de los modelos analíticos.....	60
2.3 Estrategia de solución por algoritmos de optimización.....	79
2.3.1 Optimización por enjambre de partículas.....	79
2.3.2 Algoritmo de búsqueda por vórtice .....	82
2.3.3 Algoritmo de enjambre de salpas .....	84
2.3.4 Codificación de los parámetros geométricos del impulsor de PAT .....	88
2.4 Simulación numérica.....	89
2.4.1 Parametrización del impulsor .....	91
2.4.2 Modelado del volumen de control del impulsor.....	97
2.4.3 Modelado del volumen de control de voluta y tuberías.....	98
2.4.4 Discretización del volumen de control.....	101
2.4.5 Configuración y condición de la simulación.....	107
<b>3. Resultados .....</b>	<b>111</b>
3.1 Análisis y validación de los modelos analíticos planteados .....	111
3.1.1 Modelo 1. Sin consideraciones previas.....	112
3.1.2 Modelo 2. Consideración del eje.....	113
3.1.3 Modelo 3. Consideración del ángulo de succión del álabe.....	113

3.1.4	Modelo 4. Consideración del eje y espesor de los álabes .....	114
3.1.5	Modelo 5. Consideración del ángulo de succión y espesor de los álabes .....	115
3.1.6	Modelo 6. Caudal como parámetro en la entrada.....	116
3.1.7	Modelo 7. Caudal y espesor de los álabes .....	117
3.1.8	Selección del modelo analítico .....	118
3.2	Optimización del perfil hidráulico .....	120
3.3	Validación numérica y fluido dinámica .....	125
3.3.1	Validación numérica del perfil original .....	125
3.3.2	Validación numérica del impulsor optimizado .....	129
3.3.3	Comparación fluido dinámica entre el impulsor P21 y el optimizado con PSO.....	134
<b>4.</b>	<b>Conclusiones y recomendaciones .....</b>	<b>142</b>
4.1	Conclusiones .....	142
4.2	Recomendaciones .....	143
	<b>Bibliografía .....</b>	<b>144</b>

## Lista de figuras

Figura 1-1: clasificación de bombas centrífugas. Adaptado de [19].	7
Figura 1-2: esquema de una bomba centrífuga. Adaptado de [20], [21].	8
Figura 1-3: perfil hidráulico de las bombas centrífugas según el tipo de flujo. Adaptado de [22].	9
Figura 1-4: geometría del impulsor respecto a la velocidad específica. Adaptado de [24].	10
Figura 1-5: dirección de flujo respecto al modo de operación de una bomba. Adaptado de [30].	12
Figura 1-6: gráfico de selección de turbinas. Adaptado de [37], [40].	15
Figura 1-7: impulsores radiales: (a) abierto, (b) semiabierto y (c) cerrado. Tomado de [42]–[44].	16
Figura 1-8: triángulo de velocidades de un impulsor radial en modo bomba.	19
Figura 1-9: triángulo de velocidades de un impulsor radial en modo turbina.	20
Figura 1-10: representación de la velocidad absoluta en el volumen de control de un álabe.	23
Figura 1-11: velocidad tangencial representada en el triángulo de velocidades.	23
Figura 1-12: representación vectorial del momento de fuerza ejercido por el rotor en un álabe.	24
Figura 1-13: vectores de velocidad en la entrada del álabe.	25
Figura 1-14: Esquema de recirculación de los vectores de flujo en PAT.	27
Figura 1-15: Esquema de vórtice formado al interior del impulsor de PAT.	28
Figura 1-16: Curva ideal de Euler y práctica, junto con las pérdidas hidráulicas.	29
Figura 1-17: interacción voluta impulsor.	32
Figura 1-18: modificaciones geométricas realizadas en el impulsor de una PAT.	36
Figura 1-19: detalle de los impulsores mejorados mediante algoritmos de optimización.	41
Figura 1-20: pérdidas hidráulicas respecto a la relación de caudal. Adaptado de [109].	45
Figura 2-1: diagrama de flujo de la presente investigación.	46
Figura 2-2: representación del perfil hidráulico a partir de la vista tridimensional del impulsor.	48
Figura 2-3: representación de los parámetros geométricos del impulsor.	49
Figura 2-4: diagrama de flujo para el desarrollo de los modelos analíticos.	53
Figura 2-5: procedimiento para el desarrollo de los modelos analíticos.	61
Figura 2-6: parámetros geométricos y áreas de flujo para el modelo 1.	63
Figura 2-7: parámetros geométricos y áreas de flujo para el modelo 2.	65
Figura 2-8: parámetros geométricos y áreas de flujo para el modelo 3.	67
Figura 2-9: parámetros geométricos y áreas de flujo para el modelo 4.	69

---

Figura 2-10: parámetros geométricos y áreas de flujo para el modelo 5.....	71
Figura 2-11: parámetros geométricos y área de flujo para el modelo 6. ....	73
Figura 2-12: parámetros geométricos y área de flujo para el modelo 7. ....	75
Figura 2-13: Comparación entre el caudal calculado y el experimental.....	77
Figura 2-14: pseudocódigo del algoritmo PSO. Adaptado de [130]. ....	82
Figura 2-15: pseudocódigo del algoritmo VSA. Adaptado de [130].....	84
Figura 2-16: pseudocódigo del algoritmo SSA. Adaptado de [127]. ....	88
Figura 2-17: diagrama de flujo del proceso de simulación de la PAT. ....	90
Figura 2-18: registro de datos del BEP en el módulo Vista CPD. ....	91
Figura 2-19: registro de los parámetros geométricos del impulsor. ....	92
Figura 2-20: resultados obtenidos en la Vista CPD para el modelado del impulsor.....	94
Figura 2-21: parámetros geométricos configurados del perfil hidráulico. ....	96
Figura 2-22: modelado del volumen de control del impulsor con los parámetros geométricos. ...	98
Figura 2-23: modelado del volumen de control de la voluta.....	99
Figura 2-24: modelado del volumen de control de la tubería de entrada y salida.....	100
Figura 2-25: ensamble del volumen de control de la turbo máquina. ....	101
Figura 2-26: independencia de malla para la cabeza y eficiencia.....	105
Figura 2-27: malla del volumen de control del impulsor y la voluta. ....	106
Figura 2-28: condiciones de frontera en los dominios computacionales. ....	109
Figura 3-1: error relativo obtenido de la evaluación del modelo 1. ....	112
Figura 3-2: error relativo obtenido de la evaluación del modelo 2. ....	113
Figura 3-3: error relativo obtenido de la evaluación del modelo 3. ....	114
Figura 3-4: error relativo obtenido de la evaluación del modelo 4. ....	115
Figura 3-5: error relativo obtenido de la evaluación del modelo 5. ....	116
Figura 3-6: error relativo obtenido de la evaluación del modelo 6. ....	117
Figura 3-7: error relativo obtenido de la evaluación del modelo 7. ....	118
Figura 3-8: gráfico de comparación de la cabeza hidráulica obtenida para las repeticiones de los algoritmos de optimización .....	124
Figura 3-9: curva característica numérica y experimental de la PAT evaluada. ....	127
Figura 3-10: comparación modificaciones geométricas entre impulsor P21 y optimizado con PSO. ....	129

---

Figura 3-11: curva característica numérica de los datos experimentales, P21, y algoritmos PSO, VSA y SSA.....	131
Figura 3-12: variación de la eficiencia hidráulica relativa, respecto a la simulación de P21. ....	134
Figura 3-13: contornos de presión de la PAT con el impulsor base (P21) y el PSO, en el BEP.....	135
Figura 3-14: contornos de velocidad de la PAT con el impulsor base (P21) y el PSO, en el BEP. ...	136
Figura 3-15: energía cinética turbulenta con el impulsor base (P21) y el PSO, en el BEP. ....	138
Figura 3-16: vorticidad formada en la PAT con el impulsor base (P21) y el PSO. ....	140

## Lista de tablas

Tabla 1-1: potencial de generación eléctrica por tipo de central [15]–[17].	7
Tabla 1-2: tipo de flujo en relación con los diámetros del impulsor. Adaptado de [25]–[27].	10
Tabla 1-3: ventajas y desventajas de PAT. Adaptado de [35].	13
Tabla 1-4: comparación de los tipos de impulsores radiales. Adaptado de [45], [46].	16
Tabla 1-5: errores obtenidos en el cálculo teórico de los parámetros en el BEP.	33
Tabla 1-6: correlaciones para la predicción del $N_{sp} - N_{st}$ .	34
Tabla 1-7: comparación de cada parámetro geométrico modificado del impulsor en PAT.	37
Tabla 1-8: algoritmos de optimización aplicados en PAT.	42
Tabla 2-1: nomenclatura de parámetros geométricos del impulsor.	49
Tabla 2-2: condiciones de operación de las PAT consultadas.	50
Tabla 2-3: parámetros geométricos de los impulsores consultados en la literatura.	51
Tabla 2-4: parámetros de la turbo máquina P21.	54
Tabla 2-5: rango de variación de los parámetros optimizados en la literatura.	55
Tabla 2-6: variación permisible de los parámetros geométricos.	57
Tabla 2-7: restricciones técnico operativas para la optimización del impulsor en PAT.	58
Tabla 2-8: restricciones técnico operativas para P21.	59
Tabla 2-9: Comparación entre los modelos 1 y 6.	76
Tabla 2-10: características de los modelos candidatos.	78
Tabla 2-11: codificación del problema de la maximización de la eficiencia hidráulica del impulsor de PAT.	89
Tabla 2-12: resultados obtenidos de independencia de malla.	103
Tabla 2-13: métricas de malla.	106
Tabla 2-14: condiciones de frontera configurada en el módulo CFX de Ansys.	108
Tabla 3-1: estadísticas de los modelos con mejor desempeño.	120
Tabla 3-2: resultados obtenidos en la evaluación del modelo 7.	122
Tabla 3-3: desviación estándar para las 1.000 repeticiones de los algoritmos.	123
Tabla 3-4: comparación de datos experimentales y CFD de los puntos simulados.	128
Tabla 3-5: resultados numéricos obtenidos mediante la optimización del impulsor con PSO.	131
Tabla 3-6: resultados numéricos obtenidos mediante la optimización del impulsor con VSA.	132

---

Tabla 3-7: resultados numéricos obtenidos mediante la optimización del impulsor con SSA. ....	132
Tabla 3-8: energía cinética turbulenta promedio disipada en los dominios, respecto al BEP de cada simulación, en $m^2/s^2$ . .....	139

## Lista de Símbolos y abreviaturas

### Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
$b$	Ancho del álabe	m	Tabla 2-1
$b$	Propiedad extensiva	-	Sección 1.1.9
$B$	Cantidad de momento lineal	Kg·m/s	Sección 1.1.9
$B_{sis}$	Cambio de una propiedad extensiva respecto al tiempo		Sección 1.1.9
$\vec{B}$	Fuerzas de cuerpo en diferencial de volumen	-	Sección 1.1.9
$C$	Velocidad absoluta	m/s	Sección 1.1.8
$C_m$	Velocidad radial	m/s	Sección 1.1.8
$C_u$	componente tangencial de la velocidad absoluta	m/s	Sección 1.1.8
$D$	Diámetro	m	Sección 1.1.3
$dA$	Diferencial de área	-	Sección 1.1.9
$dV$	Diferencial de volumen	-	Sección 1.1.9
$\vec{F}_{ext}$	Fuerza	N	Sección 1.1.9
$g$	Gravedad	m/s <sup>2</sup>	Sección 1.1.3
$H$	Cabeza hidráulica	m	Sección 1.1.3
$M$	Momento de fuerza del impulsor	Nm	Sección 1.1.9
$\dot{m}$	Flujo másico	kg/s	Sección 1.1.7
$\vec{n}$	Vector normal	-	Sección 1.1.9
$N_s$	Velocidad específica	-	Sección 1.1.3
$P_h$	Potencia hidráulica	W	Sección 1.1.7
$P_{outlet}$	Presión de salida	Pa	Sección 1.1.7
$P_{inlet}$	Presión de entrada	Pa	Sección 1.1.7
$Q$	Caudal	m <sup>3</sup> /s	Sección 1.1.3
$r$	radio	m	Tabla 2-1

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
$\vec{r}$	Punto radial	-	Sección 1.1.9
$\vec{T}$	Tensor de superficie	-	Sección 1.1.9
$U$	Velocidad tangencial	m/s	Sección 1.1.8
$\vec{v}$	Vector velocidad	m/s	Sección 1.1.9
$\vec{v}_{prom}$	Vector velocidad promedio	m/s	Sección 1.1.9
$W$	Velocidad relativa al álabe	m/s	Sección 1.1.8
$Y_{u\infty}$	Energía específica	J	Sección 1.1.9
$z$	Cantidad o número de álabes	-	Tabla 2-1

### Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
$\alpha$	Ángulo de flujo	°	Sección 1.1.8
$\beta$	Ángulo del álabe	°	Tabla 2-1
$\beta$	Factor de corrección	-	Sección 1.1.9
$\delta$	Espesor del álabe	m	Tabla 2-1
$\eta$	Eficiencia	%	Sección 1.1.7
$\lambda$	Ángulo de succión	°	Tabla 2-1
$\pi$	Constante pi	-	-
$\tau$	Torque	Nm	Sección 1.1.7
$\rho$	Densidad	kg/m <sup>3</sup>	Sección 1.1.7
$\varphi$	Ángulo de envolvimiento	°	Tabla 2-1
$\omega$	Velocidad angular	rpm	Sección 1.1.7

## Subíndices

Subíndice	Término
BEP	Punto de mayor eficiencia
ext	Externo
h	hidráulico
inlet	entrada
m	Radial o meridional
outlet	salida
p	Modo bomba
prom	Promedio
rad	Radial
sh	Relativo al eje
sis	Sistema
sp	Velocidad específica en modo bomba
st	Velocidad específica en modo turbina
t	Modo turbina
tan	Tangencial
u	Tangencial
1	Succión o borde de ataque (modo bomba) o salida (modo turbina)
2	Descarga o borde de salida (modo bomba) o entrada (modo turbina)

## Abreviaturas

Abreviatura	Término
<i>ANN</i>	<i>Artificial neural network</i>
<i>BEP</i>	<i>Best efficiency point</i>
<i>BP</i>	<i>Back propagation neural network</i>
<i>CAD</i>	<i>Computer-aided design</i>

---

<b>Abreviatura</b>	<b>Término</b>
CAES	<i>Compressed air energy storage</i>
CFD	<i>Computational fluid dynamics</i>
FEM	<i>Finite element method</i>
GA	<i>Genetic algorithm</i>
IPSE	Instituto de Planeación y Promoción de Soluciones Energéticas
MOGA	<i>Multi-objective genetic algorithm</i>
M-Prime	Trayectoria meridional del álabe
NPSH	<i>Net positive suction head</i>
NSGA-II	<i>Non-dominated Sorting Genetic Algorithm</i>
PAT	<i>Pump as turbine</i>
PBGA	<i>Pareto-based genetic algorithm</i>
PCH	Pequeña central hidroeléctrica
PSH	<i>Pumped Storage Hydroelectricity</i>
PSO	<i>Particle swarm optimization</i>
PtG	Energía mediante redes de gas
PV	<i>Photovoltaic system</i>
RBF	<i>Radial Basis Function</i>
SC	Sistema de control
SIN	Sistema interconectado nacional
STN	Sistema de transmisión nacional
SVM-HDMR	<i>Support vector machine and high-dimensional model representation</i>
TTR	Teorema de transporte de Reynolds
VC	Volumen de control
UPME	Unidad de planeación minero energética
ZNI	Zonas no interconectadas



# Introducción

Existe gran variedad de turbinas utilizadas en la generación hidroeléctrica, adaptables a las restricciones geográficas de la zona y las condiciones de operación. Una revisión enfocada en las turbinas hidráulicas evidenció que la turbina tipo Francis es ampliamente investigada, con una proporción del 74 % en publicaciones científicas, seguido de la turbina Kaplan con 8 % y la turbina tipo Pelton, al igual que las bombas centrífugas operadas como turbina, en un 6 % [1].

Con base en la revisión expuesta, las bombas centrífugas operadas como turbina (PAT por sus siglas en inglés), son una alternativa para generar electricidad. En consecuencia, la factibilidad de su costo y mantenimiento, facilidad de adquisición, amplios diseños con base a rangos de condiciones de operación como caudal y cabeza y menor cantidad de componentes metalmecánicos y de control en comparación con una turbina Francis, proporciona una factibilidad en su instalación y puesta a punto. En contraste, las PAT no están diseñadas para funcionar en modo turbina, debido que la geometría del impulsor no es apropiada para operar en sentido inverso. En consecuencia, la eficiencia de trabajo en modo turbina es inferior respecto a la operación convencional. Por otra parte, los fabricantes de bombas centrífugas no otorgan la curva característica para operar en modo turbina, tampoco ofrecen suficiente información para modelar la geometría de los componentes. En la literatura, se ha encontrado estudios de modelado de la turbo máquina y se ha analizado el comportamiento de la cabeza hidráulica, eficiencia y potencia. Los métodos de análisis incluyeron la dinámica de fluidos computacional (CFD por sus siglas en inglés), correlaciones matemáticas, análisis experimental, cálculos teóricos, variaciones geométricas, optimización y pérdidas hidráulicas. Como resultado, se ha encontrado que el diseño del impulsor es clave en el rendimiento de la turbo máquina. Uno de los inconvenientes que se presentó al analizar artículos académicos, radicó en la carencia de parámetros geométricos reportados en las investigaciones, por lo que es complejo desarrollar y validar un modelo analítico que estime la cabeza hidráulica en PAT. Además, el campo de estudio de optimización en impulsores radiales no ofreció estudios rigurosos en los que se comparen algoritmos para la estimación de la cabeza hidráulica mejorada, ni consideraron condiciones técnico operativas.

El presente trabajo buscó mejorar la eficiencia hidráulica de PAT al modificar la geometría del impulsor, por medio de la aplicación de métodos de optimización y consideraciones técnico

operativas. Con esto, se aportó una estrategia de optimización que permitió predecir el impulsor apropiado para la operación de la turbo máquina. Para esto, se utilizó un procedimiento matemático para calcular una geometría eficiente que permita disminuir el recurso computacional en diversas simulaciones fluido dinámicas. Finalmente, la estrategia abordó la mejora de una opción existente en la generación hidroeléctrica para que la conversión de energía sea eficaz.

### **Descripción del problema**

En la revisión de la literatura se logró encontrar estudios relacionados con métodos de optimización que predicen la mejora de la eficiencia hidráulica, desde un plano álabe-álabe y la vista del perfil hidráulico del impulsor. Sin embargo, las modificaciones no son mecánicamente adecuadas, debido que proponen modificar el impulsor de tal manera que se debería rediseñar la voluta, es decir que las soluciones proporcionadas no tenían presente la estructura de la turbomáquina ni sus restricciones de operación. Adicionalmente, los fabricantes de bombas centrífugas no otorgan la curva de operación al operar en modo turbina. Seguidamente, la información encontrada en catálogos no ofrece suficientes datos geométricos para modelar los álabes del impulsor.

Lo anterior propone la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué impacto tiene los métodos de optimización en la mejora la geometría del perfil hidráulico del impulsor, respecto a restricciones técnico operativas, en la eficiencia hidráulica?

### **Hipótesis**

Utilizando métodos de optimización, se podría seleccionar parámetros geométricos apropiados en el impulsor que incrementen la eficiencia hidráulica de la turbo máquina.

### **Objetivo general**

Mejorar la eficiencia hidráulica de una bomba centrífuga operada como turbina modificando la geometría del impulsor, por medio de la aplicación de métodos de optimización.

**Objetivos específicos**

1. Identificar los componentes geométricos del impulsor que impacten la eficiencia en una bomba centrífuga operada como turbina.
2. Modelar matemáticamente una bomba centrífuga operada como turbina, considerando la evaluación de la eficiencia hidráulica y el conjunto de restricciones técnico operativas.
3. Proponer una estrategia de solución basada en algoritmos de optimización que permita resolver el modelo analítico propuesto para la bomba centrífuga con el objetivo de mejorar la eficiencia hidráulica y respetar el conjunto de restricciones asociadas a esta.
4. Validar la eficiencia de la solución optimizada utilizando software de simulación numérica.

**Aporte investigativo**

El presente trabajo investigativo aportó una propuesta de mejora de la eficiencia hidráulica, mediante métodos de optimización, con base en un modelo analítico fundamentado en la ecuación de la cabeza hidráulica de Euler para turbomáquinas. Con lo anterior, se desarrolló la solución a un vacío científico en el que se respetó las condiciones técnico operativas de la turbo máquina y se redujo la cantidad de simulaciones fluido dinámicas para la mejora de la eficiencia hidráulica en el punto de mayor eficiencia.

**Notas previas para el lector**

Para evaluar el cambio en la eficiencia, se utilizó la diferencia entre la eficiencia experimental y la obtenida o simulada, en relación con la eficiencia experimental. Esto permitió determinar si hubo un aumento o reducción relativa. Esta metodología se adaptó al estándar utilizado en artículos académicos citados, lo que garantiza la coherencia en el registro del estado del arte y la presentación de resultados en este documento.

En la comparación del impulsor base y las simulaciones fluido dinámicas llevadas a cabo, se utilizó la siguiente nomenclatura:

- P21 hace referencia a la turbo máquina utilizada en la validación fluido dinámica respecto a la curva experimental.
- PSO, VSA y SSA son los resultados obtenidos con el impulsor optimizado con los algoritmos de optimización.

# 1. Bombas operando como turbina

## 1.1 Marco teórico

### 1.1.1 Contexto energético local

En la actualidad, la necesidad de convertir energía desde recursos primarios ha sido un tema en discusión. Los recursos primarios provienen de fuentes de energía renovables o no renovables. Las fuentes renovables aprovechan el potencial que proviene del aire, el sol y el agua, que son ilimitados en el entorno; mientras que las fuentes no renovables son recursos finitos en la naturaleza, como el petróleo y el carbón, dejando como residuo la emisión de gases contaminantes [2]. En consecuencia, los efectos negativos de los gases contaminantes han llevado a los investigadores a mejorar el rendimiento de los equipos de generación eléctrica que funcionan mediante fuentes de energía renovable [3]. Por otra parte, se ha evaluado el costo de la energía generada por medio de fuentes renovables, donde se ha evidenciado que el valor en [kWh] generado fue superior respecto a fuentes convencionales [4].

Los estudios enfocados en energías renovables buscan aportar en el avance del séptimo objetivo de desarrollo sostenible: energía asequible y limpia [5] y el duodécimo objetivo: producción y consumo responsable [6]. Con base en lo expuesto, un informe publicado por la agencia internacional de energía renovable, en 2023, señaló que la energía proveniente de fuentes renovables mantuvo una tendencia en el aumento de la capacidad generada, incrementando un 9,44 % en el periodo de 2021-2022 [7]. En la misma línea, un reporte realizado por Ren21 registró que la energía renovable tuvo un crecimiento estimado del 17,2 % en el 2022, aumentando la capacidad instalada en 348 GW [8]. Adicionalmente, la Asociación Internacional de energía hidroeléctrica reportó en el año 2022 un crecimiento del 1,9 % en la capacidad instalada de generación hidroeléctrica y 3,3 % de almacenamiento por bombeo, donde China aporta el 28,8 %. Colombia ocupa el vigésimo puesto a nivel global con 11,94 GW, equivalente al 0,9 % del total, siendo el tercer país en Sudamérica por generación mediante fuentes hidráulicas [9].

En el panorama local, Colombia tiene una capacidad instalada total de 17,8 GW, donde el 68,3 % proviene de fuentes hidráulicas [10]. La mayoría de las centrales hidroeléctricas se ubican en la cordillera andina [11]. La unidad de planeación minero-energética (UPME por sus siglas) expuso la proyección del alcance que tendrá el sistema de transmisión nacional (STN por sus siglas) para el año 2.026, donde la región Orinoquía está parcialmente conectada y la región pacífica y amazónica no estarán cubiertas. Adicionalmente, la UPME reportó el mapa de la capacidad efectiva de energía eléctrica del año 2.015, donde la región Andina prevalece en la generación hidroeléctrica, mientras que en la región caribe predominó el uso del gas y carbón [12]. Sin embargo, el resto de las regiones del país no poseen centrales de generación eléctrica, considerando que tienen un gran potencial hídrico. Por lo anterior, Colombia aún no ha desarrollado su capacidad hídrica en la generación de energía, para abastecer de electricidad a las comunidades más apartadas del territorio nacional.

### **1.1.2 Centrales hidroeléctricas**

Las centrales hidroeléctricas son instalaciones que aprovechan la energía potencial de fuentes hídricas para producir electricidad [13]. Se clasifican en función de su potencial de generación. La Tabla 1-1 muestra el tipo de central según su capacidad instalada, reportada por diferentes autores. Se puede observar que la capacidad de una pico central tiene un límite de 5 kW, mientras que la potencia desde una micro central hidroeléctrica varía dependiendo de la potencia generada.

En comparación, Colombia posee una capacidad instalada de 1.087,63 MW, distribuidas en 91 plantas con capacidad inferior a 20 MW. Antioquia aporta 437,6 MW, que equivale al 40,23 % de la capacidad total en el país [14].

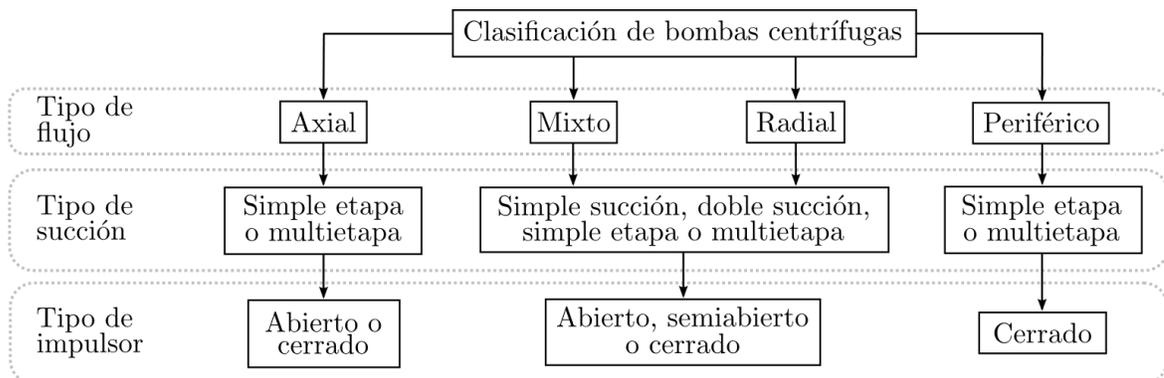
**Tabla 1-1:** potencial de generación eléctrica por tipo de central [15]–[17].

Tipo de central	Capacidad instalada		
	Ingfocol [15]	Haidar <i>et al.</i> [16]	Williams & Porter [17]
Pico central	0,5 - 5 kW	Hasta 5 kW	Hasta 5 kW
Micro central	5 - 50 kW	6-100 kW	6-100 kW
Minicentral	50 - 500 kW	Por debajo de 1 MW	100 kW – 1 MW
Pequeña central	500 kW - 20 MW	Hasta 25 MW	1-100 MW
Central hidroeléctrica	Mayor que 20 MW	Más de 100 MW	Más de 100 MW

### 1.1.3 Bomba centrífuga

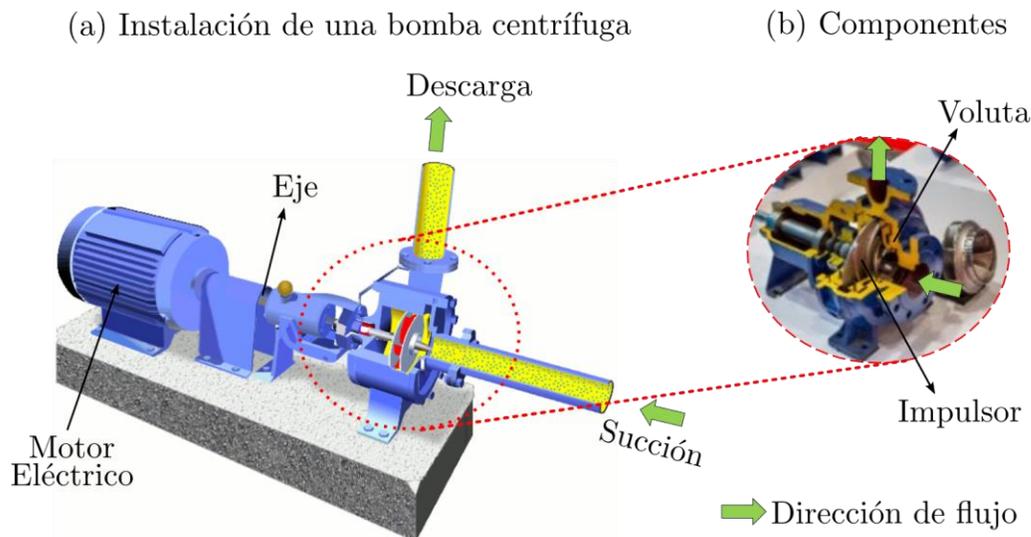
Una bomba centrífuga es una turbo máquina que transforma la energía cinética del agua en energía de presión, con el fin de elevar un fluido a un sitio de mayor altura [18]. La Figura 1-1 presenta la clasificación de las bombas centrífugas en relación al flujo, succión e impulsor [19]. Se puede observar la disponibilidad de las bombas en cuatro tipos de flujos: axial, mixto, radial y periférico. Adicionalmente, se tienen las bombas periféricas, que se diferencian por tener un impulsor más pequeño. En común, se detalla que las bombas pueden ser de una etapa o multietapa, además de ser de simple o doble succión para el tipo de flujo mixto o radial. Finalmente, el impulsor se puede fabricar abierto, semiabierto o cerrado.

**Figura 1-1:** clasificación de bombas centrífugas. Adaptado de [19].



La Figura 1-2 muestra el esquema general de instalación de una bomba centrífuga. En (a) se aprecia la instalación, donde la bomba succiona fluido y lo lleva directamente al impulsor, adicionando energía cinética al fluido para enviarlo a la voluta y dar salida por la tubería de descarga. Seguidamente, un motor eléctrico está acoplado a la bomba mediante un eje. En (b), se visualizan los componentes, mediante el acercamiento de un corte transversal de los componentes que conforman la turbo máquina, donde el impulsor está ensamblado al interior de la voluta.

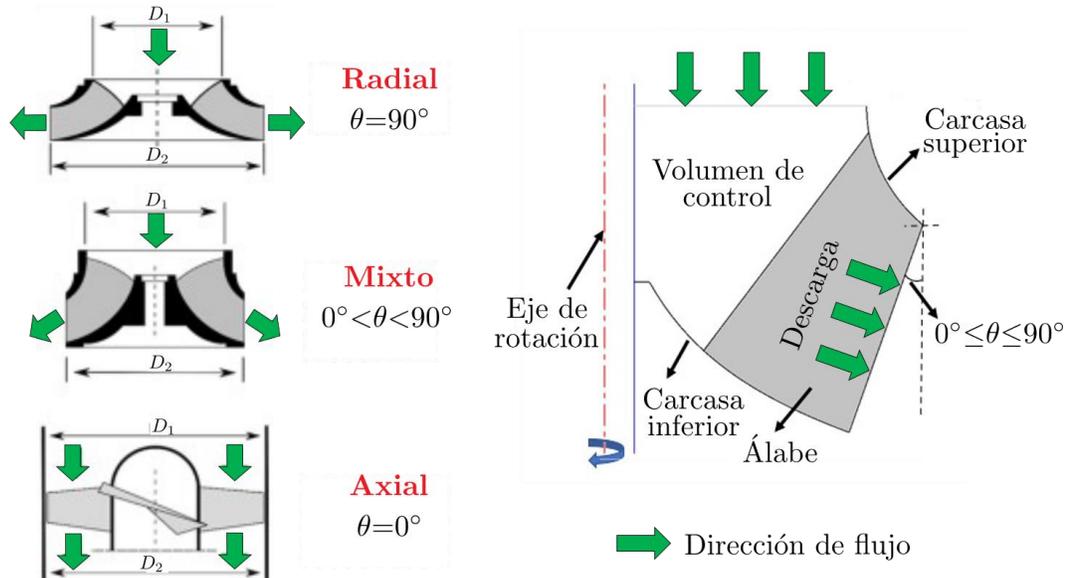
**Figura 1-2:** esquema de una bomba centrífuga. Adaptado de [20], [21].



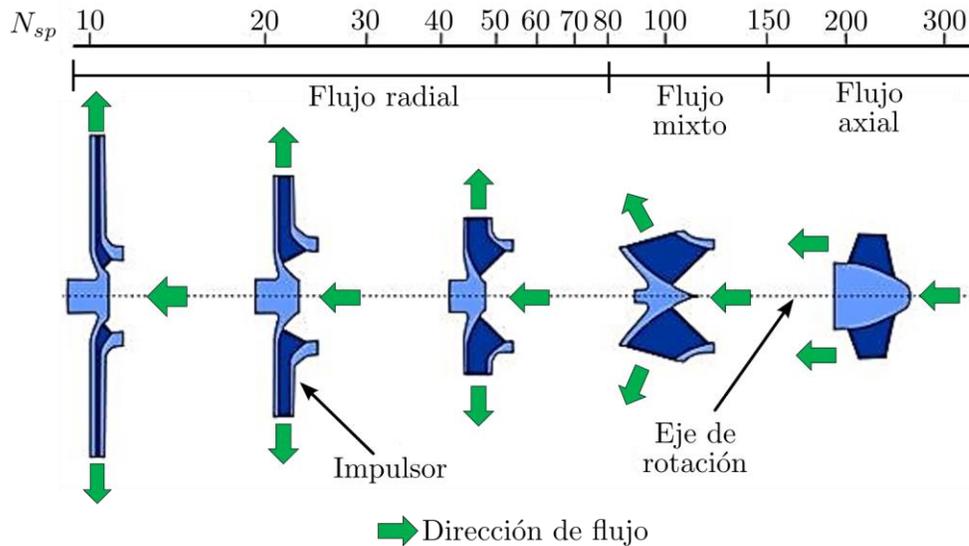
La Figura 1-3 presenta la vista del perfil hidráulico de acuerdo con el tipo de flujo: radial, mixto y axial. El flujo radial se identifica porque la dirección del fluido en la entrada tiene un cambio en la trayectoria de  $90^\circ$  respecto a la salida. Si el flujo que sale tiende a ser paralelo respecto a la entrada, hay una transición al flujo mixto y como límite se tiene el flujo axial en  $0^\circ$ , lo anterior se representó en (a). Adicionalmente, en (b) se muestran los componentes del perfil hidráulico, junto con la dirección de flujo y el ángulo de inclinación del álabe, que varía desde  $0^\circ$  hasta  $90^\circ$ .

**Figura 1-3:** perfil hidráulico de las bombas centrífugas según el tipo de flujo. Adaptado de [22].

(a) Perfil hidráulico respecto al tipo de flujo (b) Componentes del perfil hidráulico



La velocidad específica de la bomba centrífuga ( $N_{sp}$ ) estima el tipo de flujo del impulsor, conociendo las condiciones de operación (caudal y cabeza) en el punto de mayor eficiencia (BEP por sus siglas en inglés). Esta variable no es adimensional. Sin embargo, por simplicidad, los estudios la reportan sin unidades. Los valores que puede tomar  $N_{sp}$  depende del tipo de flujo del impulsor. En general, el flujo radial varía entre 10 y 80, el mixto es inferior a 160 y el axial oscila entre 140 y 400 [22]. Otra fuente consultada sugirió que el flujo radial se encuentra en un rango inferior a 70, el mixto es menor a 160 y el axial se encuentra entre 140 y 400 [23]. La Figura 1-4 muestra el cambio en la geometría que sufre el impulsor con el incremento de  $N_{sp}$  y el cambio del tipo de flujo [24]. Se detalla el ángulo de dirección del fluido tiende a ser paralelo al eje de rotación a medida que la velocidad específica aumenta.

**Figura 1-4:** geometría del impulsor respecto a la velocidad específica. Adaptado de [24].

El tipo de flujo también se puede calcular con la relación del diámetro del impulsor ( $D_2$ ) respecto al diámetro de succión ( $D_1$ ). La Tabla 1-2 muestra la comparación de cada impulsor, donde se relaciona el comportamiento del caudal y la cabeza hidráulica. Adicionalmente, se comparó el impulsor tipo Francis, dado que es un impulsor cerrado y está entre la transición del flujo radial y mixto.

**Tabla 1-2:** tipo de flujo en relación con los diámetros del impulsor. Adaptado de [25]–[27].

Tipo de flujo	$D_2/D_1$	Características
Radial	$>2,0$	Caudal bajo y cabeza hidráulica superior
Impulsor tipo Francis	1,5-2,0	Impulsor radial con caudal intermedio
Mixto	$<1,5$	Transición entre el flujo radial y axial
Axial	1	Caudal alto y cabeza hidráulica baja

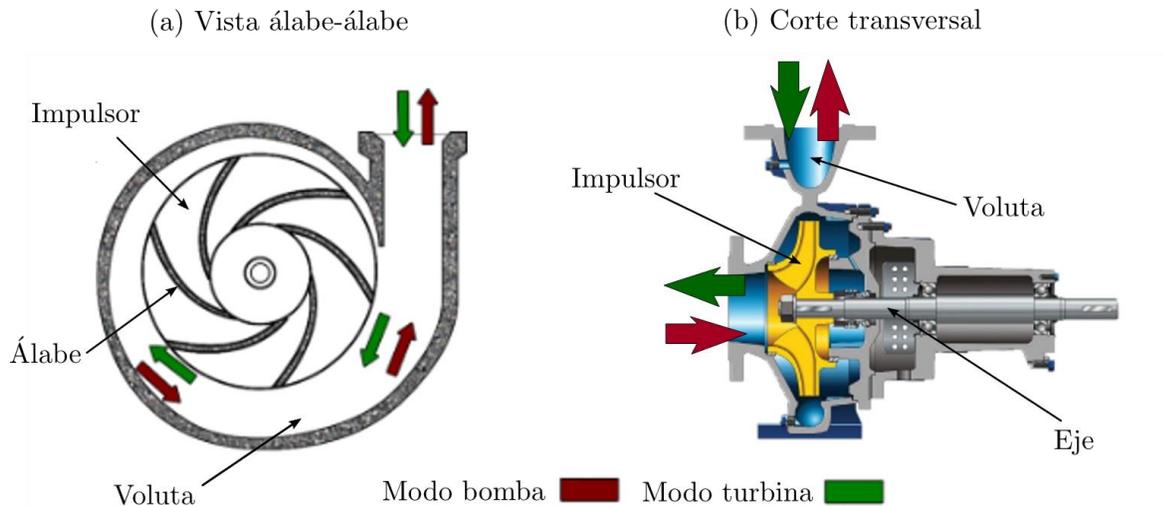
La selección de una bomba centrífuga depende de las condiciones de operación, es decir, el caudal requerido para transportar y la altura que se pretende elevar el flujo. Las bombas son utilizadas en diferentes sectores industriales, como en plantas de desalinización de agua, industria minera,

plantas petroquímicas, distribución de agua potable y residual. Además, las bombas centrífugas tienen ventaja sobre otros equipos utilizados en sistemas de bombeo por su producción en masa y disponibilidad en un amplio rango de operación [28]. Por otra parte, las bombas centrífugas de flujo radial son útiles para elevar fluidos a alturas considerables, mientras que las de flujo axial son preferibles en mayores caudales. Finalmente, el flujo mixto es una transición entre el flujo radial y axial. Los requerimientos de diseño para un sistema de bombeo, sugeridos en la literatura, son los siguientes [29]:

- Cabeza y caudal en el BEP.
- Velocidad de rotación del impulsor.
- Cabeza hidráulica máxima de bombeo.
- Potencia de entrada.
- Peso y altura de la máquina.
- Diámetro externo del impulsor.
- Diámetro de succión y descarga de la tubería.

#### **1.1.4 Bomba centrífuga operada como turbina**

Una bomba centrífuga operada como turbina, conocida en la literatura como PAT, es un término que se refiere a la operación inversa a una bomba centrífuga convencional: la turbo máquina recibe la energía cinética y potencial que proviene del agua y la transforma en energía mecánica rotacional, que se puede aprovechar mediante la conexión de un generador. La Figura 1-5 muestra el esquema de funcionamiento de una bomba centrífuga, en modo bomba y modo turbina. En (a) la vista álabe-álabe del esquema del impulsor y voluta, mientras que en (b) se visualiza la vista en corte, con la ubicación del eje [30].

**Figura 1-5:** dirección de flujo respecto al modo de operación de una bomba. Adaptado de [30].

Con el fin de aprovechar el potencial hidroeléctrico de las zonas no interconectadas (ZNI por sus siglas) y no depender de fuentes de energía no renovables, es necesario almacenar energía a gran escala para poder utilizarla en diferentes procesos. Un estudio realizado por Venera Jülch [31] reportó cuatro diferentes métodos: la hidroelectricidad de almacenamiento por bombeo (PSH, por sus siglas en inglés); energía almacenada por aire comprimido (CAES, por sus siglas en inglés); baterías de litio, plomo y vanadio; energía mediante redes de gas (PtG, por sus siglas en inglés). El autor concluye que el PSH y CAES son sistemas factibles a corto plazo, para potencia de 100 MW y capacidad de 400 MWh, mientras que PtG es rentable a largo plazo.

La PSH, que opera mediante PAT, se puede acoplar junto con sistemas de generación intermitente, como los parques eólicos y fotovoltaicos y estabiliza la electricidad al tener variaciones de otras fuentes [32]. Para comprobar lo anterior, un estudio realizó la evaluación tecno económica al integrar el sistema fotovoltaico y el híbrido (PV/PSH, por sus siglas en inglés) [33]. Los resultados mostraron que el sistema PSH fue mejor que almacenar energía fotovoltaica en baterías y comprobó su factibilidad económica. Por otra parte, un estudio sobre la viabilidad económica de una planta PSH concluyó que el costo fue de \$0,27 / kWh, valor que estaba por debajo de los generadores operados con diésel, cuyo costo fue de \$0,95 / kWh, por lo que implementar un

sistema PSH es más económico [34]. Finalmente, la inversión inicial de una central hidroeléctrica que utilice PAT puede ser inferior al 50 % respecto a turbinas convencionales (Pelton, Francis), para una capacidad instalada inferior a 50 kW, por lo que es una de las tecnologías de punta utilizadas en la actualidad [22]. A continuación, en la Tabla 1-3 se muestra un comparativo de las ventajas y desventajas que tiene un sistema de generación hidroeléctrica que utiliza PAT [35].

**Tabla 1-3:** ventajas y desventajas de PAT. Adaptado de [35].

Ventajas	Desventajas
Bajo costo, para capacidades menores a 50 kW.	Ausencia de álabes guía, por lo que no se pueden hacer controles hidráulicos.
Amplio rango de selección en el mercado, por su producción en masa.	Menor eficiencia comparado respecto al modo bomba, siendo notorio en condiciones de carga parcial.
Fácil mantenimiento e instalación.	Una bomba no está diseñada para operar como turbina.

Por otra parte, las consideraciones que se deben tener en cuenta para la instalación y funcionamiento de PAT son las siguientes [36]:

- Consideraciones mecánicas.
  - Velocidad de operación.
  - Temperatura de operación.
  - Potencia hidráulica de entrada.
- Consideraciones de flujo
  - Alta viscosidad.
  - Gases disueltos.
  - Material particulado o elementos sólidos.
  - Turbulencia.
- Instalación.
  - Condiciones de carga.

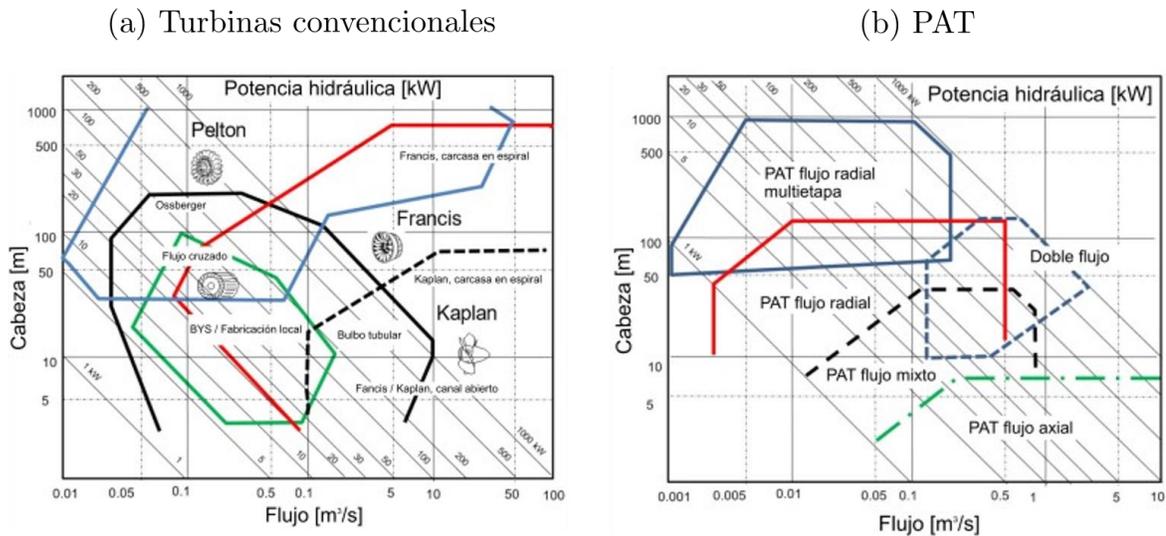
- Vibración y ruido.
- Tamaño de la turbo máquina.

### 1.1.5 Selección de la bomba operando como turbina

La Figura 1-6 muestra el gráfico de selección de turbinas para la generación hidroeléctrica. Se detalla la variación del flujo en el eje horizontal, y la cabeza hidráulica en el eje vertical, ambos en escala logarítmica. Las líneas paralelas estiman la potencia generada. En (a) se observa el área de aplicación de las turbinas tradicionales, con un rango de aplicación de cabeza hasta 1.000 m, caudal hasta 100 m<sup>3</sup>/s y potencia superior a 1.000 kW. Entre ellas se encuentran las turbinas tipo Pelton y Francis, utilizadas para la generación hidroeléctrica a gran escala, debido a la magnitud del caudal y cabeza requerida. De la misma forma, (b) expone la selección de PAT, con un caudal de operación hasta 10 m<sup>3</sup>/s. Sin embargo, el rango de selección es limitado, por lo que las condiciones de operación deben ser muy específicas para maximizar la conversión de energía [37].

El gráfico de selección mostrado es un estimado de datos experimentales, dado que los fabricante de bombas centrífugas no otorgan la curva de rendimiento en modo turbina [38]. Esto se debe a que la producción de las bombas centrífugas están enfocadas en aplicaciones industriales. Por otra parte, el rendimiento de la bomba difiere al operar en sentido inverso. La cabeza requerida es relativamente mayor a medida que el caudal aumenta. Aunque la potencia generada tiende a incrementar con el caudal, la eficiencia disminuye, por lo que no es recomendable utilizar esta turbo máquina en puntos alejados del BEP [39].

Figura 1-6: gráfico de selección de turbinas. Adaptado de [37], [40].



### 1.1.6 Tipos de impulsores radiales

Como se expuso en la Figura 1-3, los impulsores manufacturados son de flujo radial, mixto y axial. Los autores Plua *et al.* [41] realizaron la consulta de 56 artículos de investigación, donde cerca de un 80 % de los estudios de PAT se orientan en impulsores radiales. La Figura 1-7 muestra tres ejemplares comerciables de impulsores radiales, clasificados según el tipo de construcción y diámetro comercial: (a) abierto, de 16" [42], (b) semiabierto, de 40 mm [43] y (c) cerrado, de 22 pulgadas [44]. La Tabla 1-4 expone la comparación entre los tres tipos de impulsores, donde se expone la construcción, ventajas y desventajas, mediante una lista consultada de dos fabricantes de bombas centrífugas.

**Figura 1-7:** impulsores radiales: (a) abierto, (b) semiabierto y (c) cerrado. Tomado de [42]–[44].**Tabla 1-4:** comparación de los tipos de impulsores radiales. Adaptado de [45], [46].

Parámetro	Abierto	Semiabierto	Cerrado
Construcción	No posee carcasa en la parte superior e inferior	Posee una carcasa en la parte inferior	Posee carcasa en la parte superior e inferior
Tareas de mantenimiento fáciles: limpiar y reparar		Usado para fluidos con partículas abrasivas de suciedad	Alta eficiencia en comparación con el impulsor semiabierto
Ventajas	Maneja sólidos suspendidos	Mayor resistencia en comparación con el impulsor abierto	Proporciona más flujo a bajo NPSH (cabeza neta de succión positiva, por sus siglas en inglés)
		Mejor eficiencia en comparación con el impulsor abierto	Mayor resistencia en comparación con el impulsor semiabierto

Parámetro	Abierto	Semiabierto	Cerrado
			Desarrolla altas presiones
		El espacio libre entre las paletas y la carcasa debe ser pequeño, de lo contrario se producirá un gran deslizamiento y recirculación	Diseño complejo
Desventajas	Baja eficiencia		Alto costo de mantenimiento y fabricación
	Alto NPSH		
	Estructuralmente débil	Baja eficiencia en comparación con el impulsor cerrado	No apto para fluidos abrasivos

Con base en la Tabla 1-4, se evidenció que los impulsores radiales cerrados son preferidos en la generación hidroeléctrica mediante PAT, debido que los sólidos en suspensión se pueden controlar mediante filtros y la presión soportada por la turbo máquina es mayor que las otras variantes de impulsores. Otro aspecto es la eficiencia, dado que es superior a los impulsores abiertos o semiabiertos. Un inconveniente de los impulsores cerrados es su compleja geometría. Los fabricantes proveen en sus catálogos la información estrictamente necesaria para la instalación de la bomba, mientras que los parámetros geométricos de los álabes no son reportados o son complejos de interpretar [35].

### 1.1.7 Ecuaciones de rendimiento en bombas

El tipo de flujo en modo bomba se calcula por medio de la Ecuación (1-1). Esta ecuación relaciona la velocidad angular  $\omega_p$  (rpm), caudal  $Q_p$  (m<sup>3</sup>/s) y la cabeza  $H_p$  (m), en el BEP [47]. Similarmente, La Ecuación (1-2) presenta la velocidad específica en modo turbina, para encontrar las condiciones de operación en este modo [48]. Si  $\omega_t$  se expresa en (rad/s), se debe corregir el resultado multiplicando por 9,54, que es el factor de conversión. En otros casos, la  $N_{st}$  se suele multiplicar por un factor de 3,65, debido a su aplicación al sistema ruso. Para normalizar los valores obtenidos,

se dividió el resultado entre la inversa, es decir, entre 0,274 [49]. La Ecuación (1-3) se utiliza para encontrar la cabeza hidráulica en ambos modos de operación, relacionando la presión en la salida  $P_{outlet}$  (Pa) y en la entrada  $P_{inlet}$  (Pa) del flujo con respecto a la densidad  $\rho$  (kg/m<sup>3</sup>) y la gravedad  $g$  (m/s<sup>2</sup>) [50]. La eficiencia en modo bomba se calcula por medio de la Ecuación (1-4), integrando el flujo másico  $\dot{m}$  (kg/s), y la potencia hidráulica  $P_h$  (W), que es el producto entre el torque  $\tau$  (Nm) y la velocidad angular del impulsor  $\omega$  (rad/s). Finalmente, la Ecuación (1-5) permite obtener el cálculo de la eficiencia en modo turbina, siendo la inversa que en modo bomba [51].

$$N_{sp} = \omega_p \frac{\sqrt{Q_p}}{\sqrt[4]{H_p^3}} \quad (1-1)$$

$$N_{st} = \omega_t \frac{\sqrt{Q_t}}{\sqrt[4]{H_t^3}} \quad (1-2)$$

$$H = \frac{P_{outlet} - P_{inlet}}{\rho g} \quad (1-3)$$

$$\eta_p = \frac{Q_p H_p g \rho}{P_h} = \frac{\dot{m}_p H_p g}{\tau \omega} \quad (1-4)$$

$$\eta_t = \frac{P_h}{Q_t H_t g \rho} = \frac{\tau \omega}{\dot{m}_t H_t g} \quad (1-5)$$

Con base en la Ecuación (1-5), se pudo verificar que el cálculo de la potencia hidráulica consideró el torque ejercido en el eje de rotación y la velocidad angular. Además, la potencia hidráulica se puede obtener con el producto entre la fuerza y la velocidad ejercida en cada uno de los álabes, en los tres ejes coordenados.

### 1.1.8 Comportamiento de la partícula de fluido al interior del impulsor

El triángulo de velocidades es la representación vectorial del comportamiento cinético de la partícula de agua al interior del impulsor en una turbo máquina. Referencias bibliográficas como lo expuesto por Chapallaz *et al.* [37] y Carravetta *et al.* [48] han presentado el desarrollo matemático de los vectores de velocidad en turbinas hidráulicas. Algunos estudios han aplicado el triángulo de velocidades en PAT para fines teóricos y experimentales: el acople de un impulsor con un inyector [52] y la predicción de la curva característica [53].

La Figura 1-8 muestra el esquema vectorial en una vista álabe-álabe de un impulsor en (a). Las variables de velocidad representadas son las siguientes:  $U$  es la componente tangencial,  $W$  es relativa al álabe,  $C$  es la velocidad absoluta,  $C_m$  es la velocidad radial y  $C_u$  es la componente tangencial de la velocidad absoluta. Al suponer que el impulsor está rotando a una velocidad angular  $\omega$ , los vectores de velocidad resultantes se muestran en (b) y (c), para el borde de salida y ataque, respectivamente. El subíndice 1 indica las componentes vectoriales en el borde de ataque del álabe y 2 en el borde de salida. Adicionalmente, el ángulo de entrada y salida del álabe ( $\beta$ ) se forma al relacionar la componente tangencial y relativa. Finalmente, el ángulo de flujo ( $\alpha$ ) se forman respecto a las componentes tangencial y absoluta.

El esquema mostrado en la Figura 1-8 analizó el impulsor operando en modo bomba. Sin embargo, al analizar la operación en modo turbina, como se muestra en la Figura 1-9 los vectores de velocidad se invierten y las relaciones geométricas son equivalentes, según estudios expuestos en la literatura [54], [55].

**Figura 1-8:** triángulo de velocidades de un impulsor radial en modo bomba.

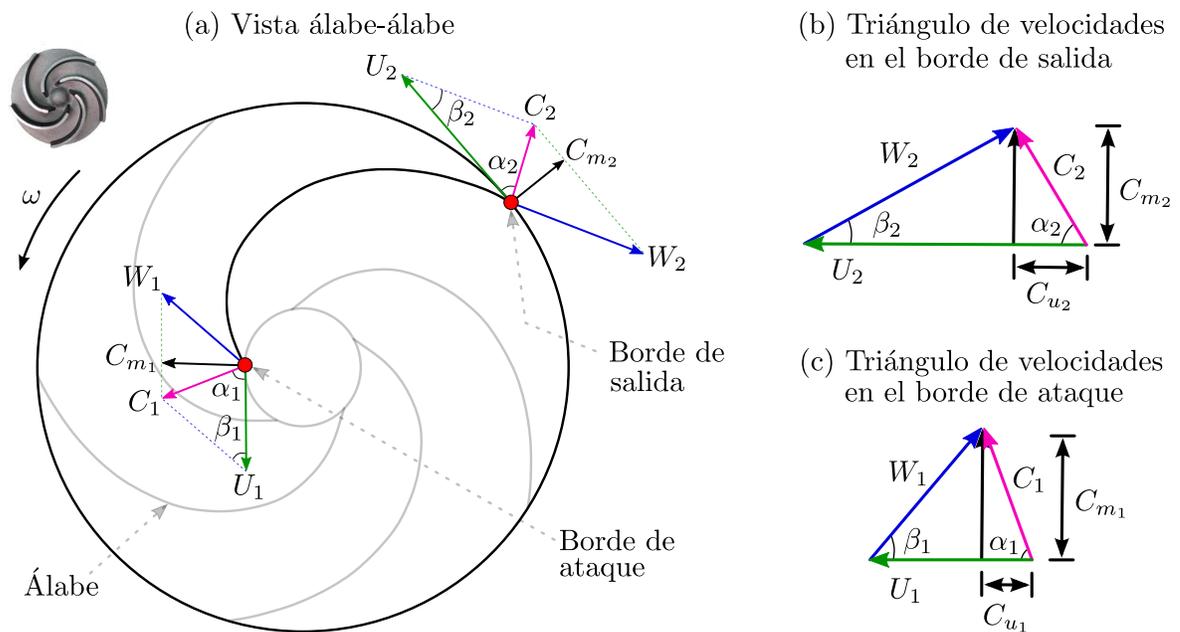
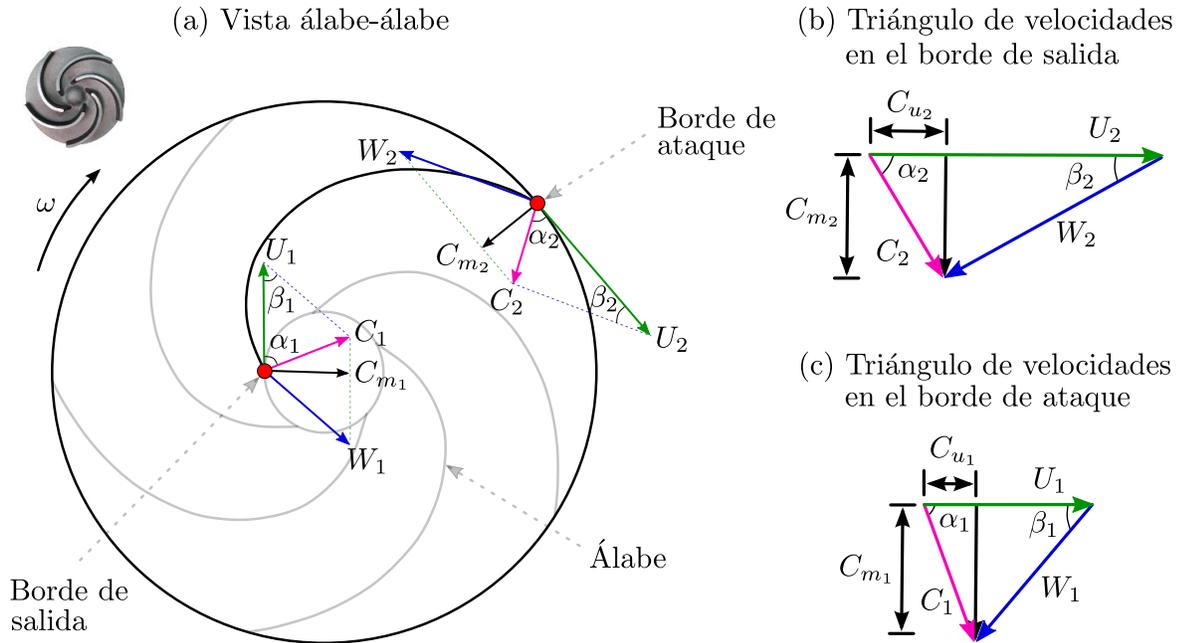


Figura 1-9: triángulo de velocidades de un impulsor radial en modo turbina.



### 1.1.9 Principios físicos del cálculo de la cabeza hidráulica

El cálculo teórico de la cabeza hidráulica de una turbina tiene como punto de partida el teorema de transporte de Reynolds (TTR por sus siglas), junto con la cantidad de momento lineal de un sistema. El TTR relaciona los cambios que hay en un volumen de control (VC por sus siglas), respecto a las propiedades extensivas de un sistema. Además, el TTR proporciona un vínculo entre los enfoques del sistema y el volumen de control de fluidos [56]. La Ecuación (1-6) representa el modelo de un VC estático que no se deforma en el tiempo. En la expresión,  $B_{sis}$  hace referencia al cambio de una propiedad extensiva respecto al tiempo. El término siguiente es la integración del cambio en el tiempo del VC para cada partícula que fluye hacia afuera del sistema, respecto a una propiedad extensiva ( $\mathbf{b} = \mathbf{B}/m$ ). Finalmente, el último término es la integración de una superficie diferencial cerrada o superficie de control (SC por sus siglas), denotada por el vector normal ( $\vec{n}$ ) y velocidad ( $\vec{v}$ ). Además, es posible deducir el TTR del teorema de Leibnitz aplicado a una sustancia.

$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho b dV + \oint_{SC} \rho b (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \quad (1-6)$$

El TTR puede escribirse en términos de la cantidad de momento de un sistema. Al tomar como base la segunda ley de Newton, se obtiene que las fuerzas externas ( $\vec{F}_{ext}$ ) que actúan en un VC fijo es el total de la sumatoria de las fuerzas de superficie y de cuerpo. Las fuerzas de cuerpo, representado como  $\vec{B}$ , hacen referencia a la fuerza que ejerce el vector gravitacional sobre un diferencial de volumen, en ausencia de otro tipo de fuerzas. Seguidamente, las fuerzas de superficie, representado con el tensor de superficie ( $\vec{T}$ ), que ejercen por las interacciones del fluido con las fronteras del sistema: presión y viscosidad. La Ecuación (1-7) muestra la expresión equivalente de la relación entre el TTR con la ecuación de momento lineal para un volumen de control fijo, para cualquier perfil de velocidad.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \iiint_{VC} \rho \vec{B} dV + \oint_{SC} \vec{T} dA = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho \vec{v} dV + \oint_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \quad (1-7)$$

La velocidad del fluido en la entrada y salida no es necesariamente uniforme, dado que el perfil de velocidad puede ser laminar o turbulento. Por lo tanto, se utiliza un factor de corrección ( $\beta$ ) para la aproximación del perfil, considerando el flujo másico ( $\dot{m}$ ) y la velocidad promedio ( $\vec{v}_{prom}$ ). La ecuación (1-8) representa el ajuste realizado a la integral de superficie de la Ecuación (1-7).

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho \vec{v} dV + \sum_{sal} \beta \dot{m} \vec{v}_{prom} - \sum_{ent} \beta \dot{m} \vec{v}_{prom} \quad (1-8)$$

Para la aproximación de la expresión de la Ecuación (1-8) en el cálculo de la cabeza hidráulica de turbo máquinas, se hacen las siguientes consideraciones:

- El flujo es unidimensional. Los vectores de corriente son paralelos y de igual magnitud. Para que lo anterior sea aplicado, el flujo debe ser uniforme, por lo que  $\beta=1$ .
- Régimen permanente. La cantidad de fluido es la misma en la entrada y salida del VC, siendo aplicable la ecuación de continuidad en fluidos.

- Las propiedades del fluido se conservan. La integración del cambio en el tiempo del VC es cero.
- Flujo ideal. No hay pérdidas por fricción o viscosidad.
- Flujo irrotacional. El fluido o su centro de masa no está girando sobre un eje.

Con base en las consideraciones anteriores, la Ecuación (1-9) presenta la expresión matemática resultante.

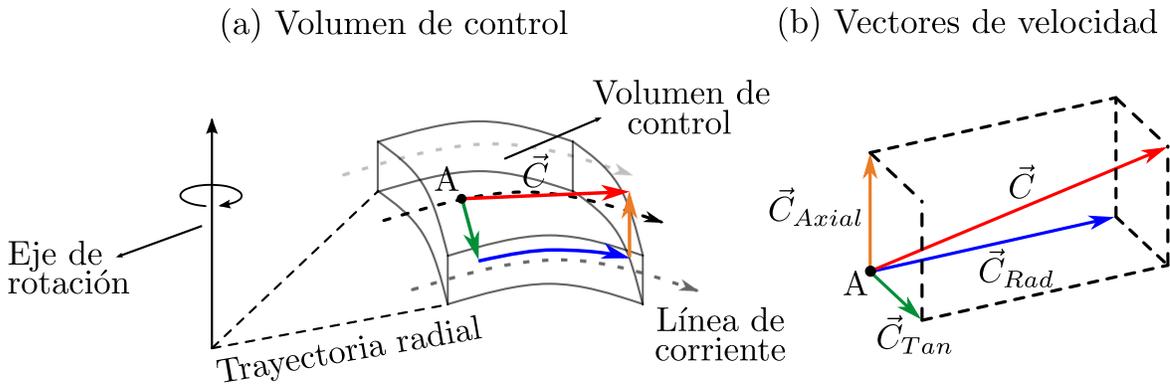
$$\sum \vec{F}_{ext} = \sum_{sal} \dot{m} \vec{v}_{prom} - \sum_{ent} \dot{m} \vec{v}_{prom} \quad (1-9)$$

La velocidad absoluta ( $\vec{C}$ ), representada en el triángulo de velocidades de la Figura 1-8, tiene tres componentes espaciales, denominadas como:

- Velocidad absoluta tangencial ( $\vec{C}_{tan}$ ). Es tangente al barrido del álabe.
- Velocidad absoluta radial ( $\vec{C}_{rad}$ ). Es perpendicular al eje del rotor de la turbo máquina.
- Velocidad absoluta axial ( $\vec{C}_{axial}$ ). Es paralela al eje del rotor.

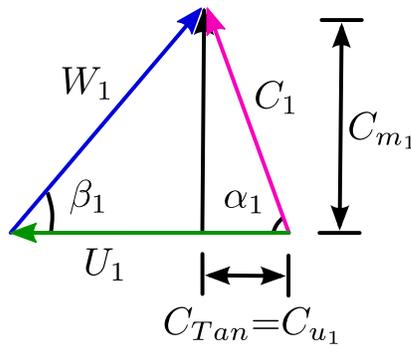
La Figura 1-10 muestra la representación vectorial de la velocidad absoluta ( $\vec{C}$ ) en el volumen de control de una sección del impulsor, para un punto en particular de la trayectoria del fluido en la línea de corriente (A). Para el cálculo de la cabeza hidráulica, la magnitud de las componentes de velocidad radial y axial son despreciables, debido al diseño del impulsor radial. Además, la existencia de componentes mecánicos externos en las turbo máquinas hace que ambas componentes se contrarresten.

**Figura 1-10:** representación de la velocidad absoluta en el volumen de control de un álabe.

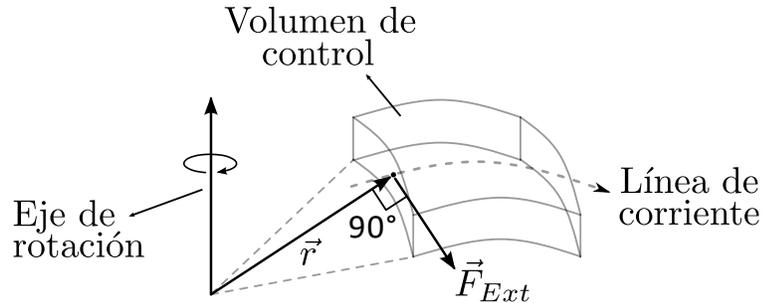


Teniendo en cuenta las consideraciones previas,  $\vec{C}_{tan}$  es paralela a la velocidad periférica que induce el rotor en un punto del álabe, de la componente tangencial de la velocidad absoluta, o bien,  $C_{Tan} = C_{u_1}$ . Con base en lo expuesto, la Figura 1-11 muestra los vectores resultantes que forma el triángulo de velocidades en la partícula de fluido.

**Figura 1-11:** velocidad tangencial representada en el triángulo de velocidades.



La Figura 1-12 presenta las componentes vectoriales del momento de fuerza ejercido en el VC de un álabe del impulsor, donde las fuerzas externas ( $\vec{F}_{Ext}$ ), en un punto radial ( $\vec{r}$ ), que actúan en el sistema son tangentes al barrido del rotor.

**Figura 1-12:** representación vectorial del momento de fuerza ejercido por el rotor en un álabe.

Con base en la Ecuación (1-9), la velocidad promedio es equivalente a la componente tangencial de la velocidad absoluta, es decir,  $\vec{v}_{prom} = \vec{C}_u$ , debido que el flujo es permanente. La Ecuación (1-10) muestra la relación del momento de fuerza con la sumatoria de fuerzas externas en dos puntos comparativos.

$$\vec{r} \times \vec{F}_{ext} = \dot{m}(\vec{r}_2 \times \vec{C}_{u_2} - \vec{r}_1 \times \vec{C}_{u_1}) \quad (1-10)$$

Dado que en la Ecuación (1-10), los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{C}_u$  son perpendiculares, el producto vectorial es equivalente al producto del módulo. La Ecuación (1-11) muestra la expresión resultante del momento de fuerza del impulsor ( $M$ ) hacia el fluido que atraviesa el VC con un caudal determinado ( $Q$ ).

$$M = \rho Q(r_2 C_{u_2} - r_1 C_{u_1}) \quad (1-11)$$

La potencia generada en el impulsor ( $P$ ) se obtiene al relacionar el momento y la velocidad angular, es decir,  $P = M\omega$ . La Ecuación (1-12) presenta la ecuación de potencia, considerando que  $U = r\omega$ . La energía específica intercambiada en el rodete ( $Y_{u\infty}$ ) se muestra en la Ecuación (1-13), donde esta se relaciona con las componentes tangenciales de la potencia. La energía específica tiene el símbolo de infinito ( $\infty$ ), debido que se considera que la energía intercambiada es constante. Por lo tanto, se considera un modelo con un impulsor de infinita cantidad de álabes [49].

$$P = \rho Q (U_2 C_{u_2} - U_1 C_{u_1}) \quad (1-12)$$

$$Y_{u\infty} = U_2 C_{u_2} - U_1 C_{u_1} \quad (1-13)$$

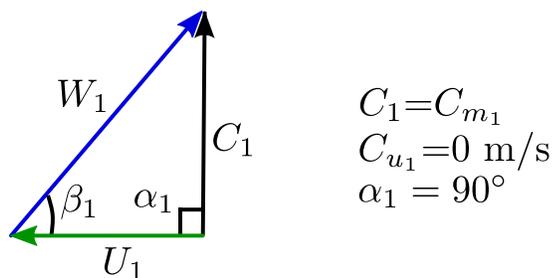
La Ecuación (1-14) representa la expresión general de la cabeza hidráulica generada por el impulsor ( $H_{u\infty}$ ), al considerar la relación entre la energía específica intercambiada por el rodete y la gravedad. Esta expresión también se conoce como la ecuación de Euler para turbo máquinas.

$$H_{u\infty} = \frac{1}{g} (U_2 C_{u_2} - U_1 C_{u_1}) \quad (1-14)$$

Finalmente, los impulsores de las bombas centrífugas son fabricados para que el flujo ingrese al impulsor con un ángulo cercano a  $90^\circ$  [57]. Esta modificación busca reducir la velocidad absoluta, disminuir la baja presión en la entrada del rodete, aumentar la capacidad de aspiración y reducir el riesgo de cavitación. La Figura 1-13 muestra la representación del triángulo de velocidades con la modificación mencionada. Como consecuencia, la velocidad tangencial de la componente absoluta es cero. La Ecuación (1-15) muestra la ecuación de Euler resultante.

$$H_{u\infty} = \frac{1}{g} (U_2 C_{u_2}) \quad (1-15)$$

**Figura 1-13:** vectores de velocidad en la entrada del álabe.



De acuerdo con lo mencionado en la sección 1.1.8, la operación en modo turbina es equivalente, con la diferencia que los vectores se posicionan en la dirección opuesta.

### 1.1.10 Validación de la ecuación de Euler para turbo máquinas

La Ecuación de Euler para turbo máquinas descrita en la sección anterior, tuvo las siguientes consideraciones:

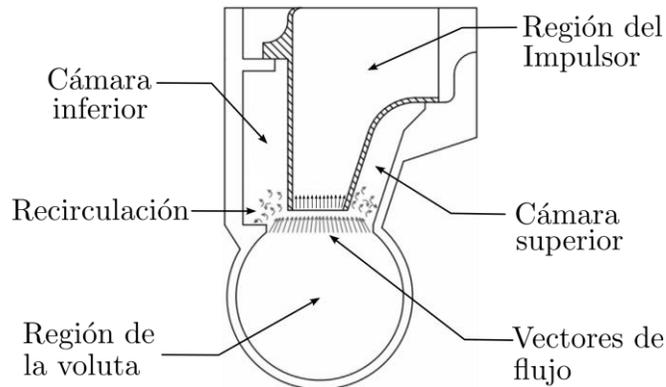
- Flujo unidimensional.
- Régimen permanente.
- Las propiedades del fluido se conservan.
- Flujo ideal.
- Flujo irrotacional.
- La energía intercambiada es constante.
- Flujo de salida con ángulo de  $90^\circ$  (modo turbina).

Al observar la Ecuación (1-15), se detalla que el comportamiento es lineal y depende del incremento del producto de la velocidad tangencial ( $U_2$ ) y la componente tangencial de la velocidad absoluta ( $C_{u_2}$ ) en la entrada del impulsor. Mediante la ecuación de Euler, la transferencia de energía ideal entre el fluido y el impulsor no es alcanzada, debido que se presentan pérdidas por fricción, choques y recirculación, lo que implica que la curva práctica presenta modificaciones. A continuación, con base en las anotaciones de los autores Chapallaz *et al.* [37] se detallan las pérdidas.

- Pérdidas por recirculación. También conocidas como pérdidas volumétricas. Hacen referencia a la cantidad de flujo que no contribuye con la transformación de energía. Este flujo circula a través del espacio entre el impulsor y la voluta, mediante la cámara superior e inferior. Para compensar el efecto de recirculación, es necesario que ingrese un mayor caudal en la turbo máquina, razón por la que el flujo del BEP incrementa. La Figura 1-14, adaptada de una investigación llevada a cabo por Derakshan *et al.* [58], muestra el esquema de recirculación de los vectores de flujo en PAT. En el corte transversal del impulsor y la voluta, se aprecia el espacio que existe entre ambos componentes, donde se

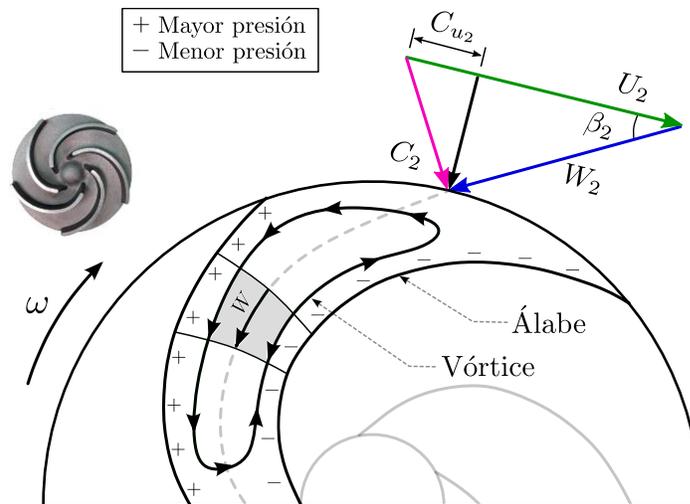
localizan los vectores de flujo. Una proporción de vectores se dirige a la región del impulsor, mientras que una cantidad inferior recircula en las cámaras superior e inferior.

**Figura 1-14:** Esquema de recirculación de los vectores de flujo en PAT.



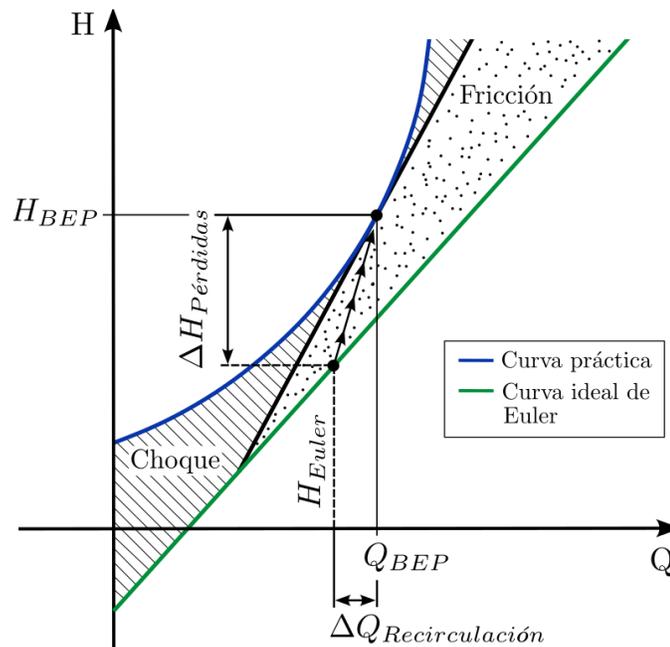
- Pérdidas por fricción. Este tipo de pérdidas es causado por el fluido y componentes mecánicos. El flujo experimenta fricción en las paredes, debido a la viscosidad. De igual forma, cuando el flujo no es uniforme, la rugosidad del material contribuye a la disminución de la velocidad en regiones cercanas a las paredes. Por otra parte, los rodamientos y sellos mecánicos generan pérdidas por el constante movimiento, mientras que las juntas y conexiones de la tubería que se acoplan con la voluta proporcionan fricción al momento que el fluido entra en contacto con la turbo máquina. Este tipo de pérdidas aumenta con el incremento del caudal.

**Pérdidas por choque.** Se relaciona con el cambio abrupto de dirección del flujo. Cuando el agua ingresa al impulsor, el fluido experimenta un cambio de dirección brusca, que genera turbulencia y proporciona pérdidas hidráulicas. Este tipo de pérdida es relativamente baja cuando la PAT trabaja en condiciones del BEP. La Figura 1-15 muestra un ejemplo del esquema de un vórtice formado entre dos álabes al interior del impulsor de PAT, por efecto del cambio de dirección del fluido entre el lado de mayor presión de un álabe y el lado de menor presión del álabe próximo.

**Figura 1-15:** Esquema de vórtice formado al interior del impulsor de PAT.

La Figura 1-16 presenta la gráfica que muestra las pérdidas hidráulicas respecto a la comparación entre la curva ideal de Euler y la práctica. Se puede observar que la curva práctica tiene un comportamiento creciente debido a suma de las pérdidas por choque y fricción, mientras que la curva ideal de Euler, la cual no considera pérdidas, mantiene un comportamiento lineal y se sitúa por debajo de la curva práctica. Adicionalmente, se puede observar un desplazamiento en el BEP al considerar las pérdidas totales y el caudal de recirculación.

**Figura 1-16:** Curva ideal de Euler y práctica, junto con las pérdidas hidráulicas.



En términos generales, de acuerdo con los autores Carravetta *et al.* [48], se tiene lo siguiente:

- Las pérdidas por recirculación son mayores cuando la turbo máquina opera en modo turbina.
- Las pérdidas en la voluta son menores en modo turbina.
- Las pérdidas por fricción son similares en ambos modos de operación.
- Las pérdidas por choque son considerablemente mayores al trabajar en condiciones de carga parcial, sobrecarga y velocidades angulares inferiores a las de diseño de la PAT.

Finalmente, la ecuación de Euler para turbo máquinas tiene las siguientes limitaciones:

- No considera el flujo de recirculación entre el impulsor y la voluta.
- Al despreciarse las pérdidas por fricción, no considera la rugosidad del material de fabricación del impulsor y la voluta y la viscosidad del fluido es nula.
- No tiene en cuenta la formación de vórtices, por lo que se asume un flujo sin turbulencia.
- No considera la existencia de álabes.

## 1.2 Estado del arte

En esta sección se presentaron los estudios e investigaciones desarrollados en el campo de PAT, separadas en seis secciones. Inicialmente, en el análisis numérico y experimental se describieron estudios que reconstruyeron la curva característica de la PAT, junto con el error relativo obtenido respecto a datos experimentales. Seguidamente, el cálculo de parámetros en el punto de mayor eficiencia evidenció el error relativo de seis investigaciones publicadas desde el año 2.016, donde analizaron la cabeza, eficiencia y potencia. Posteriormente, los estudios de correlaciones matemáticas reportaron ecuaciones matemáticas para la predicción de la velocidad específica y condiciones de operación de PAT, con base en experimentos y revisiones. Luego, se consultaron las modificaciones geométricas y de operación en el impulsor de PAT, evidenciando los parámetros más relevantes que aporten en el incremento de la eficiencia hidráulica. Más adelante, se registró la información sobre optimización en PAT, encontrando un total de nueve estudios en los que se utilizó la eficiencia como punto de comparación. Finalmente, se detallan artículos sobre las pérdidas hidráulicas, exponiendo la cantidad de energía disipada por los componentes constructivos de la turbo máquina.

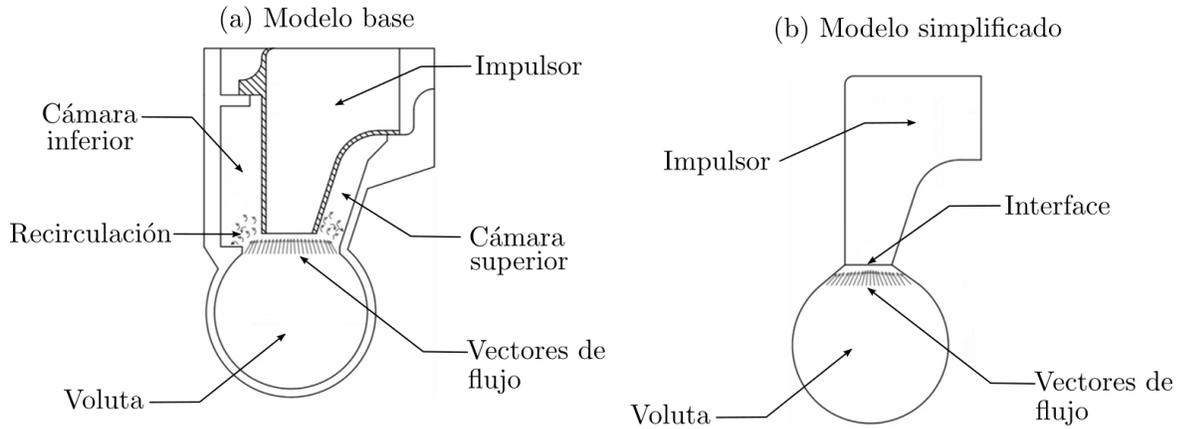
### 1.2.1 Análisis numérico y experimental

Con base en los Tipos de impulsores radiales, los estudios numéricos y experimentales se enfocaron en PAT con impulsor radial, debido que aportaron mayor cantidad de investigación publicada en la literatura. Según una revisión llevada a cabo por Plua *et al.* [41], el 80 % de las simulaciones numéricas fueron realizadas en el software ANSYS, mientras que los programas que preceden son FloEFD y OpenFoam con un 6 % de uso. Por otra parte, el 58 % de los investigadores utilizaron el modelo de turbulencia  $k-\varepsilon$ , seguido del modelo  $k-\omega$ -SST con un 27 % de aplicación. Seguidamente, el 49 % de los estudios utilizaron mallas estructuradas en los dominios computacionales, mientras que el 22 % fueron mallas no estructuradas.

Los análisis numéricos se han realizado para reconstruir la curva característica en modo bomba, con el fin de validar los resultados respecto a la información que otorga el fabricante. Por otra

parte, las condiciones de operación en modo turbina se han validado de forma numérica, experimental y fluido dinámica. Barbarelli *et al.* [38] evaluaron 12 bombas en ambos modos de operación, obteniendo la curva característica experimental y correlaciones numéricas para investigaciones posteriores. Fernández *et al.* [59] validaron la curva característica con datos experimentales, utilizando cinco caudales diferentes del BEP. Obtuvieron un error relativo máximo del 9 %. Yang *et al.* [60] realizaron la validación de la curva característica con la adición de relaciones empíricas consultadas de otros estudios, con un error menor a 3,33 %. Otras validaciones encontradas en la literatura han obtenido errores relativos de 12 % [61], 5-10 % [62] y 4 % [63], respecto a la eficiencia hidráulica.

Por otra parte, el método de acople entre el impulsor y la voluta puede modificar el comportamiento de la turbo máquina. Algunos autores, como Derakhshan *et al.* [64] y Du *et al.* [65] han utilizado el acople presentado en la Figura 1-17 en las simulaciones CFD. En la imagen se expone en (a) el modelo genérico base de una PAT radial de una etapa, destacando la cámara superior e inferior y la recirculación del fluido. Este flujo de recirculación tiene como función que haya lubricación entre el impulsor y la voluta, además de extraer el calor por la fricción y disipación de energía. Con base en lo anterior, los estudios citados en la presente sección no analizaron el efecto en la inclusión de ambas cámaras, debido que no fue el centro de análisis. Por otra parte, se puede detallar que, el modelo simplificado en (b), se acopla al impulsor y la voluta de tal forma que los vectores de flujo interactúen en la interfaz, transmitiendo información entre ambos dominios. Sin embargo, de acuerdo con el estudio citado de Derakhshan *et al.*, al no incluir ambas cámaras, obtuvieron un error máximo del 15,1 % en la eficiencia y 23,3 % en el coeficiente de cabeza, para condiciones de carga parcial. Otro estudio adicional llevado a cabo por Yang *et al.* [66] obtuvieron un error del 14,52 % en la eficiencia y 1,20 % en la cabeza hidráulica.

**Figura 1-17:** interacción voluta impulsor.

### 1.2.2 Cálculo de parámetros en el punto de mayor eficiencia

Se encontraron seis estudios en la literatura, que evidenciaron el cálculo teórico de las condiciones de operación de PAT, con base en el triángulo de velocidades (ver sección 1.1.8) y estudios previos. En las investigaciones consultadas, se detalló lo siguiente:

- Barbarelli *et al.* [67] desarrollaron un modelo para calcular la curva característica de PAT, empleando el triángulo de velocidades y considerando pérdidas hidráulicas. No obstante, los autores no buscaron mejorar la eficiencia hidráulica, ni la modificación de parámetros geométricos de la turbo máquina.
- Tan & Engeda [68] llevaron a cabo la predicción de la curva característica de cuatro ejemplares de PAT, mediante consideraciones matemáticas de estudios previos, considerando la velocidad específica y el diámetro del impulsor. Aunque los autores obtuvieron un error máximo de 4,23 % en la eficiencia hidráulica, no consideraron parámetros geométricos diferentes al diámetro del impulsor.
- Huang *et al.* [54] realizaron la estimación de las condiciones de operación de PAT, considerando el triángulo de velocidades. Si bien, los investigadores obtuvieron un error de 4,43 % en el cálculo de la eficiencia, estos se enfocaron solo en calcular la cabeza y el caudal de la PAT.

- Fontanella *et al.* [69] estudiaron el desarrollo de un modelo que permitiera calcular el rendimiento de una PAT, obteniendo un error de 4,48 %. Sin embargo, los autores no consideraron los efectos producidos por la geometría del impulsor y su incidencia en la mejora de la eficiencia hidráulica.
- Penagos *et al.* [39] investigaron el cálculo de las condiciones de operación de PAT, mediante los datos extraídos del catálogo del fabricante de la bomba. Aunque obtuvieron un error de 9,95 % en la cabeza, solo tuvieron en cuenta las condiciones de operación en modo bomba y expresiones relacionadas con la velocidad específica en modo turbina.
- Barbarelli *et al.* [35] modelaron matemáticamente los parámetros geométricos de la PAT en el impulsor y la voluta, con base en expresiones teóricas y tendencias matemáticas. Por otra parte, la investigación no tuvo un enfoque en el rendimiento de la PAT, donde solo hubo énfasis en calcular los parámetros geométricos y comparar el error obtenido respecto a la cabeza y caudal.

La Tabla 1-5 muestra el error relativo máximo obtenido por los autores, respecto al cálculo de las condiciones de operación en el BEP. De los estudios reportados, el error máximo en la cabeza hidráulica fue 21,36 %, mientras que el caudal fue de 14,37 %. Finalmente, el error relativo máximo reportado en la eficiencia fue de 4,48 %.

**Tabla 1-5:** errores obtenidos en el cálculo teórico de los parámetros en el BEP.

Año	Error relativo cabeza hidráulica (%)	Error relativo caudal (%)	Error relativo eficiencia (%)	Autor
2016	21,36	14,37	-	[67]
2016	7,78	9,95	4,23	[68]
2017	4,76	1,60	4,43	[54]
2020	1,03	0,48	4,48	[69]
2021	9,95	-	-	[39]
2022	5,00	3,70	-	[35]

Por otra parte, el error relativo aceptado por la literatura para el cálculo de la cabeza hidráulica es del 20 %, respecto a lo reportado por algunos autores [40], [70], [71], [72].

### 1.2.3 Correlaciones matemáticas

Por medio de datos experimentales, se ha evidenciado correlaciones de la velocidad específica en modo bomba y turbina, para predecir las condiciones de operación en PAT. La Tabla 1-6 resume la información encontrada en la literatura para la estimación de la correlación  $N_{sp} - N_{st}$  en rangos de  $N_{sp}$  desde 5,0 hasta 80, mediante la cantidad de PAT en pruebas experimentales y estudios de la literatura.

**Tabla 1-6:** correlaciones para la predicción del  $N_{sp} - N_{st}$

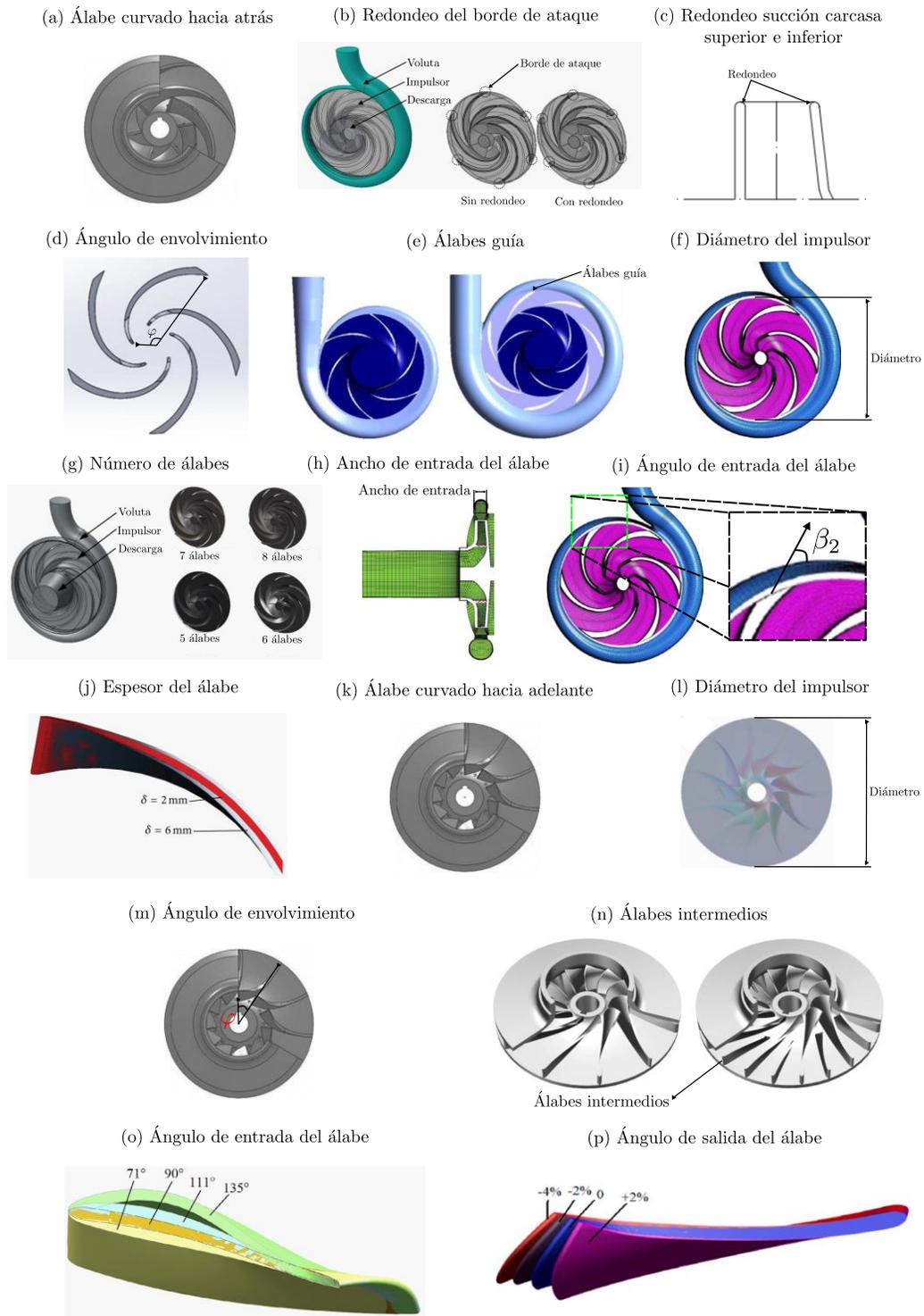
Año	Correlación $N_{sp} - N_{st}$	Rango $N_{sp}$	Evaluación	Autor
2019	$1,1048N_{st}$	5,0 – 80,0	59 estudios	[73]
2018	$0,9867N_{st}+5,2818$	9,0 – 64,0	27 experimentos	[40]
2017	$1,0826N_{st}+2,6588$	9,0 – 80,0	27 estudios	[74]
2016	$1,3297N_{st}-0,0883$	30,7 – 80,0	4 experimentos	[68]
2012	$1,1250N_{st}+1,7300$	5,0 – 80,0	55 estudios	[60]
2010	$1,0638N_{st}+3,3191$	14,6 – 79,1	9 experimentos, 4 estudios	[75]
2008	$03705N_{st}+5,0830$	14,6 – 55,6	4 experimentos, 7 estudios	[76]

### 1.2.4 Modificaciones geométricas en impulsores radiales

En la literatura se consultaron 22 estudios en los que se analizaron modificaciones geométricas y operativas en impulsores radiales de una etapa. El objetivo de la consulta fue analizar el comportamiento de la eficiencia hidráulica en el BEP para conocer el incremento o disminución respecto a los rangos modificados por los autores. La Figura 1-18 expone el esquema de modificación geométrica realizada por los autores, donde se visualiza específicamente la zona del

impulsor modificada. Además, se encontraron dos tipos de disposición de los álabes: curvados hacia atrás, con 15 estudios, y curvados hacia adelante, con cinco. En adición, se encontraron dos estudios en los que se compararon ambas curvaturas.

**Figura 1-18:** modificaciones geométricas realizadas en el impulsor de una PAT.



La Tabla 1-7 presenta la comparación de cada parámetro geométrico modificado del impulsor en PAT. Se detalla: el parámetro modificado, referenciando entre paréntesis la imagen de la Figura 1-18; el método utilizado, sea numérico (N) o experimental (E); la eficiencia base; la eficiencia mejorada de cada parámetro analizado; la mejora relativa, que muestra el incremento de la eficiencia al tomar como referencia la eficiencia del parámetro base.

**Tabla 1-7:** comparación de cada parámetro geométrico modificado del impulsor en PAT.

Modificación	Ref.	Método		Parámetro base		Parámetro mejorado		Mejora relativa (%)
		N	E	Detalle	Eficiencia (%)	Detalle	Eficiencia (%)	
Álabe curvado hacia atrás (a)								
Redondeo del borde de ataque y de la carcasa superior e inferior (b, c)	[77]		X	Sin redondeo	72,50	Con redondeo	76,50	5,52
	[78]		X	Sin redondeo	66,40	Con redondeo	71,10	7,08
	[79]	X		-	-	-	-	-
Ángulo de envolvimiento (d)	[82]	X		90 °, ns 34,44	80,81	80 °, ns 34,44	81,33	0,64
	[83]	X		90 °	67,29	130 °	67,73	0,65
Álabes guía (e)	[65]	X		120 °	12,90	-60 °	16,00	24,03
	[84]	X		Sin álabes guía	65,77	Con álabes guía	69,19	5,20

Modificación	Ref.	Método		Parámetro base	Parámetro mejorado		Mejora relativa (%)	
		N	E	Detalle	Detalle	Eficiencia (%)		
	[85]		X	Sin álabes guía	71,10	Con álabes guía	73,24	3,01
Diámetro del impulsor (f)	[83]	X		215 mm	65,98	255 mm	68,15	3,29
	[79]	X		-	-	-	-	-
Número de álabes (g)	[66]	X		6 álabes	63,50	8 álabes	64,99	2,35
	[86]	X		8 álabes	75,57	7 álabes	76,24	0,89
Velocidad rotacional (parámetro operativo)	[79]	X		-	-	-	-	-
	[87]		X	1500 rpm, ns 41,0	61,10	3005 rpm, ns 41,0	69,20	13,26
Ancho de entrada (h)	[83]	X		11 mm	61,86	13 mm	63,13	2,05
Ángulo de entrada (i)	[83]	X		25 °	67,64	30 °	67,94	0,44
Espesor del álabe (j)	[88]	X		6 mm	80,72	2 mm	81,91	1,47
Álabe curvado hacia adelante (k)								
Diámetro del impulsor (l)	[89]	X		235 mm	70,50	255 mm	72,84	3,32

Modificación	Ref.	Método		Parámetro base		Parámetro mejorado		Mejora relativa (%)
		N	E	Detalle	Eficiencia (%)	Detalle	Eficiencia (%)	
Ángulo de envolvimiento (m)	[90]	X		20 °	64,86	65 °	69,62	7,34
Álabes intermedios (n)	[91]	X		Sin álabes guía	70,76	Con álabes guía	71,66	1,27
Ángulo de entrada (o)	[92]	X		71 °	70,31	111 °	70,85	0,77
Ángulo de salida (p)	[93]	X		43,8 °	69,68	27 °	71,30	2,32
Comparación curvaturas	[94]		X	Hacia atrás	59,98	Hacia adelante	67,91	13,22
	[95]	X		Hacia atrás	67,82	Hacia adelante	72,44	6,81

Para los estudios reportados en la Tabla 1-7, los investigadores realizaron modificaciones en rangos delimitados. Para el caso de la eficiencia, objeto de la presente investigación, se obtuvo las siguientes tendencias:

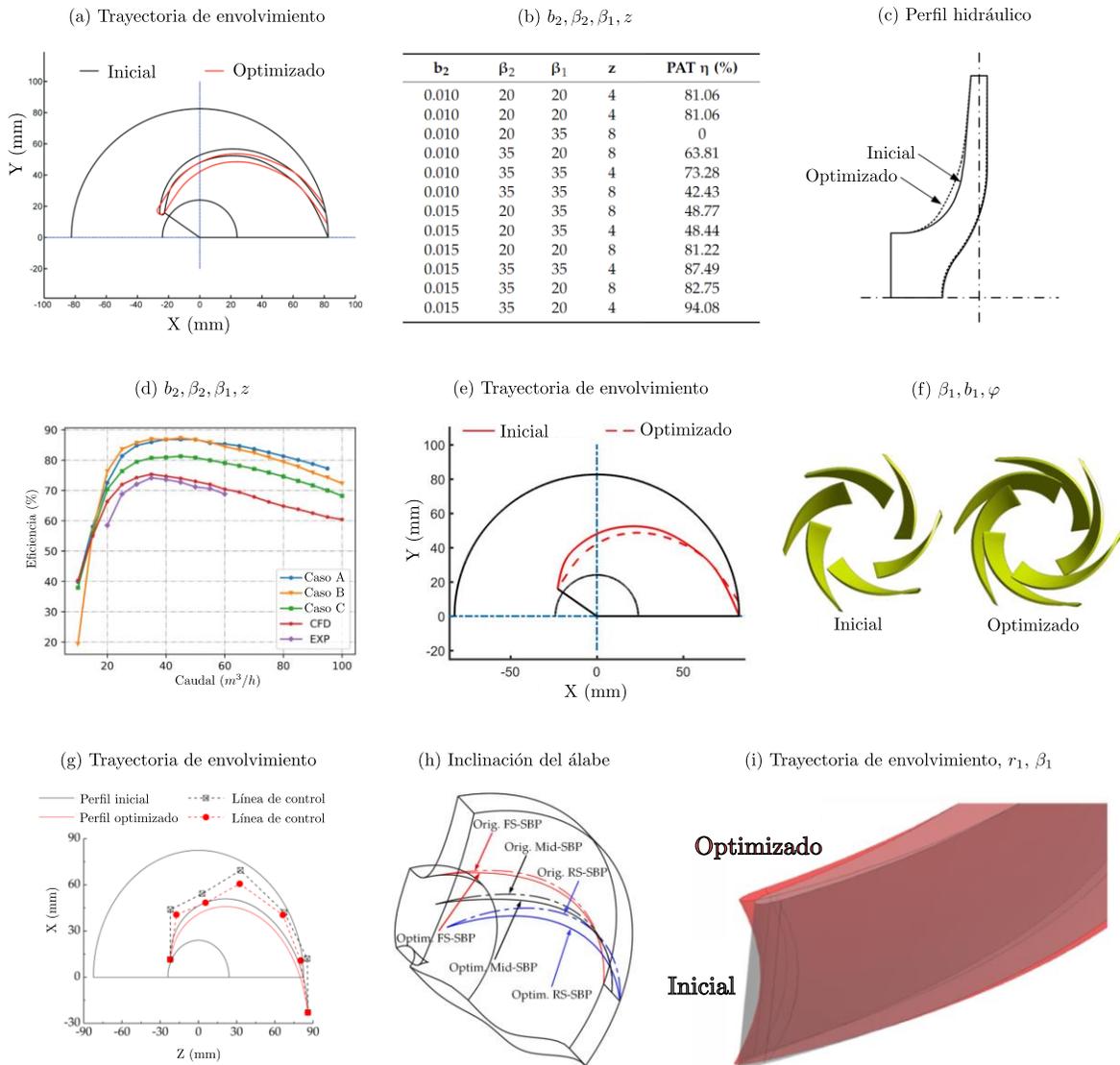
- Redondeo del borde de ataque y de la carcasa superior e inferior (b, c): hay aumento de la eficiencia.
- Ángulo de envolvimiento (d, m): hay un máximo intermedio. Es preferible considerar valores altos.
- Álabes guía (e): adicionar álabes guía incrementa la eficiencia.

- Diámetro del impulsor ( $f, l$ ): mayor diámetro del impulsor, mayor eficiencia.
- Número de álabes ( $g$ ): hay un máximo intermedio. Es preferible considerar mayor cantidad de álabes.
- Ancho de entrada ( $h$ ): hay un máximo intermedio. Es preferible considerar anchos superiores.
- Ángulo de entrada ( $i, o$ ): hay un máximo intermedio. Es preferible considerar valores superiores, aunque este parámetro no demostró un aumento significativo en la eficiencia
- Espesor del álabe ( $j$ ): menor espesor, mayor eficiencia, aunque este efecto es notable para velocidades específicas altas.
- Álabes intermedios ( $n$ ): adicionar álabes guía incrementa la eficiencia, para el caso del álabe curvado hacia adelante.
- Ángulo de salida ( $p$ ): menor ángulo de salida aumenta la eficiencia, para el caso del álabe curvado hacia adelante.
- Curvatura del álabe ( $a$  y  $k$ ): es más eficiente un impulsor con álabes curvados hacia adelante que el impulsor con álabes curvados hacia atrás.

### 1.2.5 Optimización

En la literatura se encontraron nueve estudios que representaron el uso de herramientas de optimización en turbo máquinas aplicadas en PAT. La optimización ha demostrado mejora de la eficiencia, destacando su utilidad en la predicción de un impulsor mejorado. La Figura 1-19 expone las modificaciones realizadas en el impulsor, mediante la aplicación de algoritmos de optimización.

**Figura 1-19:** detalle de los impulsores mejorados mediante algoritmos de optimización.



Con base en las modificaciones expuestas en la Figura 1-19, la Tabla 1-8 resume la información recopilada de la aplicación de algoritmos de optimización utilizados en PAT, donde se detalla la eficiencia inicial, final, mejora y el método de validación. Los documentos consultados datan del año 2015 y están listados en orden cronológico. La mejora se utilizó para comparar de forma porcentual el incremento de la eficiencia, respecto al valor inicial. En total, se encontraron nueve algoritmos de optimización aplicados en PAT. La nomenclatura de las variables de estudio son las siguientes: radio de salida del impulsor ( $r_2$ ), ángulo de entrada ( $\beta_1$ ) y salida del álabe ( $\beta_2$ ), ancho

de salida del alabe ( $b_2$ ), número de álabes ( $z$ ) y ángulo de envolvimiento ( $\varphi$ ), exclusivamente utilizada por los estudios citados. En la sección 2.1 se abordaron con más detalle los parámetros geométricos. La definición de los algoritmos, junto con la cantidad de estudios encontrados en la literatura, se presenta a continuación:

- ANN: artificial neural network (1).
- BP: back propagation neural network (3).
- GA: genetic algorithm (3).
- MOGA: Multi-objective genetic algorithm (1).
- NSGA-II: Non-dominated Sorting Genetic Algorithm (2).
- PBGA: Pareto-based genetic algorithm (1).
- PSO: particle swarm optimization (1).
- RBF: Radial Basis Function (1).
- SVM-HDMR: support vector machine and high-dimensional model representation (2).

**Tabla 1-8:** algoritmos de optimización aplicados en PAT.

Año	Ref. / Figura 1-19	Algoritmo	Eficiencia inicial (%)	Eficiencia final (%)	Mejora relativa (%)	Método	
						N	E
2015	[96] / (a)	BP, GA	62,87	65,78	4,63	X	
2020	[55] / (b)	PBGA	75,42	80,20	6,34	X	
2020	[97] / (c)	BP, GA.	62,87	65,15	3,62	X	
2020	[98] / (d)	ANN	73,91	83,58	13,08	X	
2020	[99] / (e)	BP, GA, NSGA-II	62,87	64,58	2,72	X	
2021	[100] / (f)	RBF, NSGA-II	77,60	82,75	6,64	X	
2021	[101] / (g)	SVM-HDMR, PSO	56,69	61,50	8,49*	X	X
2021	[102] / (h)	SVM-HDMR	77,16	80,52	4,35*	X	X
2022	[103] / (i)	MOGA	92,00	92,46	0,50	X	

Los algoritmos más utilizados son el BP y GA, con tres artículos de aplicación cada uno, seguido del NSGA-II y SVM-HDMR, con dos estudios. El mayor incremento relativo se evidenció al aplicar el algoritmo ANN, siendo del 13,08 %. En contraste, el algoritmo MOGA reportó el menor incremento relativo, de 0,5 %. Sin embargo, la eficiencia resultante, superó el 92 %. Para los estudios marcados con asterisco (\*), se tuvo lo siguiente: el estudio realizado por Jiang *et al.* [101], los autores solo reportaron en detalle el incremento de la eficiencia respecto a la simulación. Sin embargo, reportaron un incremento de 5,49 % para la parte experimental. En la misma línea, Jiang *et al.* [102] reportaron incremento de 3,4 % en la eficiencia para la parte experimental. Por tanto, los valores registrados en la Tabla 1-8 corresponden a valores de simulación.

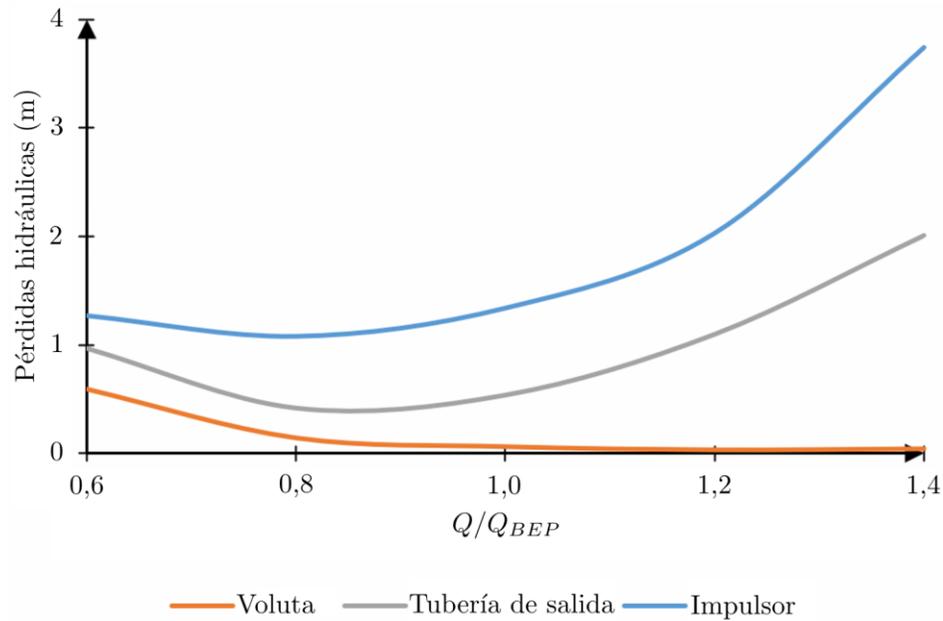
Aunque las mejoras realizadas en el impulsor, expuestas en la Figura 1-19, mostraron aumento de la eficiencia desde 0,50 % hasta 13,08 %, se tuvieron las siguientes observaciones:

- Los estudios llevados a cabo por Sen-chun *et al.* [96] (en a), Sen-chun *et al.* [99] (en e), Jiang *et al.* [101] (en g), Jiang *et al.* [102] (en h) y Qin *et al.* [103] (en i), no tuvieron en cuenta el triángulo de velocidades y las expresiones para el cálculo teórico de la condición de operación de la PAT. Adicionalmente, no realizaron la comparación con otros algoritmos de optimización. Por otro lado, los autores requirieron mayor cantidad de simulaciones, debido que la geometría analizada no la obtuvieron mediante el modelado de una expresión matemática. Los investigadores realizaron la modificación de la trayectoria e inclinación del álabe mediante la respuesta obtenida por el algoritmo, comparando el impulsor original y optimizado.
- Las investigaciones llevadas a cabo por Wang *et al.* [55] (en b), Sen-chun *et al.* [97] (en c), Xu *et al.* [98] (en d), Ji *et al.* [100] (en f) y nuevamente Qin *et al.* [103] (en i) no consideraron condiciones técnico operativas. Se encontró lo siguiente: el ancho de salida y el borde de ataque del álabe fue superior al permisible por la voluta, por lo que se requeriría modificar estructuralmente el componente.
- Criterios como el tiempo de cómputo, desviación estándar y comparación entre distintas técnicas de optimización no fueron reportados en los estudios citados. Por lo anterior, no fue posible comparar los algoritmos investigados respecto a los parámetros geométricos modificados y su rendimiento en el proceso de la entrega de la variable de respuesta.

Por otra parte, se ha optimizado la construcción de la curva característica de PAT mediante datos experimentales, como lo hecho por Xu *et al.* [98] y Rossi *et al.* [104] donde utilizaron las redes neuronales para estimar el BEP en modo turbina, basado en datos obtenidos de curvas características experimentales; Huang *et al.* [105] emplearon modelos teóricos de pérdidas y redes neuronales para predecir el BEP en modo turbina, validando con un montaje experimental.

### 1.2.6 Pérdidas hidráulicas

En la literatura, se ha evidenciado que el impulsor juega un papel fundamental en las pérdidas de flujo y la inestabilidad [106], así como el rendimiento hidráulico [107], [108]. El impulsor es el componente encargado de convertir la energía del fluido: el flujo entrante sufre una transformación de energía de flujo o presión a energía cinética. La conversión energética de la turbo máquina sufre pérdidas de energía a medida que el fluido circula por el sistema. Un estudio realizado por Rawal *et al.* [109] en PAT, evidenció que el impulsor, junto con la tubería de salida, son los elementos en los que se presentan mayores pérdidas de energía. Con el fin de observar la tendencia de las pérdidas, la Figura 1-20 presenta tres curvas que relacionan pérdidas en el impulsor, tubería de salida y la voluta, respecto a la relación de caudal en el BEP. Se detalla que las pérdidas en el impulsor representan la mayor magnitud y tiende a crecer a medida que el caudal aumenta, al igual que las pérdidas en la tubería de salida. Por otra parte, la voluta representó la menor proporción, donde las pérdidas decrecen a medida que el caudal aumenta.

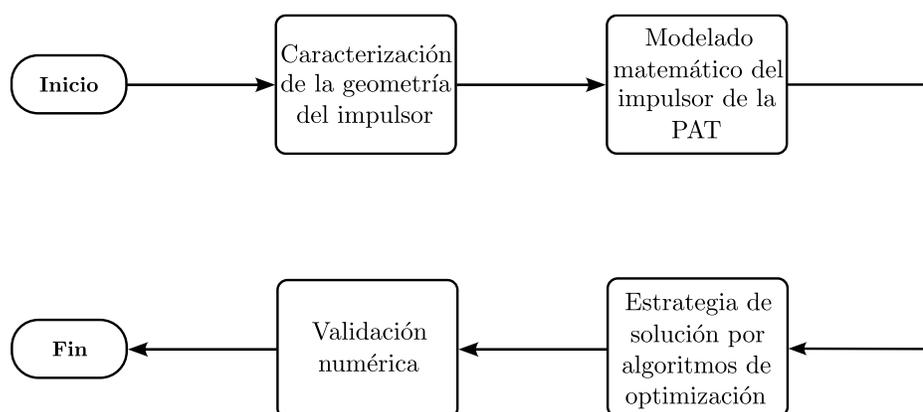
**Figura 1-20:** pérdidas hidráulicas respecto a la relación de caudal. Adaptado de [109].

Otro estudio realizado por Yang *et al.* [82], reportaron que el impulsor obtuvo desde 51,82 % hasta 74,21 % de incidencia en las pérdidas hidráulicas para tres PAT evaluadas, mientras que la voluta sólo intervino hasta un 25,75 %. Miao *et al.* [96] realizaron un estudio de optimización, donde registraron que las pérdidas hidráulicas de un impulsor de PAT son cercanas a 15 m, mientras que la voluta estuvo alrededor de 5 m. Finalmente, un estudio realizado por Yu *et al.* [110] expone en un caso estudio la generación de entropía de los componentes de la PAT, mostrando que el impulsor genera entropía a una tasa hasta seis veces superior en comparación con la voluta y la tubería de entrada y salida. Con base en el anterior análisis, el diseño del impulsor presenta la mayor oportunidad de mejora para aumentar el rendimiento de la turbo máquina.

## 2. Metodología

La Figura 2-1 muestra un diagrama de flujo que describe el conjunto de actividades de la presente investigación. Se inició con la caracterización de la geometría del impulsor, donde se seleccionaron los parámetros geométricos del impulsor de PAT. Posteriormente, se desarrolló el modelo analítico del impulsor de la PAT, mediante el análisis expuesto en los Principios físicos del cálculo de la cabeza hidráulica, con el fin de obtener una función matemática que permitiera predecir la cabeza hidráulica en el BEP. Las funciones obtenidas se evaluaron con parámetros geométricos de PAT encontradas en la literatura, con el fin de identificar la función para optimizar. Por consiguiente, se desarrolló la estrategia de solución del mejor modelo analítico, mediante tres algoritmos de optimización. Luego, al obtener los resultados de cabeza hidráulica, junto con el error relativo, tiempo de ejecución y desviación estándar de los algoritmos, se determinó los parámetros geométricos resultantes por los algoritmos de optimización que permitieron mejorar la eficiencia de la turbomáquina. Finalmente, se validó de forma numérica y CFD la eficiencia hidráulica y el comportamiento fluido dinámico. Al lograrse la mejora en la eficiencia hidráulica, se daba por terminada la investigación. El procedimiento descrito se validó respecto a una PAT consultada en la literatura.

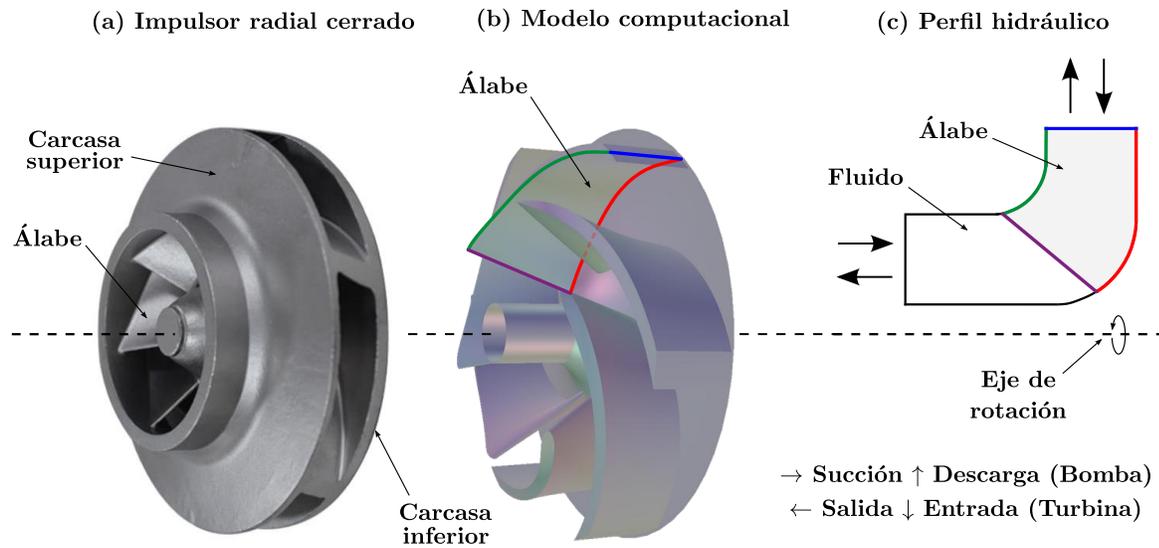
**Figura 2-1:** diagrama de flujo de la presente investigación.



## 2.1 Caracterización del perfil hidráulico

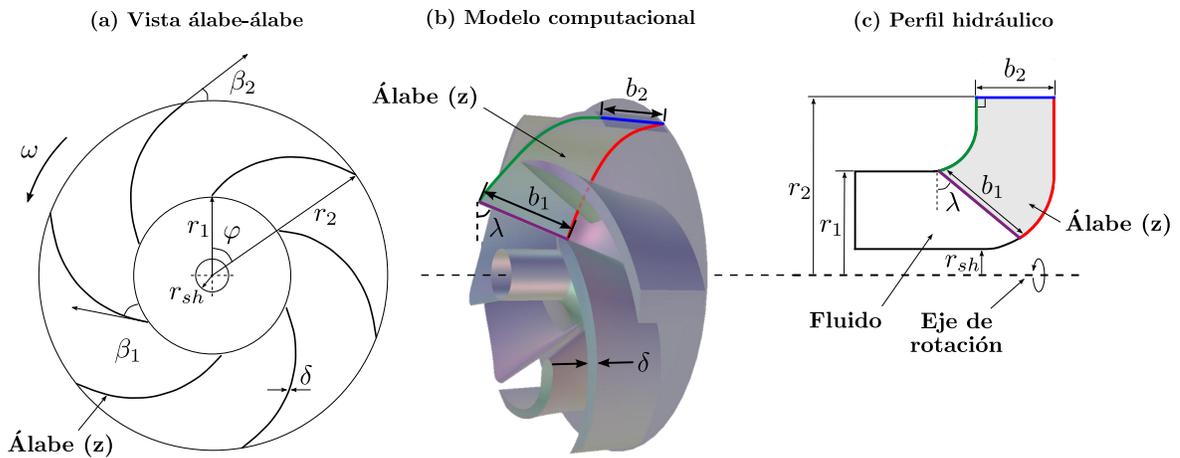
Este estudio se enfocó en un impulsor radial cerrado, de una etapa. La selección del tipo de impulsor se justificó mediante la tendencia en el estudio en el campo de las PAT y su aplicabilidad para la generación hidroeléctrica (ver sección 1.1.6). El impulsor de flujo radial posee una geometría compleja, debido a la trayectoria angular que adquieren los álabes. Los parámetros geométricos presentados en esta sección son adaptados del software de simulación fluido dinámica en turbo máquinas ANSYS [111] y un estudio de Lin *et al.* [112], donde realizaron la investigación teórica y experimental llevada a cabo en una PAT de flujo radial con impulsor cerrado, exponiendo gran variedad de parámetros.

La Figura 2-2 expone la representación del perfil hidráulico del impulsor radial cerrado a partir de una la vista tridimensional. En (a), se observa la imagen real de un impulsor cerrado, donde se muestra la carcasa superior e inferior. Seguidamente, (b) presenta el modelo computacional del impulsor, sin la carcasa superior, donde se visualizan los álabes. Se puede verificar un contorno de líneas de colores variados que resaltan uno de los álabes. Finalmente, (c) presenta la vista del perfil hidráulico o vista meridional, donde las líneas resaltadas en color verde, morado, azul y rojo se posicionan en un plano bidimensional. Además, se muestra la dirección de flujo para ambos modos de operación de la turbo máquina, detallando que la nomenclatura difiere respecto al sentido del flujo. La representación del perfil hidráulico es necesaria, dado que es una simplificación geométrica de un plano tridimensional.

**Figura 2-2:** representación del perfil hidráulico a partir de la vista tridimensional del impulsor.

Con base en los estudios expuestos en la sección 1.2.4, la Figura 2-3 representa los parámetros geométricos del impulsor en modo bomba, basado en la nomenclatura consultada en la sección del estado del arte. En (a) se visualiza la vista álabe-álabe, donde se muestran variables de longitud y ángulos justo en la entrada y salida del fluido en el álabe. Posteriormente, en (b) se observa el modelo computacional, similar al visto en la Figura 2-2 (b). Las partes visibles del modelo computacional es el ancho de entrada y salida del impulsor, además del ángulo de succión, que no puede ser visto en (a). Por consiguiente, en (c) se visualiza el perfil hidráulico, donde se comparten algunos parámetros en las vistas (a) y (b). En la Tabla 2-1 se registra la nomenclatura de los 11 parámetros geométricos, con base en las vistas de la Figura 2-3.

**Figura 2-3:** representación de los parámetros geométricos del impulsor.



**Tabla 2-1:** nomenclatura de parámetros geométricos del impulsor.

Definición	Símbolo	Vista
Ángulo de entrada del álabe	$\beta_1$	(a)
Ángulo de salida del álabe	$\beta_2$	(a)
Ángulo de envolvimiento del álabe	$\varphi$	(a)
Espesor del álabe	$\delta$	(a), (b)
Radio de eje del impulsor	$r_{sh}$	(a), (c)
Radio de entrada del impulsor	$r_1$	(a), (c)
Radio de salida del impulsor	$r_2$	(a), (c)
Ancho de entrada del álabe	$b_1$	(b), (c)
Ancho de salida del álabe	$b_2$	(b), (c)
Ángulo de succión del álabe	$\lambda$	(b), (c)
Número de álaves	$z$	(a), (b), (c)

Los parámetros geométricos expuestos son los datos genéricos que se reportan en diversos artículos de investigación. Por otra parte, se ha identificado parámetros adicionales, relacionados con la geometría del álabe respecto a la carcasa superior e inferior [113]. Sin embargo, dada la

carencia en el acceso a la información detallada y los artículos limitados que otorgan los parámetros, no fueron seleccionados como objeto de estudio de la presente investigación.

Con el fin de obtener información del dimensionamiento del impulsor, se realizó la búsqueda de estudios en los que se expusieran parámetros geométricos característicos para PAT de flujo radial. Como criterio, se dio prioridad a la geometría del perfil hidráulico y se buscó parámetros adicionales que se reportaran con mayor frecuencia en los textos científicos. Como resultado, se seleccionaron 28 PAT de un total de 10 artículos. La Tabla 2-2 expone las condiciones de operación en el BEP de cada turbina consultada, donde la columna de PAT hace referencia a la nomenclatura dada en este estudio, ordenada según el año de publicación y la fuente estudiada. Por otra parte, la Tabla 2-3 se encuentran los parámetros geométricos obtenidos para cada una de las bombas investigadas en la Tabla 2-2, donde la nomenclatura utilizada se detalló en la Tabla 2-1.

**Tabla 2-2:** condiciones de operación de las PAT consultadas.

PAT	Ref.	BEP						
		$\omega$ (rpm)	$H$ (m)	$Q$ (m <sup>3</sup> /h)	$\eta$ (%)	$P$ (kW)	$N_{sp}$	$N_{st}$
P01	[60]	1500	32,4	85,39	59,98	4,56	-	-
P02	[82]	1500	35,04	90,00	70,21	6,03	-	16,48
P03	[82]	3000	41,71	120,00	81,33	11,08	-	34,44
P04	[82]	3000	31,36	145,00	82,04	10,15	-	46,15
P05	[96]	2900	72,2	27,5	62,87	3,4	13,10	-
P06	[80]	1000	16,39	60,23	63,38	1,727	-	19,9
P07	[80]	1000	10,92	57,89	70,59	1,216	-	24,6
P08	[80]	1000	6,68	52,27	70,23	0,682	-	33,4
P09	[80]	1000	3,24	61,34	74,05	0,396	-	53,6
P10	[54]	1450	30,5	70,0	69,5	-	16,08	-
P11	[54]	1480	19,8	80,0	76,1	-	35,49	-
P12	[54]	2900	36,6	90,5	75,5	-	27,05	-
P13	[114]	2900	22	63,8	-	-	-	38,1

PAT	Ref.	BEP						
		$\omega$ (rpm)	$H$ (m)	$Q$ (m <sup>3</sup> /h)	$\eta$ (%)	$P$ (kW)	$N_{sp}$	$N_{st}$
P14	[115]	2900	54	80	-	8,15	-	-
P15	[116]	1358	10	18,7	55	0,28	-	-
P16	[116]	2029	20	26,6	62	0,9	-	-
P17	[116]	2402	30	32,4	64	1,7	-	-
P18	[116]	1353	10	20,2	66	0,36	-	-
P19	[116]	1910	20	28,8	70	1,1	-	-
P20	[116]	2408	30	35,3	71	2,05	-	-
P21	[112]	2900	52,8	78,3	70,76	8,26	-	-
P22	[35]	1450	43,66	38,34	51	-	12,82	8,82
P23	[35]	1450	13,1	55,01	73	-	28,72	26,03
P24	[35]	1450	22,4	131,47	78	-	30,31	26,91
P25	[35]	1450	12,9	80,68	-	-	40,24	32,94
P26	[35]	1450	18,8	180,00	84	-	43,48	35,91
P27	[117]	1450	15	21,8	-	0,396	-	15,07
P28	[117]	1450	15	21,8	-	0,327	-	15,07

**Tabla 2-3:** parámetros geométricos de los impulsores consultados en la literatura.

PAT	$r_1$ (mm)	$r_2$ (mm)	$b_1$ (mm)	$b_2$ (mm)	$\beta_1$ (°)	$\beta_2$ (°)	$z$ (-)	$\delta$ (mm)	$\lambda$ (°)
P01	51	117,5	-	15,3	39	28,22	6	4	-
P02	51	127,50	-	14,38	19,5	20	9	-	-
P03	45	79	-	19	25,05	30	9	-	-
P04	45	61	-	27	31,05	30	9	-	-
P05	24	82,5	-	6	32,5	14	4	-	90
P06	50	130	-	15,5	-	21,7	5	3,4	-
P07	56,3	107	-	20,3	-	22,7	5	5,4	-
P08	55	87	-	21,8	-	23,3	5	4,6	-
P09	47,7	70,5	-	27	-	24,8	6	3,7	-
P10	35	129,0	35	17	30	30	7	3	70

PAT	$r_1$ (mm)	$r_2$ (mm)	$b_1$ (mm)	$b_2$ (mm)	$\beta_1$ (°)	$\beta_2$ (°)	$z$ (-)	$\delta$ (mm)	$\lambda$ (°)
P11	36	101,5	36	16	25	35	6	3	73
P12	35	70	35	18	30	30	5	3	75
P13	42,3	72	-	15,26	40,9	22,5	6	-	-
P14	43	84,5	26	14	15	33	6	-	-
P15	32,5	66	-	16	18	24	6	-	-
P16	32,5	66	-	16	18	24	6	-	-
P17	32,5	66	-	16	18	24	6	-	-
P18	42	66	-	10	20	60	12	-	-
P19	42	66	-	10	20	60	12	-	-
P20	42	66	-	10	20	60	12	-	-
P21	43	84,5	26	14	30	25	6	3 - 3,5	35
P22	25,69	134,29	8,89	8	38,58	20	6	4	-
P23	25	86,44	32	16	26,36	26	6	4	-
P24	28,5	107,48	50	25	17,53	28,26	7	2	-
P25	40,5	88,69	62	25	23,7	23,7	6	5	-
P26	31	104,67	61	32,5	20	26	7	4	-
P27	32,5	82,5	-	7	30	39	6	-	-
P28	32,5	82,5	-	8	35	90	11	-	-

Con base en los parámetros geométricos presentados en esta sección, se concluyó el desarrollo del primer objetivo de la presente investigación. Los valores reportados fueron empleados como insumo para el desarrollo de los modelos analíticos de la sección 2.2.

## 2.2 Modelos analíticos del impulsor de PAT

La Figura 2-4 muestra el diagrama de flujo utilizado para el desarrollo de los modelos analíticos. En principio, se realizó la selección de la PAT para el proceso de optimización, con el fin de definir las restricciones técnico operativas relativas a los estudios de la literatura. Seguidamente, se procedió con la construcción de los modelos analíticos, con base en las suposiciones realizadas desde el TTR



**Tabla 2-4:** parámetros de la turbo máquina P21.

Sección	Parámetro	Valor
BEP	$\omega$ (rpm)	2900
	$H$ (m)	52,8
	$Q$ (m <sup>3</sup> /h)	78,3
	$\eta$ (%)	70,76
	$P$ (kW)	8,26
Parámetros del impulsor	$r_1$ (mm)	43
	$r_{sh}$ (mm)	21
	$r_2$ (mm)	84,5
	$b_1$ (mm)	26
	$b_2$ (mm)	14
	$\beta_1$ (°)	30
	$\beta_2$ (°)	25
	$z$ (-)	6
	$\delta_1$ (mm)	3
	$\delta_2$ (mm)	3,5
Parámetros de la voluta	$\lambda$ (°)	35
	$r_3$ (mm)	86,5
	$F$ (mm)	1160,3

### 2.2.2 Restricciones técnico operativas

Las restricciones técnico operativas hacen referencia a los límites geométricos y de operación de la turbo máquina. Para este estudio, se adoptó el rango de variación permisible de los parámetros geométricos del impulsor. Con base en los datos consultados en la literatura de las PAT, se realizó la propuesta para las variables a modificar y las condiciones físicas de la turbo máquina. En la sección 1.2.5 se presentó un compilado de los parámetros variados por otros autores en el proceso

de optimización. En resumen, las variables utilizadas por los autores fueron las siguientes: trayectoria de envolvimiento del álabe,  $b_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\varphi$ , inclinación del álabe,  $r_2$  y  $z$ .

Este estudio no consideró trayectorias geométricas, es decir, las curvas que caracterizan la carcasa superior e inferior. Además, el ángulo de envolvimiento ( $\varphi$ ) no se incluyó como parámetro de entrada en los modelos analíticos desarrollados en la sección 2.2.3, debido que no se encontró una relación directa con otros parámetros, como  $\beta_1$  y  $\beta_2$ . Por lo tanto, la variación geométrica se enfocó en las magnitudes que fueron contenidas en los modelos. La Tabla 2-5 presenta el rango de variación propuesto en los estudios de optimización, donde se comparó el valor original del parámetro geométrico, el límite inferior y superior. Además, se registró el cambio porcentual en ambos límites (Lim. Inf y Lim. Sup.), con el fin de identificar la variación proporcional al dato original de cada estudio.

**Tabla 2-5:** rango de variación de los parámetros optimizados en la literatura.

Ref.	Variable	Variación				
		Límite inferior	Valor original	Límite superior	Lim. Inf. (%)	Lim. Sup. (%)
[55]	$b_2$ (mm)	10	12	15	16,7	25,0
	$\beta_2$ (°)	20	30	35	33,3	16,6
	$\beta_1$ (°)	20	43	35	53,5	18,6
	$z$ (-)	4	6	8	33,3	33,3
[98]	$b_2$ (mm)	10	12	15	16,7	25,0
	$\beta_2$ (°)	20	30	35	33,3	16,7
	$\beta_1$ (°)	20	30	35	33,3	16,7
	$z$ (-)	4	6	8	33,3	33,3
[100]	$b_2$ (mm)	20	22	28	9,1	27,3
	$\beta_2$ (°)	34	37	38	8,1	2,7
[103]	$r_2$ (mm)	265	270	275	1,9	1,9
	$\beta_2$ (°)	20	24,9	30	19,7	20,5

Sin embargo, no se evidenció estudios de optimización que incluyeran variables constructivas como el radio de entrada del impulsor ( $r_1$ ) o el ancho de entrada del álabe ( $b_1$ ), además del radio del eje ( $r_{sh}$ ), el ángulo de succión ( $\lambda$ ) y el espesor del álabe ( $\delta$ ). Los parámetros mencionados tienen incidencia en el impulsor, dado que un dimensionamiento inadecuado puede requerir modificación estructural de la voluta. Por tanto, es necesario tener restringido un rango de modificación permisible, tal que no se requiera construir o modelar nuevamente la voluta.

La Tabla 2-6 presenta la acotación de cada variable analizada en los modelos analíticos desarrollados, agrupadas respecto a la entrada, salida y características del álabe. Se puede observar que cada variable tiene asociado un rango optimizado: de PAT, general y valores críticos. El rango optimizado hace referencia al rango empleado por los autores en la Tabla 2-5, donde  $r_{sh}$ ,  $r_1$ ,  $b_1$ ,  $\lambda$  y  $\delta$  no fueron considerados. Por consiguiente, el rango de PAT es el acotado mínimo y máximo de cada parámetro de los 28 ejemplares consultados en la literatura, a excepción  $r_{sh}$  que no fue reportado en los estudios. El rango general es el valor que puede adoptar la variable. Para lo anterior, se tuvo las siguientes consideraciones:

- Para el caso de  $\beta_1$ , los valores pueden oscilar entre 15 ° (valor mínimo del rango de PAT) y 90 °, aunque este último valor no se aproxima al máximo reportado en la literatura (43 °).
- $r_{sh}$  está restringido a ser menor que  $r_1$ , dado que no es físicamente posible que  $r_{sh}$  coincida o sobrepase la magnitud del radio de entrada del impulsor.
- $r_1$  adoptó la restricción mencionada en  $r_{sh}$ . Además, según la Tabla 1-2, para un flujo desarrollado radial,  $r_2$  debe ser al menos el doble de  $r_1$ . Sin embargo, esto solo se evidenció en 17 de las PAT reportadas en la Tabla 2-3.
- $b_1$ ,  $b_2$ ,  $\delta$  y  $z$  son parámetros que no tienen restricción especial, por lo que la magnitud mínima debe ser mayor a cero.
- Respecto a  $\lambda$ , el rango puede variar entre 0 ° y 90 °, aunque no se encontró alguna turbomáquina con un ángulo inferior a 35 °.
- Para el caso de  $r_2$ , junto con la restricción mencionada en  $r_1$ , se debió considerar el radio base de la voluta ( $r_3$ ), dado que si  $r_2 \geq r_3$  el impulsor sobrepasaría estructuralmente la voluta, por lo que sería necesario manufacturar este componente.

- Por otra parte,  $\beta_2$  se difiere de  $\beta_1$  en el rango permisible. De acuerdo con un reporte realizado por Fernando Santos [118],  $\beta_2$  puede ser superior a  $90^\circ$ . Sin embargo, esto genera mayor turbulencia en el flujo, por lo que las pérdidas hidráulicas son mayores. Por tanto,  $\beta_2$  se construye en un rango de  $15^\circ$  a  $35^\circ$ . En consecuencia, se adaptó la variable en un rango de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ .

Seguidamente, el valor crítico hace referencia a los valores que presentarían inconsistencias de operación de la PAT. Los valores específicos reportados hacen referencia a la cota mínima y máxima consultada en las turbo máquinas de la Tabla 2-3.

**Tabla 2-6:** variación permisible de los parámetros geométricos.

Región	Variable	Rango optimizado	Rango de PAT	Rango general	Valores críticos
	$\beta_1$ (°)	$35 \geq \beta_1 \geq 20$	$43 \geq \beta_1 \geq 15$	$90 > \beta_1 > 15$	$\beta_1 < 15$ $\beta_1 > 43$
	$r_{sh}$ (mm)	–	–	$r_1 > r_{sh} > 0$	$r_{sh} = 0$ $r_{sh} = r_1$
Entrada	$r_1$ (mm)	–	$56,3 \geq r_1 \geq 24$	$r_1 > r_{sh}$ $r_1 < r_2/2$	$r_1 = r_{sh}$ $r_1 \cong r_2$
	$b_1$ (mm)	–	$62 \geq b_1 \geq 8,89$	$b_1 \gg 0$	$b_1 \cong 0$ $b_1 > 62$
	$\lambda$ (°)	–	$90 \geq \lambda \geq 35$	$90 \geq \lambda \geq 0$	$\lambda < 35$ $\lambda > 90$
	$\beta_2$ (°)	$38 \geq \beta_2 \geq 20$	$90 \geq \beta_2 \geq 14$	$90 > \beta_2 > 0$	$\beta_2 < 14$ $\beta_2 > 90$
Salida	$r_2$ (mm)	$275 \geq r_2 \geq 265$	$134,29 \geq r_2 \geq 61$	$r_2 > 2r_1$ $r_2 < r_3$	$r_2 = r_3$ $r_2 \cong r_1$
	$b_2$ (mm)	$28 \geq b_2 \geq 10$	$32,5 \geq b_2 \geq 6$	$b_2 \gg 0$	$b_2 \cong 0$ $b_2 > 32,5$
Álabe	$\delta$ (mm)	–	$5,4 \geq \delta \geq 3$	$\delta > 0$	$\delta = 0$

Región	Variable	Rango optimizado	Rango de PAT	Rango general	Valores críticos
					$\delta > 5,4$
	$z (-)$	$8 \geq z \geq 4$	$12 \geq z \geq 4$	$z > 0$	$z = 0$
					$z > 12$

La Tabla 2-7 presenta las condiciones operativas para la propuesta de optimización del impulsor en PAT, es decir, el rango permisible que puede optar los parámetros geométricos en el algoritmo. Cabe aclarar que los parámetros no son únicamente geométricos, dado que interviene la eficiencia y la potencia. Sin embargo, el modelado matemático se basó en la ecuación de turbo máquinas de Euler, que estimó la cabeza hidráulica. Para los parámetros expuestos,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $r_2$ ,  $b_2$  y  $z$ , el rango propuesto se basó en las PAT consultadas (ver Tabla 2-10), mientras que el porcentaje de aumento o disminución se basó en estudios de optimización (ver Tabla 2-5). Por otra parte, para las variables  $r_{sh}$ ,  $r_1$ ,  $b_1$ ,  $\lambda$  y  $\delta$ , se propuso tener un rango de libertad del 3 %. La razón del valor propuesto se debe a que no se encontraron estudios en los que se involucre su variación, mediante optimización. Para el caso de  $\delta$ , el valor no debe ser inferior al valor base, debido a la resistencia del material.  $b_2$  no puede ser superior al valor base, debido que modificaría las condiciones de diseño de la voluta. Finalmente, la velocidad angular se mantuvo constante, con el fin de comparar la eficiencia mejorada respecto a la condición experimental.

**Tabla 2-7:** restricciones técnico operativas para la optimización del impulsor en PAT.

Región	Variable	Restricción
Salida	$\beta_1$ (°)	$43 \geq \beta_1 \geq 15; 1,167\beta_1 \geq \beta_1 \geq 0,465\beta_1$
	$r_{sh}$ (mm)	$r_{sh} < r_1; r_{sh} > 0; 1,03r_{sh} \geq r_{sh} \geq 0,97r_{sh}$
	$r_1$ (mm)	$56,3 \geq r_1 \geq 24; r_1 > r_{sh}; r_1 < r_2; 1,03r_1 \geq r_1 \geq 0,97r_1$
	$b_1$ (mm)	$62 \geq b_1 \geq 8,89; 1,03b_1 \geq b_1 \geq 0,97b_1$
	$\lambda$ (°)	$90 \geq \lambda \geq 35; 1,03\lambda \geq \lambda \geq 0,97\lambda$
Entrada	$\beta_2$ (°)	$90 \geq \beta_2 \geq 14; 1,205\beta_2 \geq \beta_2 \geq 0,666\beta_2$
	$r_2$ (mm)	$134,29 \geq r_2 \geq 61; 1,019r_2 \geq r_2 \geq 0,981r_2; r_2 < r_3$

Región	Variable	Restricción
	$b_2$ (mm)	$32,5 \geq b_2 \geq 6; b_{2\ base} \geq b_2 \geq 0,833b_2$
Álabe	$\delta$ (mm)	$5,4 \geq \delta \geq 3; 1,03\delta \geq \delta \geq 0,97\delta$
	$z$ (-)	$12 \geq z \geq 4; 1,333z \geq z \geq 0,666z$
Rendimiento y operación	$\eta$ (%)	$\eta > \eta_{base}$
	$H$ (m)	$H > H_{base}$
	$\omega$ (rpm)	$\omega = \omega_{base}$

Con base en la Selección de la PAT para optimización, la Tabla 2-8 expone la aplicación del rango técnico operativo de P21. El rango presentado muestra los valores iniciales que puede tomar la variable a optimizar. Para el caso de  $r_{sh}$ , se calculó con base en la Ecuación (2-10). Finalmente, en los parámetros del BEP, la potencia hidráulica obtenida no se restringió, debido que esta no necesariamente debe ser mayor a la referencia. Seguidamente, la cabeza hidráulica se estableció mayor a la base, debido que las Modificaciones geométricas en impulsores radiales sugirieron que una mayor magnitud produciría una mayor eficiencia.

**Tabla 2-8:** restricciones técnico operativas para P21.

Sección	Parámetro	Valor	Rango técnico operativo
BEP	$\omega$ (rpm)	2900	$\omega = 2900$
	$H$ (m)	52,8	$H > 52,8$
	$\eta$ (%)	70,76	$\eta > 70,76$
impulsor	$r_1$ (mm)	43	$44,29 \geq r_1 \geq 41,71$
	$r_{sh}$ (mm)	21	$21,63 \geq r_{sh} \geq 20,37$
	$r_2$ (mm)	84,5	$86,11 \geq r_2 \geq 82,89$
	$b_1$ (mm)	26	$26,78 \geq b_1 \geq 25,22$
	$b_2$ (mm)	14	$14 \geq b_2 \geq 11,66$
	$\beta_1$ (°)	30	$35,01 \geq \beta_1 \geq 13,95$
	$\beta_2$ (°)	25	$30,13 \geq \beta_2 \geq 16,65$
	$z$ (-)	6	$8 \geq z \geq 4;$
	$\delta$ (mm)	3,5	$5,4 \geq \delta \geq 3$

Sección	Parámetro	Valor	Rango técnico operativo
			$3,60 \geq \delta \geq 3,4$
	$\lambda$ (°)	35	$36,05 \geq \lambda \geq 35$

Por último, cabe recordar que los parámetros de la voluta no fueron considerados en las restricciones técnico operativas, debido que el análisis se enfocó en el impulsor, que es el elemento mecánico que produce la conversión energética del sistema, además de presentar las mayores Pérdidas hidráulicas. Sin embargo, el sistema completo (impulsor y voluta) fueron considerados en la simulación, debido a las condiciones de frontera.

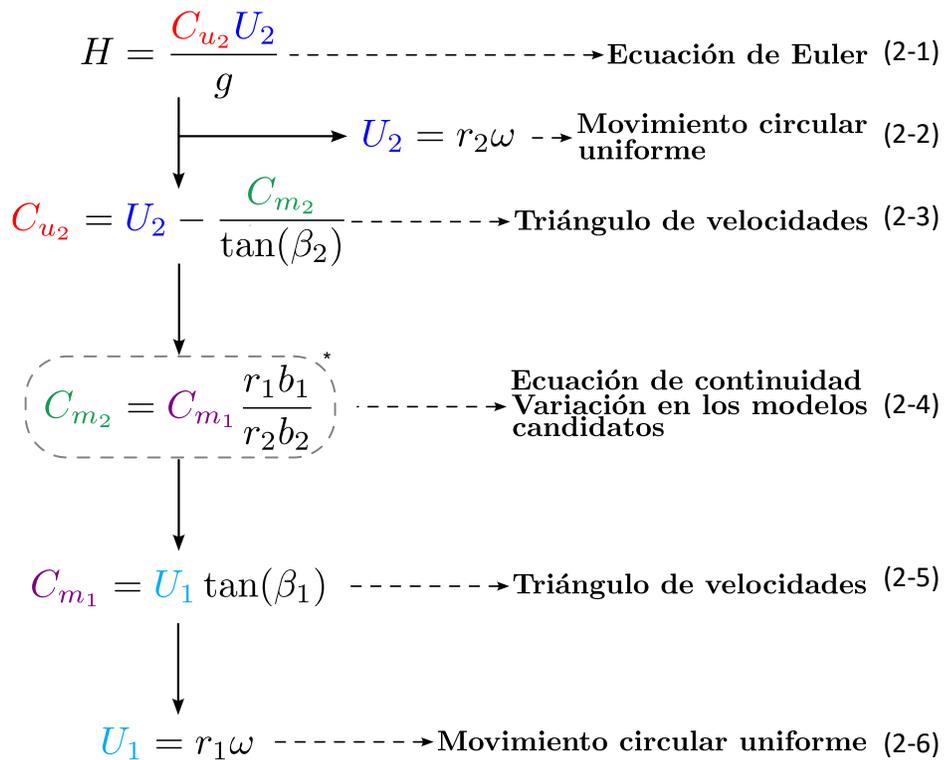
### 2.2.3 Construcción de los modelos analíticos

Con base en el triángulo de velocidades expuesto en la Figura 1-9 y los parámetros geométricos vistos en la Figura 2-3, la Figura 2-5 presenta el diagrama de flujo para estimar la cabeza hidráulica en el BEP. Se puede observar el flujo de las ecuaciones, mostrando las incógnitas resaltadas en rojo, azul, verde, morado, y cian, respectivamente. Se tomó como punto de partida la ecuación de Euler, donde cada una de las incógnitas de cada expresión fueron reemplazadas mediante conceptos físicos y fluido dinámicos, tales como: el análisis del triángulo de velocidades, movimiento circular uniforme y la ecuación de continuidad. Finalmente, en la Expresión (2-4) presentó el cambio para cada modelo propuesto, dependiendo de las suposiciones realizadas que se describieron más adelante.

Con respecto a las ecuaciones matemáticas, se tomó como base la Ecuación (2-1), que es la expresión de la Ecuación de Euler para turbo máquinas, donde la velocidad absoluta en la componente tangencial  $C_{u_2}$  y la velocidad tangencial a la salida del impulsor  $U_2$  son desconocidas en ese instante. La Ecuación (2-2) permitió calcular la velocidad tangencial de la partícula de agua a la entrada del impulsor, por medio del movimiento circular uniforme, con variables conocidas como el radio de salida del impulsor y la velocidad angular. La Ecuación (2-3) se pudo elaborar mediante el análisis del triángulo de velocidades, teniendo como incógnita la velocidad radial en la entrada. La Ecuación (2-4) permitió calcular la velocidad radial a la entrada del impulsor, mediante

la ecuación de continuidad, es decir, suponiendo que se conserva el flujo másico. Esta expresión se modificó respecto a cada uno de los modelos evaluados. La Ecuación (2-5) se realizó un procedimiento relativo al triángulo de velocidades. Finalmente, la Ecuación (2-6) se elaboró mediante el movimiento circular uniforme.

**Figura 2-5:** procedimiento para el desarrollo de los modelos analíticos.



A continuación, se expuso las consideraciones matemáticas para el desarrollo de los modelos candidatos.

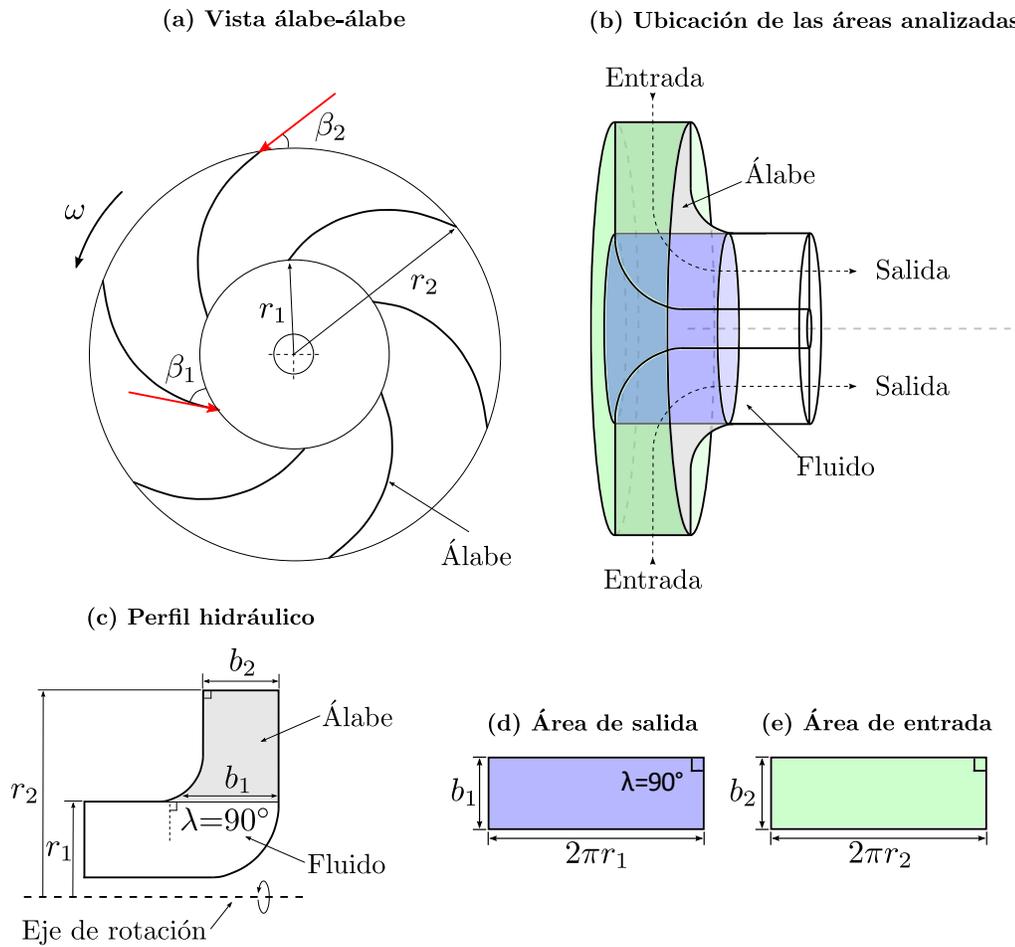
- Modelo 1. Sin consideraciones previas

Con base en la Figura 2-5, se desarrolló el procedimiento algebraico para el cálculo de la cabeza hidráulica teórica. Como resultado, la Ecuación (2-7) presentó el primer modelo candidato, que relacionó seis parámetros geométricos vistos en la Figura 2-3.

$$H_{\infty 1} = \frac{r_2 \omega^2}{g} \left( r_2 - \frac{r_1^2 b_1 \tan(\beta_1)}{r_2 b_2 \tan(\beta_2)} \right) \quad (2-7)$$

Finalmente, la Figura 2-6 presenta los parámetros geométricos y el espacio de flujo analizado. En (a) se expone la vista álabe-álabe, donde se observa el ángulo de entrada y salida del flujo. Seguidamente, (b) expone la vista tridimensional del impulsor, donde se detalla la entrada y salida del fluido. En (c) se esquematiza la vista de perfil hidráulico, donde se puede observar el área ocupada por el álabe y el espacio del fluido. Adicionalmente, se detalla el eje de rotación, radios, ancho de entrada, salida del álabe y el ángulo de succión, siendo este último de 90 ° en la salida. Por último, (d-e) presentan el área de salida y entrada, respectivamente, detallado en la vista del impulsor en (b). La geometría expuesta en ambas áreas corresponde a rectángulos, debido que este modelo no consideró la inclinación en la salida ( $\lambda$ ) y la entrada en una PAT radial tiene sección rectangular.

Figura 2-6: parámetros geométricos y áreas de flujo para el modelo 1.



Para este modelo, se tuvieron presentes las siguientes condiciones:

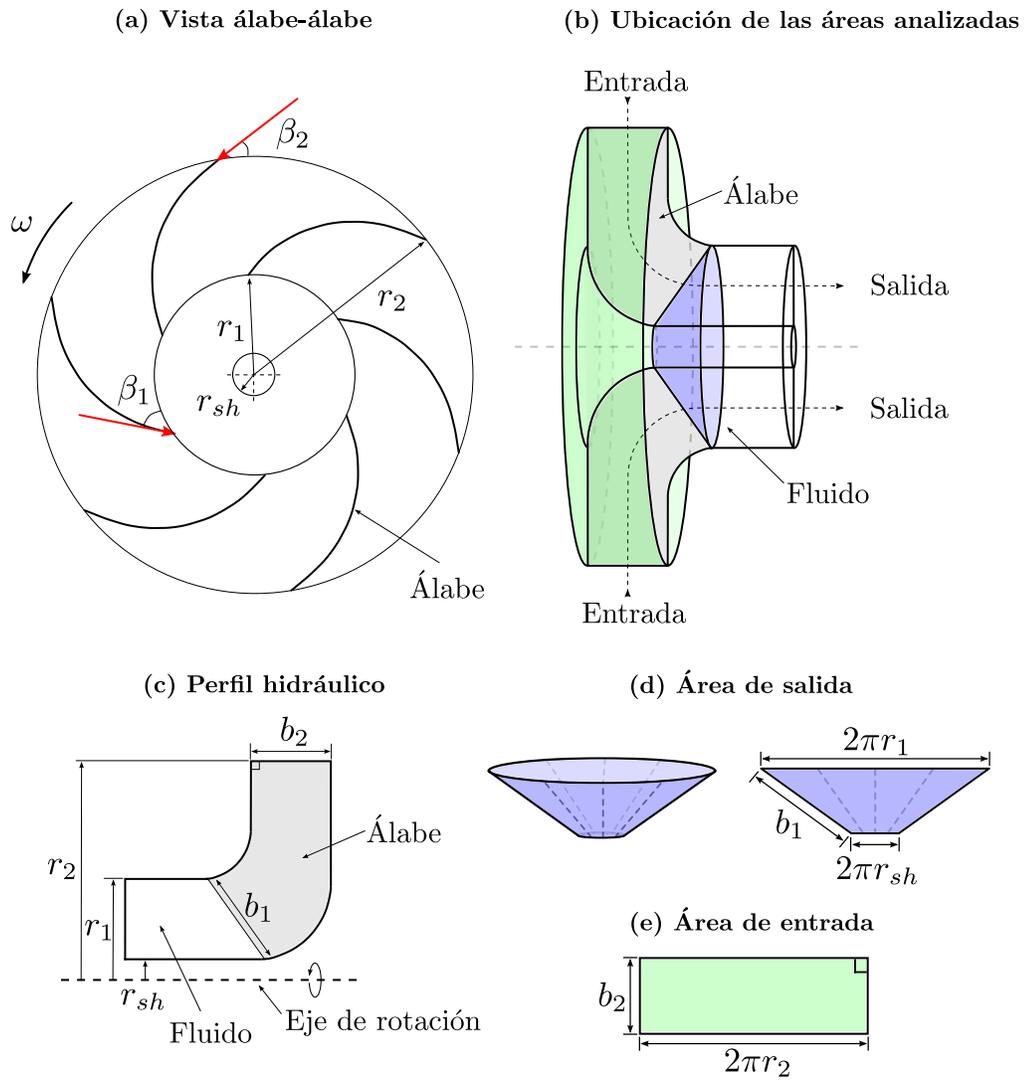
- El espacio ocupado por el eje es despreciable.
- El ángulo de succión del álabe es  $90^\circ$ .
- El espacio que ocupan los álabes en el impulsor es despreciable.
- La expresión es independiente del flujo volumétrico.
- No se consideró la curvatura de la carcasa superior e inferior (Figura 2-2).
- Se consideraron las suposiciones de la sección 1.1.9.

- Modelo 2. Consideración del eje

De la Figura 2-6, el área considerada en el modelo 1 indicaba que el ángulo de succión equivale a  $90^\circ$ . Sin embargo, esto es cierto solo para el área de entrada, debido al tipo de flujo de la turbomáquina. Lo anterior se debe a que el parámetro  $\lambda$  solo se reportó en cinco casos, de acuerdo con las PAT listadas en la Tabla 2-3. Por tanto, para aproximar el área de salida desde la vista del perfil hidráulico, este modelo consideró el radio del eje ( $r_{sh}$ ) y el radio de entrada del impulsor ( $r_1$ ).

La Figura 2-7 presenta los parámetros geométricos y el espacio de flujo analizado. En (a) se expone la vista álabe-álabe, donde se observa el ángulo de entrada y salida del flujo en el álabe. Esta vista se diferencia del modelo 1 por el parámetro  $r_{sh}$  y que no se considera  $\lambda$ . Seguidamente, (b) expone la vista tridimensional del impulsor, donde se detalla la entrada y salida del fluido. En (c) se esquematiza la vista de perfil hidráulico, donde se puede observar el área ocupada por el álabe y el espacio del fluido. Por último, (d-e) presentan el área de salida y entrada, respectivamente, detallado en la vista del impulsor en (b). La geometría expuesta en el área de salida, se observa una superficie cónica que varía respecto a la magnitud de los radios y la longitud de  $b_1$ .

**Figura 2-7:** parámetros geométricos y áreas de flujo para el modelo 2.



Con base en el procedimiento para el desarrollo del modelo analítico, la Ecuación (2-4) se modificó para adaptar las nuevas variables. Para ello, la salida se aproxima a una superficie cónica, por lo que el área se aproxima al promedio entre el radio de entrada y el radio del eje. Por tanto, con base en la consideración expuesta, la Ecuación (2-8) expone el cálculo algebraico para la velocidad radial en la salida.

$$C_{m_2} = C_{m_1} \frac{b_1(r_1 + r_{sh})}{2 r_2 b_2} \quad (2-8)$$

Al aplicar la Ecuación (2-8), en lugar de la Ecuación (2-4) del diagrama de flujo de la Figura 2-5, se obtuvo como resultado el modelo candidato registrado en la Ecuación (2-9).

$$H_{\infty 2} = \frac{r_2 \omega^2}{g} \left( r_2 - \frac{r_1 b_1 \tan(\beta_1) (r_1 + r_{sh})}{2 r_2 b_2 \tan(\beta_2)} \right) \quad (2-9)$$

Sin embargo,  $r_{sh}$  no fue reportado en los estudios registrados en la Tabla 2-3. Por lo tanto, se propuso utilizar una expresión alternativa reportada por Barbarelli *et al.* [35] para el cálculo de  $r_{sh}$ . La Ecuación (2-10) muestra el cálculo del radio del eje, donde se relaciona la potencia hidráulica ( $P_h$ ), la velocidad angular ( $\omega$ ) y el esfuerzo de torsión ( $\tau$ ), siendo este valor de 7,56 MPA en caso de no conocerse el material de fabricación del eje [29].

$$r_{sh} = \left( \frac{2 P_h}{\pi \omega \tau} \right)^{1/3} \quad (2-10)$$

Finalmente, de la Ecuación (2-9), se puede deducir que si se desconoce  $r_{sh}$ , entonces,  $r_{sh} = r_1$ . Con la anterior suposición, se retorna al modelo 1.

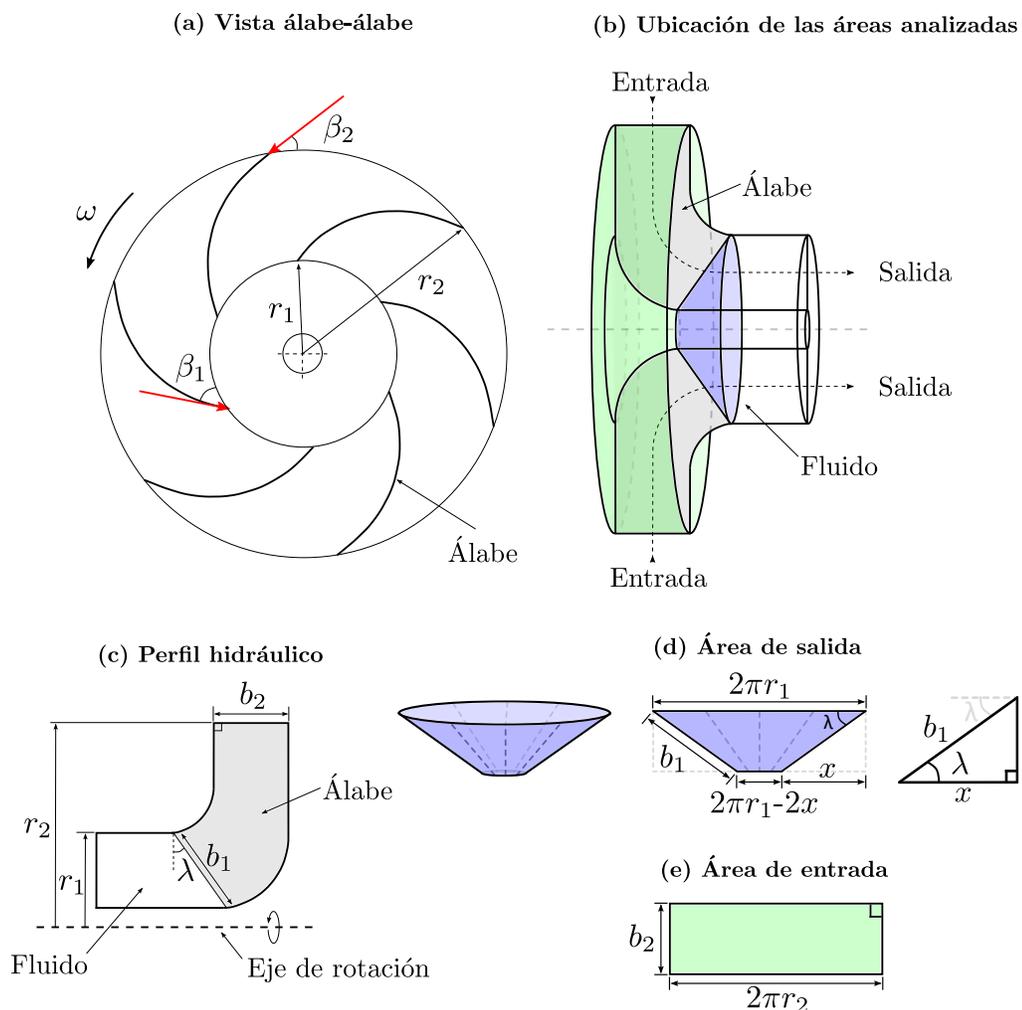
- Modelo 3. Consideración del ángulo de succión del álabe

De la Figura 2-6, el área considerada en el modelo 1 indicaba que el ángulo de succión equivale a 90°. Sin embargo, para este modelo  $\lambda$  es conocido, mientras que  $r_{sh}$  es desconocido. El parámetro en cuestión se reportó en cinco de las PAT consultadas.

La Figura 2-8 presenta los parámetros geométricos y el espacio de flujo analizado. En (a) se expone la vista álabe-álabe, donde se observa el ángulo de entrada y salida del flujo en el álabe. Seguidamente, (b) expone la vista tridimensional del impulsor, donde se detalla la entrada y salida

del fluido. En (c) se esquematiza la vista de perfil hidráulico, donde se puede observar el área ocupada por el álabe y el espacio del fluido. Esta vista es equivalente a la propuesta en el modelo 1, contrastando con la variación de  $\lambda$ . Por último, (d-e) presentan el área de salida y entrada, respectivamente, detallado en la vista del impulsor en (b). Para la geometría expuesta en el área de salida, se observa una superficie cónica que varía respecto a la magnitud del ancho y radio de entrada y el ángulo  $\lambda$ .

**Figura 2-8:** parámetros geométricos y áreas de flujo para el modelo 3.



Con base en el procedimiento para el desarrollo del modelo analítico, la Ecuación (2-4) se modificó para adaptar el ángulo de succión del álabe. Para ello, se aproximó la superficie en un cono, por lo

que el área de salida se aproxima respecto a la magnitud del ancho de entrada y la inclinación del ángulo de succión. Por tanto, con base en la consideración expuesta, la Ecuación (2-11) expone el cálculo algebraico para la velocidad radial en la salida.

$$C_{m_2} = C_{m_1} \frac{b_1(2\pi r_1 - b_1 \cos(\lambda_1))}{2\pi r_2 b_2} \quad (2-11)$$

Al aplicar la Ecuación (2-11), en lugar de la Ecuación (2-4) del diagrama de flujo de la Figura 2-5, se obtuvo como resultado el modelo candidato registrado en la Ecuación (2-12).

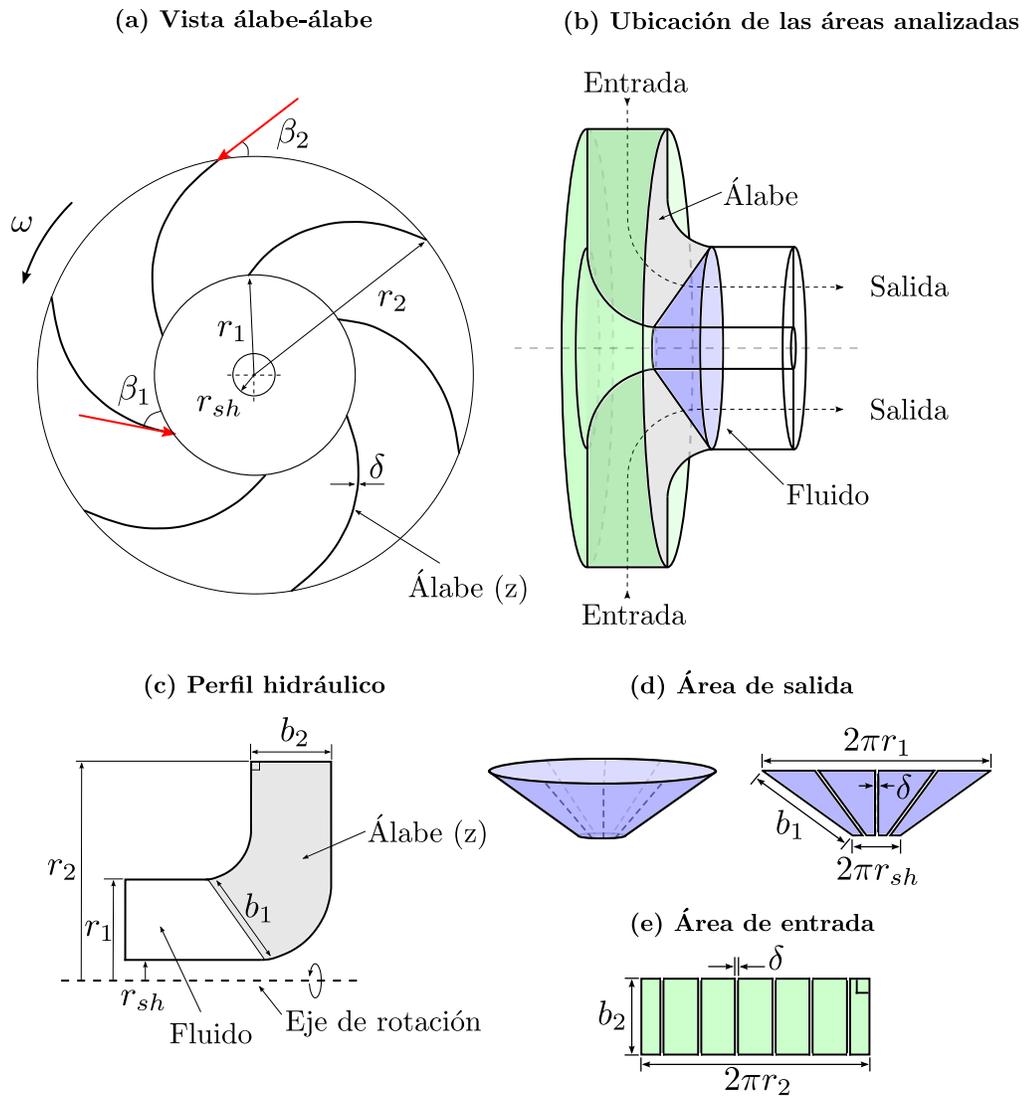
$$H_{\infty 3} = \frac{r_2 \omega^2}{g} \left( r_2 - \frac{r_1 b_1 \tan(\beta_1) (2\pi r_1 - b_1 \cos(\lambda))}{2\pi r_2 b_2 \tan(\beta_2)} \right) \quad (2-12)$$

Finalmente, de la Ecuación (2-12), se puede deducir que si se desconoce  $\lambda$ , entonces,  $\lambda=90^\circ$ . Con la anterior suposición, se retorna al modelo 1.

- Modelo 4. Consideración del eje y espesor de los álabes

Con base en lo expuesto en el modelo 2, este modelo propuso adicionar el espacio que ocupan los álabes en el impulsor. Para ello, se adiciona la variable  $\delta$ , que ha sido reportada en 14 de las PAT registradas en la Tabla 2-3. La Figura 2-9 presenta los parámetros geométricos y el espacio de flujo analizado. En (a) se expone la vista álabe-álabe, donde se observa el ángulo de entrada y salida del flujo en el álabe. Seguidamente, (b) expone la vista tridimensional del impulsor, donde se detalla la entrada y salida del fluido. En (c) se esquematiza la vista de perfil hidráulico, donde se puede observar el área ocupada por el álabe y el espacio del fluido. Esta vista es equivalente al modelo 2. Por último, (d-e) presentan el área de salida y entrada, respectivamente, detallado en la vista del impulsor en (b). La geometría expuesta en el área de salida, se observa una superficie cónica que varía respecto a la magnitud de los radios y la longitud de  $b_1$ . Además, se detalla el espacio que ocupan los álabes.

**Figura 2-9:** parámetros geométricos y áreas de flujo para el modelo 4.



Con base en la Ecuación (2-8) del modelo 2, la Ecuación (2-13) presenta el resultado de la adición del espesor ( $\delta$ ) y número de los álabes ( $z$ ). Para ello, tanto en la entrada como en la salida, se consideraron espacios que el flujo no ocuparía, por lo que el área efectiva en ambas trayectorias es menor, comparado con el modelo 2.

$$C_{m_2} = C_{m_1} \frac{b_1[\pi(r_1 + r_{sh}) - z\delta]}{b_2(2\pi r_2 - z\delta)} \tag{2-13}$$

Al aplicar la Ecuación (2-13), en lugar de la Ecuación (2-8), se obtuvo como resultado el modelo candidato registrado en la Ecuación (2-14).

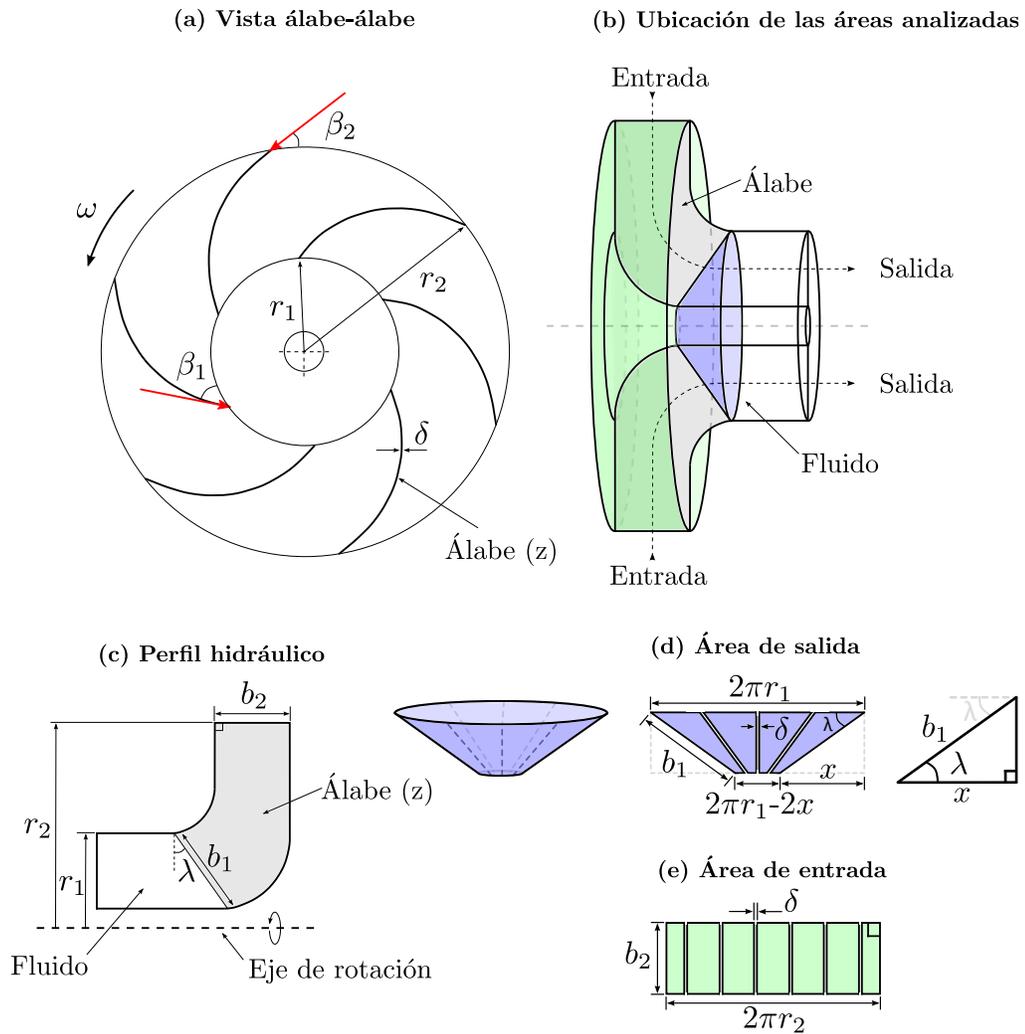
$$H_{\infty 4} = \frac{r_2 \omega^2}{g} \left( r_2 - \frac{r_1 b_1 \tan(\beta_1) [\pi (r_1 + r_{sh}) - z\delta]}{b_2 \tan(\beta_2) (2\pi r_2 - z\delta)} \right) \quad (2-14)$$

Respecto al radio del eje, se mantuvieron las condiciones expuestas en el modelo 2. Finalmente, de la Ecuación (2-14), se puede deducir que si se desconoce  $r_{sh}$  y  $\delta$ , entonces,  $r_{sh} = r_1$  y  $\delta=0$ . Con las anteriores suposiciones, se retorna al modelo 1.

- Modelo 5. Consideración del ángulo de succión y espesor de los álabes

Con base en el desarrollo del modelo 3, el presente modelo consideró el espacio que ocupan los álabes. Al igual que el modelo 4, se adicionó la variable  $\delta$ . La Figura 2-10 expone los parámetros geométricos y el espacio de flujo analizado. En (a) se expone la vista álabe-álabe, donde se observa el ángulo de entrada y salida del flujo en el álabe. Seguidamente, (b) expone la vista tridimensional del impulsor, donde se detalla la entrada y salida del fluido. En (c) se esquematiza la vista de perfil hidráulico, donde se puede observar el área ocupada por el álabe y el espacio del fluido. Esta vista es equivalente a la propuesta en el modelo 3. Por último, (d-e) presentan el área de salida y entrada, respectivamente, detallado en la vista del impulsor en (b). Para la geometría expuesta en el área de salida, se observa una superficie cónica que varía respecto a la magnitud del ancho y radio de entrada y el ángulo  $\lambda$ . Además, se tiene en consideración el espesor de los álabes.

**Figura 2-10:** parámetros geométricos y áreas de flujo para el modelo 5.



Con base en la Ecuación (2-11), la Ecuación (2-15) registra el resultado de la adición del espesor ( $\delta$ ) y número de álabes ( $z$ ), tanto en la entrada como en la salida.

$$C_{m_2} = C_{m_1} \frac{b_1(2\pi r_1 - b_1 \cos(\lambda) - z\delta)}{b_2(2\pi r_2 - z\delta)} \tag{2-15}$$

Al aplicar la Ecuación (2-15), en lugar de la Ecuación (2-11), se obtuvo el quinto candidato, registrado en la Ecuación (2-16).

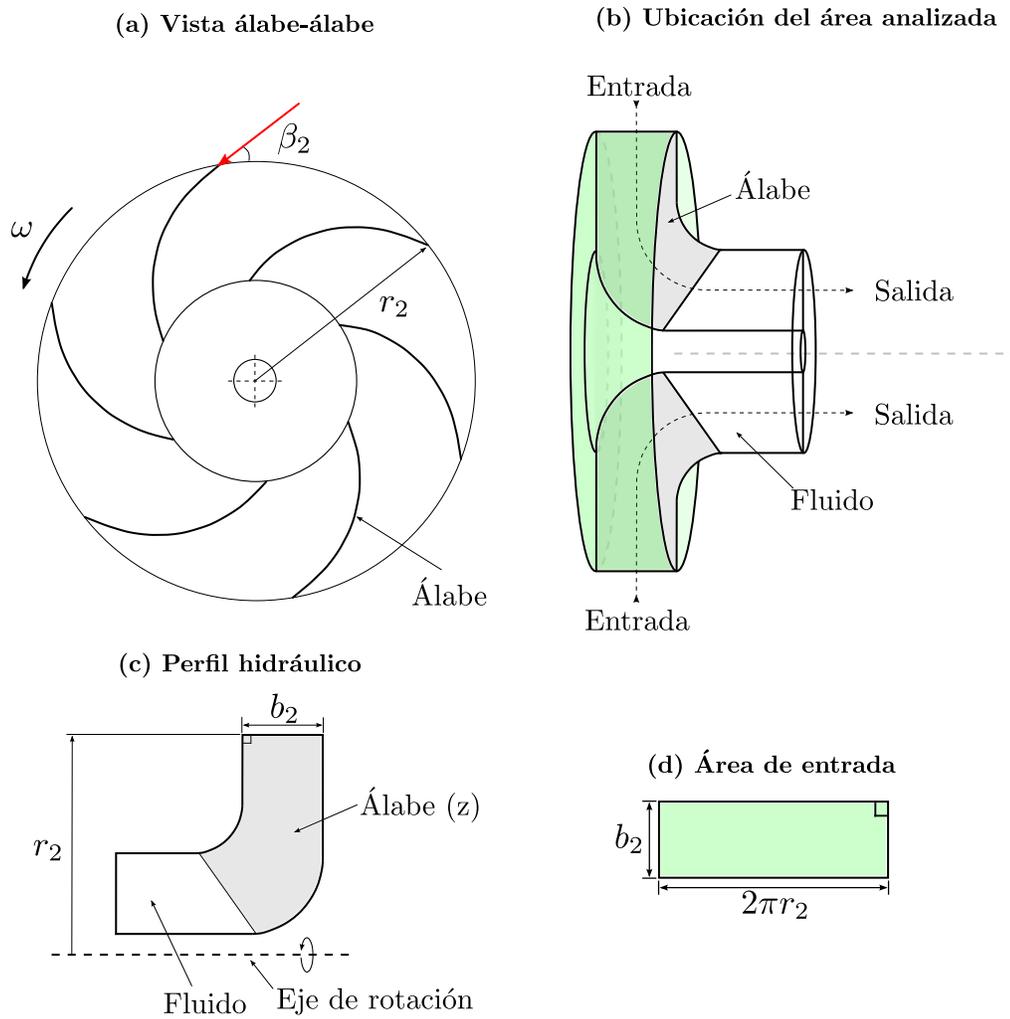
$$H_{\infty 5} = \frac{r_2 \omega^2}{g} \left( r_2 - \frac{r_1 b_1 \tan(\beta_1) (2\pi r_1 - b_1 \cos(\lambda) - z\delta)}{b_2 \tan(\beta_2) (2\pi r_2 - z\delta)} \right) \quad (2-16)$$

Finalmente, de la Ecuación (2-16), se puede deducir que si se desconoce  $\lambda$  y  $\delta$ , entonces,  $\lambda=90^\circ$  y  $\delta=0$ . Con las anteriores suposiciones, se retorna al modelo 1.

- Modelo 6. Caudal como parámetro en la entrada

Los modelos anteriores consideraron los parámetros geométricos en la salida, como lo fue el ancho y el ángulo de entrada del flujo. Sin embargo, son independientes del caudal que experimenta la turbo máquina. El presente modelo consideró el flujo volumétrico en el BEP como parámetro de entrada, conteniendo las variables con el subíndice 1. La Figura 2-11 presenta los parámetros geométricos y el espacio de flujo analizado. En (a) se expone la vista álabe-álabe, donde se observa el ángulo de salida del flujo en el álabe. Seguidamente, (b) expone la vista tridimensional del impulsor, donde se detalla la entrada del fluido. En (c) se esquematiza la vista de perfil hidráulico, donde se puede observar el área ocupada por el álabe y el espacio del fluido. Esta vista se diferencia de los modelos anteriores, dado que los parámetros  $b_1$  y  $\lambda$  son absorbidos por la integración del caudal como parámetro de entrada. Por último, (d) presenta únicamente el área de entrada, detallado en la vista del impulsor en (b), debido que el área de salida se deduce matemáticamente con el caudal en el BEP ( $Q_{BEP}$ ).

**Figura 2-11:** parámetros geométricos y área de flujo para el modelo 6.



Con base en el procedimiento para el desarrollo del modelo analítico, la Ecuación (2-17) registra el resultado al considerar el caudal en lugar de los parámetros geométricos en la salida.

$$C_{m_2} = \frac{Q_{BEP}}{2\pi r_2 b_2} \tag{2-17}$$

Al aplicar la Ecuación (2-17), se obtuvo el sexto candidato, registrado en la Ecuación (2-18).

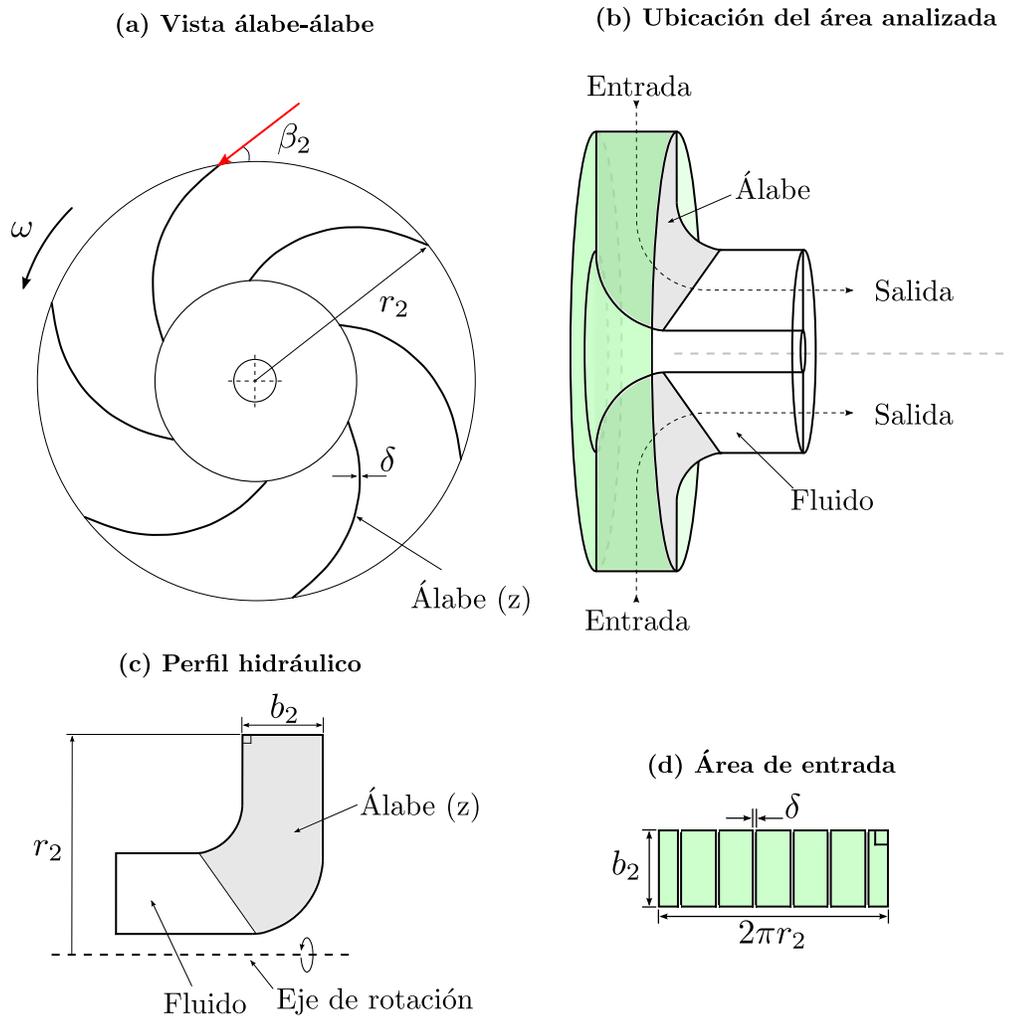
$$H_{\infty 6} = \frac{r_2 \omega}{g} \left( r_2 \omega - \frac{Q_{BEP}}{2\pi r_2 b_2 \tan(\beta_2)} \right) \quad (2-18)$$

Finalmente, partiendo de la Ecuación (2-18), se puede deducir que el modelo difiere de los anteriores, dado que es necesario conocer el caudal en el BEP. Si este dato no se conoce, no es posible aplicar este caso.

- Modelo 7. Caudal y espesor de los álabes

Con base en el Modelo 6, el presente candidato consideró el espacio ocupado por los álabes. La Figura 2-12 muestra los parámetros geométricos y el espacio de flujo analizado. En (a) se expone la vista álabe-álabe, donde se observa el ángulo de salida del flujo, junto con el espesor del álabe. Seguidamente, (b) expone la vista tridimensional del impulsor, donde se detalla la entrada del fluido. En (c) se esquematiza la vista de perfil hidráulico, donde se puede observar el área ocupada por el álabe y el espacio del fluido. Esta vista se diferencia de los modelos anteriores, dado que los parámetros  $b_1$  y  $\lambda$  son absorbidos por la integración del caudal como parámetro de entrada. Por último, (d) presenta únicamente el área de entrada, detallado en la vista del impulsor en (b), debido que el área de salida se deduce matemáticamente con el caudal en el BEP ( $Q_{BEP}$ ).

**Figura 2-12:** parámetros geométricos y área de flujo para el modelo 7.



Con base en la Ecuación (2-4), la Ecuación (2-19) registra el resultado al considerar el caudal y el espesor de los álabes, en lugar de los parámetros geométricos en la salida.

$$C_{m_2} = \frac{Q_{BEP}}{b_2(2\pi r_2 - z\delta)} \tag{2-19}$$

Al aplicar la Ecuación (2-19), se obtuvo el séptimo candidato, registrado en la Ecuación (2-20).

$$H_{\infty 7} = \frac{r_2 \omega}{g} \left( r_2 \omega - \frac{Q_{BEP}}{b_2 \tan(\beta_2) (2\pi r_2 - z\delta)} \right) \quad (2-20)$$

Al igual que el Modelo 6, la Ecuación (2-20) requiere conocer el caudal en el BEP. Si este dato no se conoce, no es posible aplicar este caso.

- Comparación entre los modelos 1 y 6

La Tabla 2-9 muestra la comparación entre los modelos 1 y 6, con respecto a la cantidad de parámetros y la expresión que los diferencia respecto a la velocidad radian en la entrada ( $C_{m_2}$ ).

**Tabla 2-9:** Comparación entre los modelos 1 y 6.

Modelo	Expresión matemática	Cantidad de parámetros	Variante $C_{m_2}$
1	$H_{\infty 1} = \frac{r_2 \omega^2}{g} \left( r_2 - \frac{r_1^2 b_1 \tan(\beta_1)}{r_2 b_2 \tan(\beta_2)} \right)$	6	$C_{m_2} = C_{m_1} + \frac{r_1 b_1}{2\pi r_2 b_2}$
6	$H_{\infty 6} = \frac{r_2 \omega}{g} \left( r_2 \omega - \frac{Q_{BEP}}{2\pi r_2 b_2 \tan(\beta_2)} \right)$	3	$C_{m_2} = \frac{Q_{BEP}}{2\pi r_2 b_2}$

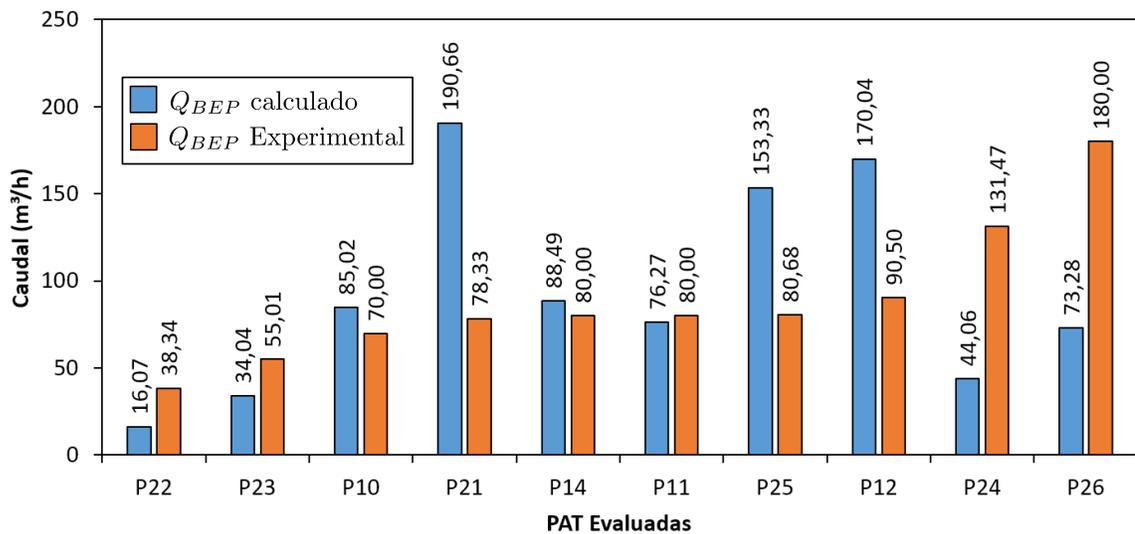
Como se puede observar, el modelo 1 y 6 tienen una equivalencia conceptual, donde solo se diferencian en el cálculo de la expresión  $C_{m_2}$ . En la salida del impulsor, el modelo 1 consideró parámetros geométricos, mientras que el modelo 6 se estableció con el caudal. Al igualar ambas expresiones, se obtuvo la Ecuación (2-21), con el fin de obtener el caudal calculado para el modelo 1.

$$Q_{BEP} = Area \cdot Velocidad = (2\pi r_1 b_1 \tan \beta_1)(r_1 \omega) \quad (2-21)$$

Con base en la Ecuación (2-21), se puede observar que el caudal está en términos de los parámetros geométricos  $r_1$ ,  $b_1$ ,  $\beta_1$  y el parámetro de operación  $\omega$ . Para verificar que el caudal calculado es aproximado al caudal experimental (ver Tabla 2-2), se realizó la comparación con respecto a las PAT que reportaron los parámetros geométricos de entrada. La Figura 2-13 muestra el gráfico de barras que compara el caudal calculado, en color azul, y el experimental, en color naranja. Diez PAT

reportaron los parámetros de entrada. Los datos están en orden ascendente del caudal experimental. En análisis, se aprecia en los cálculos del caudal de las turbo máquinas P12, P21, P24, P25 y P26, tuvieron una diferencia en caudal superior a 70 m<sup>3</sup>/h, mientras que P10, P11, P14, P22 y P23, la diferencia no superó los 25 m<sup>3</sup>/h. Por tanto, el cálculo del caudal en el BEP, mediante parámetros geométricos, obtuvo aceptación en cinco de las diez turbo máquinas.

**Figura 2-13:** Comparación entre el caudal calculado y el experimental.



Las posibles razones por las que los modelos 1 y 6 presentaron diferencias en el caudal, son las siguientes:

- El modelo 6, que tiene el caudal experimental como parámetro para el cálculo de la cabeza hidráulica, está considerando indirectamente los fenómenos físicos que ocurren en la turbo máquina, como son las pérdidas hidráulicas, propiedades del fluido, trayectoria de los álabes y pérdidas de choque.
- Los parámetros del modelo 1 se basaron en condiciones ideales donde el flujo es irrotacional y cambio de energía permanente.
- El modelo 1 consideró un ángulo de succión de 90° y no tuvo presente el espacio ocupado por los álabes. Sin embargo, con base en las cinco PAT que reportaron en ángulo de succión, este oscila entre 35° y 75°.

- La velocidad reportada en la Ecuación (2-21) tiene presente que los vectores de flujo son paralelos entre sí y de igual magnitud, por lo que se desprecian las pérdidas de choque.

Finalmente, la elección del modelo analítico para el proceso de optimización dependió del desempeño obtenido en el Análisis y validación de los modelos analíticos planteados en esta sección.

▪ Resumen de los modelos candidatos

La Tabla 2-10 presenta el resumen de las características de los modelos candidatos propuestos. Se registró la expresión matemática, los parámetros geométricos considerados, la variante respecto al modelo 1 y el retorno al modelo base (modelo 1). Adicionalmente, los modelos 1 al 5 emplean el área de entrada y salida, mientras que los modelos 6 y 7 solo consideran el área de entrada.

**Tabla 2-10:** características de los modelos candidatos.

Modelo	Expresión matemática	Cantidad de parámetros	Variante	Retorno al modelo base
1	$H_{\infty 1} = \frac{r_2 \omega^2}{g} \left( r_2 - \frac{r_1^2 b_1 \tan(\beta_1)}{r_2 b_2 \tan(\beta_2)} \right)$	6	-	-
2	$H_{\infty 2} = \frac{r_2 \omega^2}{g} \left( r_2 - \frac{r_1 b_1 \tan(\beta_1) (r_1 + r_{sh})}{2 r_2 b_2 \tan(\beta_2)} \right)$	7	$r_{sh}$	$r_{sh} = r_1$
3	$H_{\infty 3} = \frac{r_2 \omega^2}{g} \left( r_2 - \frac{r_1 b_1 \tan(\beta_1) (2\pi r_1 - b_1 \cos(\lambda))}{2\pi r_2 b_2 \tan(\beta_2)} \right)$	7	$\lambda$	$\lambda = 90^\circ$
4	$H_{\infty 4} = \frac{r_2 \omega^2}{g} \left( r_2 - \frac{r_1 b_1 \tan(\beta_1) [\pi (r_1 + r_{sh}) - z\delta]}{b_2 \tan(\beta_2) (2\pi r_2 - z\delta)} \right)$	9	$r_{sh}, \delta, z$	$r_{sh} = r_1$ $\delta = 0$
5	$H_{\infty 5} = \frac{r_2 \omega^2}{g} \left( r_2 - \frac{r_1 b_1 \tan(\beta_1) (2\pi r_1 - b_1 \cos(\lambda) - z\delta)}{b_2 \tan(\beta_2) (2\pi r_2 - z\delta)} \right)$	9	$\lambda, \delta, z$	$\lambda = 90^\circ$ $\delta = 0$
6	$H_{\infty 6} = \frac{r_2 \omega}{g} \left( r_2 \omega - \frac{Q_{BEP}}{2\pi r_2 b_2 \tan(\beta_2)} \right)$	3	$Q_{BEP}$	-
7	$H_{\infty 7} = \frac{r_2 \omega}{g} \left( r_2 \omega - \frac{Q_{BEP}}{b_2 \tan(\beta_2) (2\pi r_2 - z\delta)} \right)$	5	$Q_{BEP}, \delta, z$	-

Con base en el desarrollo de la presente sección, se concluyó el desarrollo del segundo objetivo de la presente investigación.

## **2.3 Estrategia de solución por algoritmos de optimización**

Para lograr el desarrollo del tercer objetivo específico, se han identificado tres métodos de solución en la literatura especializada para abordar el problema de maximización de la eficiencia hidráulica basado en los parámetros geométricos del impulsor. El primero de ellos es el método de optimización por enjambre de partículas (PSO por sus siglas en inglés), el cual ha sido seleccionado debido a su amplia utilización en la literatura para resolver modelos analíticos de naturaleza no lineal [119]–[124] y aplicado en PAT [101]. Por otra parte, al realizar la búsqueda en la literatura especializada se encontraron dos algoritmos adicionales a los citados en el estado del arte: algoritmo de búsqueda por vórtice (VSA por sus siglas en inglés Vortex Search Algorithm) y el algoritmo de enjambre de salpas (SSA por sus siglas en inglés). Estos algoritmos no han sido aplicados al problema de optimización de impulsores de PAT, pero han mostrado buenos resultados en aplicaciones del área eléctrica y mecánica. El VSA ha demostrado ser una herramienta eficaz al proporcionar soluciones de alta calidad con una consistente repetibilidad en los resultados [125], [126]. Por otra parte, el SSA se ha implementado en el análisis de transformadores, obteniendo un error relativo inferior en la respuesta al compararse con algoritmos genéticos [127]. A continuación, se proporcionará una visión general de cada una de las técnicas expuestas.

### **2.3.1 Optimización por enjambre de partículas**

El algoritmo PSO es una técnica inspirada en el comportamiento de bandadas de aves y bancos de peces. Fue desarrollado en 1995 por Eberhart y Kennedy [128]. En el algoritmo, cada animal se representa como una partícula que forma un grupo de exploración esparcido en un espacio de solución, en busca de una fuente de alimento común. La característica clave del PSO radica en cómo avanzan las partículas en el espacio de solución, sujeto a restricciones específicas. En cada iteración, se considera la información de las partículas y se sigue la mejor respuesta encontrada en ese momento. Además, el algoritmo incorpora un componente aleatorio para evitar óptimos

locales, lo que permite la exploración del espacio de solución, siempre dirigiéndose hacia la zona donde se encontró la mejor solución en la iteración anterior.

El algoritmo continuo y el algoritmo binario son las dos variaciones de este método. En el primer escenario, las partículas pueden tomar valores reales en cada dimensión, mientras que el segundo escenario solo puede adoptar valores de 0 o 1. Para determinar los parámetros geométricos del impulsor, se utilizará un algoritmo continuo. Las ecuaciones para PSO y su proceso iterativo se proporcionan a continuación.

La Ecuación (2-22) presenta el vector  $X_i$  que contiene las variables del problema de optimización. Al finalizar el proceso iterativo, se obtienen los valores que conducen a la solución óptima del problema. Por otro lado, el vector de velocidades  $V_i$ , expuesto en la Ecuación (2-23), almacena las velocidades correspondientes a cada variable del problema, donde  $i$  representa la  $i$ -ésima partícula. Ambos vectores se actualizan en cada iteración para guiar el avance de las partículas hacia la solución del problema.

$$X_i = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_N] \forall i \in P \quad (2-22)$$

$$V_i = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_N] \forall i \in P \quad (2-23)$$

Al iniciar el problema, se crea un conjunto de partículas de tamaño  $P$ , y las variables de cada partícula se establecen aleatoriamente, al igual que las velocidades para la primera iteración. Además, se les asignan límites máximos y mínimos que están relacionados directamente con el problema bajo análisis para  $X_i$ , y con la velocidad de convergencia para las velocidades.

En este algoritmo, el movimiento de la partícula en cada iteración se compone de tres vectores. La Ecuación (2-24) reporta el vector  $X_i^t$ , que representa los valores asignados para el desplazamiento de la partícula en la iteración  $t$ , y se obtiene al sumar el vector  $X_i^{t-1}$ , que es la posición anterior de la partícula en la iteración  $t - 1$ , con la velocidad de desplazamiento en la iteración  $t$ .

$$X_i^t = X_i^{t-1} + V_i^t \quad (2-24)$$

Del análisis de la Ecuación (2-24), se puede notar que el desplazamiento de la partícula en el espacio de exploración se determina por  $V_{it}$ . Este valor se obtiene a partir de los valores asignados a cada variable en la iteración anterior, utilizando dos funciones de adaptación. Estas funciones evalúan la función objetivo de cada partícula para encontrar la posición óptima de la  $i$ -ésima partícula ( $mejorpos_i$ ) y su respectiva función objetivo ( $aptitud_{x_k}$ ), así como la mejor solución en la nube de partículas ( $mejorpos$ ) y su función objetivo correspondiente ( $aptitud_{x_i}$ ) hasta la iteración actual.

Es relevante destacar que estas posiciones se actualizan en cada iteración, siempre y cuando los resultados obtenidos por la partícula y la nube de partículas en la iteración actual superen los obtenidos en la iteración anterior. La fórmula para calcular la velocidad en cada iteración se muestra en la Ecuación (2-25).

$$V_i^t = \Omega^{t-1} \cdot V_i^t + \varphi_1 \cdot rand_1 \cdot (mejorpos_i - X_i^{t-1}) + \varphi_2 \cdot rand_2 \cdot (mejorpos_i - X_i^{t-1}) \quad (2-25)$$

Donde el vector  $X_i^{t-1}$  se utiliza para representar la posición de la partícula  $i$  en la iteración anterior. El factor de inercia  $\Omega^{t-1}$  corresponde a la inercia en la iteración anterior, y se actualiza en cada iteración para aumentar a medida que el algoritmo avanza. Los valores  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  representan los componentes cognitivo y social, respectivamente. Para evitar que el algoritmo caiga en óptimos locales, se utilizan los valores  $rand_1$  y  $rand_2$ , los cuales son aleatorios y varían entre 0 y 1 [129]. En la Figura 2-14 se muestra el pseudocódigo que describe el proceso iterativo del algoritmo PSO.

**Figura 2-14:** pseudocódigo del algoritmo PSO. Adaptado de [130].

```

Datos: Parámetros del PSO, parámetros del
          modelo matemático
para  $t = 1 : t_{max}$  hacer
  | si  $t == 1$  entonces
  | | Generar el cúmulo de partículas;
  | | Evaluar la función objetivo y las restricciones
  | | para cada individuo;
  | | Evaluar la función de adaptación;
  | | Seleccionar la mejor solución con su
  | | respectiva posición;
  | sino
  | | Actualizar el vector de velocidades;
  | | Actualizar la posición de las partículas;
  | | Generar el cúmulo de partículas;
  | | Evaluar la función objetivo y las restricciones
  | | para cada individuo;
  | | Evaluar la función de adaptación;
  | | Actualizar la mejor solución con su
  | | respectiva posición;
  | | si  $t = t_{max}$  entonces
  | | | Resultados: Imprimir resultados
  | | | Terminar el algoritmo
  | | sino
  | | | Continue;
  | | fin
  | fin
fin

```

### 2.3.2 Algoritmo de búsqueda por vórtice

El algoritmo VSA es una técnica de optimización metaheurística utilizada para resolver problemas de optimización numérica con funciones no lineales. Fue desarrollado en 2015 por Doğan y Ölmez [131]. Su inspiración proviene del comportamiento vertical de los fluidos agitados [126]. En este algoritmo, el vórtice se representa mediante múltiples hiper esferas no concéntricas, donde el primer diámetro se centra en el espacio de solución y está restringido por los límites de cada

variable. La Ecuación (2-26) presenta el radio de la hiperesfera, donde  $x^{max}$  y  $x^{min}$  representan los límites del rango de las variables analizadas en un espacio d-dimensional.

$$\mu_0 = \frac{x^{max} + x^{min}}{2} \quad (2-26)$$

La Ecuación (2-27) describe las soluciones generadas por un proceso aleatorio mediante una distribución gaussiana en el espacio de solución. Aquí,  $\zeta_i^t$  representa el vector de variables aleatorias,  $\mu_t$  es el centro actual de la hiperesfera en cada iteración  $t$ , y  $v$  es una matriz de covarianzas.

$$s_i^t = p(\zeta_i^t, \mu_t, v) = ((2\pi)^d |v|)^{\frac{1}{2}} e \left( -\frac{1}{2} \frac{(\zeta_i^t - \mu_t)^T (\zeta_i^t - \mu_t)}{v} \right) \quad (2-27)$$

El valor del radio es crucial en el algoritmo VSA, ya que define el límite del vector aleatorio  $\zeta_i^t$ . La matriz de covarianzas se simplifica de acuerdo con lo mostrado en la Ecuación (2-28) [132].

$$\sigma_0 = \frac{\max\{x^{max}\} - \min\{x^{min}\}}{2} \quad (2-28)$$

El paso siguiente implica evaluar las soluciones potenciales asociadas con cada valor aleatorio de la matriz gaussiana. Estas soluciones deben estar conectadas para establecer un nuevo centro que facilite el avance en el espacio de solución. La convergencia y, por ende, la mejor solución del problema se logra mediante la reducción del radio, que ocurre en cada iteración al usar la función de selección del nuevo radio basada en la función gamma inversa [125]. La Ecuación (2-29) expone la expresión de la reducción del radio, donde  $a$  es un parámetro constante que controla la velocidad de descenso del radio de la hiperesfera que representa el espacio de solución. Por último, la Figura 2-15 expone el pseudocódigo que describe el proceso iterativo del VSA.

$$r_{t+1} = \sigma \left( 1 - \frac{t}{t_{max}} \right) \epsilon^{\left( -a \frac{t}{t_{max}} \right)} \quad (2-29)$$

**Figura 2-15:** pseudocódigo del algoritmo VSA. Adaptado de [130].

```

Datos: Definir  $\mu_t$  y  $r_t$  para la hiperesfera;
Generar cada candidato a solución potencial  $s_i^t$ 
usando la Ecuación (2-26);
Verificar los límites superiores e inferiores  $s_i^t$ 
usando la Ecuación (2-27);
Evaluar  $s_i^t$  en la función objetivo;
Encontrar la mejor solución  $s_{best}^t$ ;
para  $t = 1 : t_{max}$  hacer
    Actualizar el centro  $\mu_{t+1} = s_{best}^t$ ;
    Calcular el nuevo radio  $r_{t+1}$  usando la Ecuación (2-28);
    Generar nuevos candidatos  $s_i^{t+1}$  por medio de
    la Ecuación (2-26);
    Verificar los límites de cada uno  $s_i^{t+1}$  usando
    la Ecuación (2-27);
    Evaluar  $s_i^t$  en la función objetivo;
    Encontrar la mejor solución  $s_{best}^t$ ;
    si  $k > k_{max}$  entonces
        Seleccionar como solución del problema  $\mu_{t+1}$ ;
        Imprimir resultados;
        Terminar el algoritmo;
    fin
fin

```

### 2.3.3 Algoritmo de enjambre de salpas

El algoritmo de salpas es una técnica de optimización basada en el comportamiento de las salpas. Fue desarrollado en 2017 por Mirjalili *et al.* [133]. Las salpas son similares a las medusas tanto en apariencia como en comportamiento. Su cuerpo es transparente y tiene forma de barril, sus tejidos son parecidos y se desplazan en el agua mediante el bombeo de esta a través de su cuerpo [134].

La razón fundamental por la cual el comportamiento de las salpas es considerado para resolver problemas de optimización es la tendencia a coexistir en enjambres, debido a las condiciones de su entorno. La forma de agruparse les permite desplazarse eficientemente al formar cadenas entre ellas y acceder en áreas de difícil ingreso para alimentarse. Esta conducta de formar cadenas para desplazarse ha sido objeto de estudio, ya que las salpas lo realizan de manera rápida y coordinada

[135]. La cadena de salpas tiene la capacidad de dirigirse hacia la mejor fuente de alimento, la cual cambia constantemente. Esto les permite explorar el espacio de solución en busca de una respuesta óptima. Las principales características del algoritmo de optimización basado en el comportamiento de las salpas son [127]:

- En cada iteración, la actualización de la población considera la mejor solución obtenida hasta el momento.
- El líder de la población actualiza su posición en función de la mejor fuente de alimento encontrada en cada iteración, lo que le permite explorar el espacio de solución cercano.
- El algoritmo se beneficia de dos comportamientos en el movimiento de las salpas, lo que evita que se quede atrapado en óptimos locales.

Las etapas en las que se desarrolla el algoritmo SSA son las siguientes:

- En la primera etapa, se define la población inicial mediante la matriz expuesta en la Ecuación (2-30). Con lo anterior, la cadena inicial de salpas se establece de manera aleatoria mediante la Ecuación (2-31). Cada salpa representa una posible solución al problema de optimización, es decir, una fila dentro de la matriz.

$$Sl^t = \begin{bmatrix} Sl_{11}^t & Sl_{12}^t & \dots & Sl_{N_v}^t \\ Sl_{21}^t & Sl_{22}^t & \dots & Sl_{N_v}^t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Sl_{N_v,1}^t & Sl_{N_v,2}^t & \dots & Sl_{N_v,N_v}^t \end{bmatrix} \quad (2-30)$$

$$Sl_i^t = rand(y_i^{max} - y_i^{min}) + y_i^{min} \quad (2-31)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, N_i$

En la ecuación previa,  $Sl_i^t$  representa una salpa individual, mientras que  $y_i^{max}$  y  $y_i^{min}$  son los límites superior e inferior del espacio de solución, respectivamente. El término  $N$  se refiere al número de individuos en la población, y  $t$  es el número de iteraciones. Es importante señalar que cada salpa, definida como  $Sl^t$ , contiene los parámetros de solución para el problema de optimización.

Después de crear la población inicial, se realiza una evaluación de cada salpa utilizando la función objetivo. Se determina cuál salpa obtiene el mejor resultado mediante la Ecuación (2-32). En cada iteración, la salpa que logre el mejor valor para la función objetivo será considerada como el líder de la población.

$$Sl_{ldr}^t = Sl_{best}^t \quad (2-32)$$

- ii. La segunda etapa define el movimiento de las salpas. La población se divide en dos grupos: el movimiento en relación con el líder y los movimientos entre los seguidores. El líder es la salpa que ha obtenido la mejor solución en la iteración actual y se encuentra al principio de la cadena de salpas. Su función es guiar el movimiento de las demás salpas de la población en busca de la fuente de alimento. La actualización del líder de las salpas se produce en cada iteración y depende del movimiento realizado y el resultado de la función objetivo al evaluar cada individuo de la población.

El movimiento con relación al líder inicia desde la salpa líder de la cadena hasta la mitad de la población del enjambre de salpas. Este proceso implica un movimiento aleatorio que considera las restricciones del problema de optimización. Gracias a esto, se logra una exploración adecuada del espacio de solución alrededor del líder. Matemáticamente, este movimiento se expresa de acuerdo con lo registrado en la Ecuación (2-33), donde  $Sl_{i,j}^t$  representa la posición del líder en el espacio de solución,  $Sl_{ldr(1,j)}^t$  es la fuente de alimento en el espacio de solución,  $y_j^{max}$  y  $y_j^{min}$  son los límites superior e inferior del espacio de solución, y  $C_2$  y  $C_3$  son valores aleatorios en el rango de [0,1]. El parámetro  $C_1$  está definido en la Ecuación (2-34), que se utiliza para mantener el equilibrio entre la exploración y explotación del espacio de solución. Para este caso,  $t$  y  $t_{max}$  definen la iteración actual y el número máximo de iteraciones, respectivamente.

$$Sl_{i,j}^t = \begin{cases} Sl_{ldr(1,j)}^t + C_1 \left( (y_j^{max} - y_j^{min})C_2 + y_j^{min} \right) & C_3 \geq 0 \\ Sl_{ldr(1,j)}^t - C_1 \left( (y_j^{max} - y_j^{min})C_2 + y_j^{min} \right) & C_3 < 0 \end{cases} \quad (2-33)$$

$$C_1 = 2e^{-\left(\frac{4t}{t_{max}}\right)^2} \quad (2-34)$$

El movimiento entre los seguidores se aplica a la población restante, es decir, a las salpas que se encuentran desde la mitad de la cadena hasta el final. Para este propósito, se utiliza la tercera ley del movimiento de Newton para representar el movimiento de las salpas seguidoras, como se muestra en la Ecuación (2-35), donde  $Sl_i^t$  es la posición de la salpa. Este tipo de movimiento se basa en compartir información con las salpas adyacentes, lo que permite generar nuevas ubicaciones en el espacio de solución.

$$Sl_i^t = \frac{Sl_i - sl_{i-1}}{2} \quad (2-35)$$

- iii. Finalmente, la tercera etapa hace referencia a la actualización del líder y de los seguidores, que se realiza con las Ecuaciones (2-33) y (2-35). Con esto, la posición del líder y los individuos se modificaría, definiendo al nuevo líder como el individuo que proporcione la mejor solución objetivo en la iteración que se lleve a cabo.

La Figura 2-16 muestra el pseudocódigo que describe el proceso iterativo del SSA.

**Figura 2-16:** pseudocódigo del algoritmo SSA. Adaptado de [127].

```

Datos: Definir los parámetros  $N_i$ ,  $t_{max}$ ,  $N_v$ ,  $y^{max}$  y  $y^{min}$ ;
Crear la población inicial utilizando la
Ecuación (2-30);
Hacer  $t = 0$ ;
Calcular la función objetivo para cada individuo;
Escoger la mejor solución y definirla el líder
de la cadena de salpas;
para  $t \leq t_{max}$  hacer
| Calcular el parámetro  $C_1$  a partir de la
| Ecuación (2-33);
| para  $i = 1 : N_i$  hacer
| | si  $i \leq N_i/2$  entonces
| | | para  $j = 1 : N_v$  hacer
| | | | Generar los valores para  $C_2$  y
| | | |  $C_3$ ;
| | | | Determinar el movimiento de la
| | | | cadena de salpas a partir de la
| | | | Ecuación (2-32);
| | | sino
| | | | Determinar el movimiento de la
| | | | cadena de salpas a partir de la
| | | | Ecuación (2-33);
| | sino
| | | Determinar el movimiento de la
| | | cadena de salpas a partir de la
| | | Ecuación (2-33);
| | Verificar/corregir la factibilidad de los
| | individuos de la nueva población;
| | Evaluar la función adaptación de los
| | individuos de la nueva población;
| | si  $F(Sl_j^{t+1}) < F(Sl_{ldr}^t)$  entonces
| | | Reemplazar al líder;
| | sino
| | | Conservar la mejor solución obtenida
| | | hasta el momento como  $Sl_{ldr}^t$ ;

```

### 2.3.4 Codificación de los parámetros geométricos del impulsor de PAT

Para la codificación del problema de la maximización de la eficiencia hidráulica del impulsor de PAT, la Tabla 2-11 expone un vector de una fila y diez columnas (1x10) con los parámetros geométricos que se expusieron en la caracterización del perfil hidráulico (sección 2.1). Los valores que

adoptaron las variables dependientes del rango asignado en las restricciones técnicas operativas (sección 2.2.2). Con base en el modelo analítico seleccionado para la rutina de optimización, las variables que no fueron tenidas en cuenta se descartaron y se restringieron únicamente las que la ecuación consideró.

**Tabla 2-11:** codificación del problema de la maximización de la eficiencia hidráulica del impulsor de PAT.

Sección	Entrada				Salida			Álabe		
Parámetros	$r_1$ (mm)	$r_{sh}$ (mm)	$b_1$ (mm)	$\beta_1$ (°)	$\lambda$ (°)	$r_2$ (mm)	$b_2$ (mm)	$\beta_2$ (°)	$z$ (-)	$\delta$ (mm)

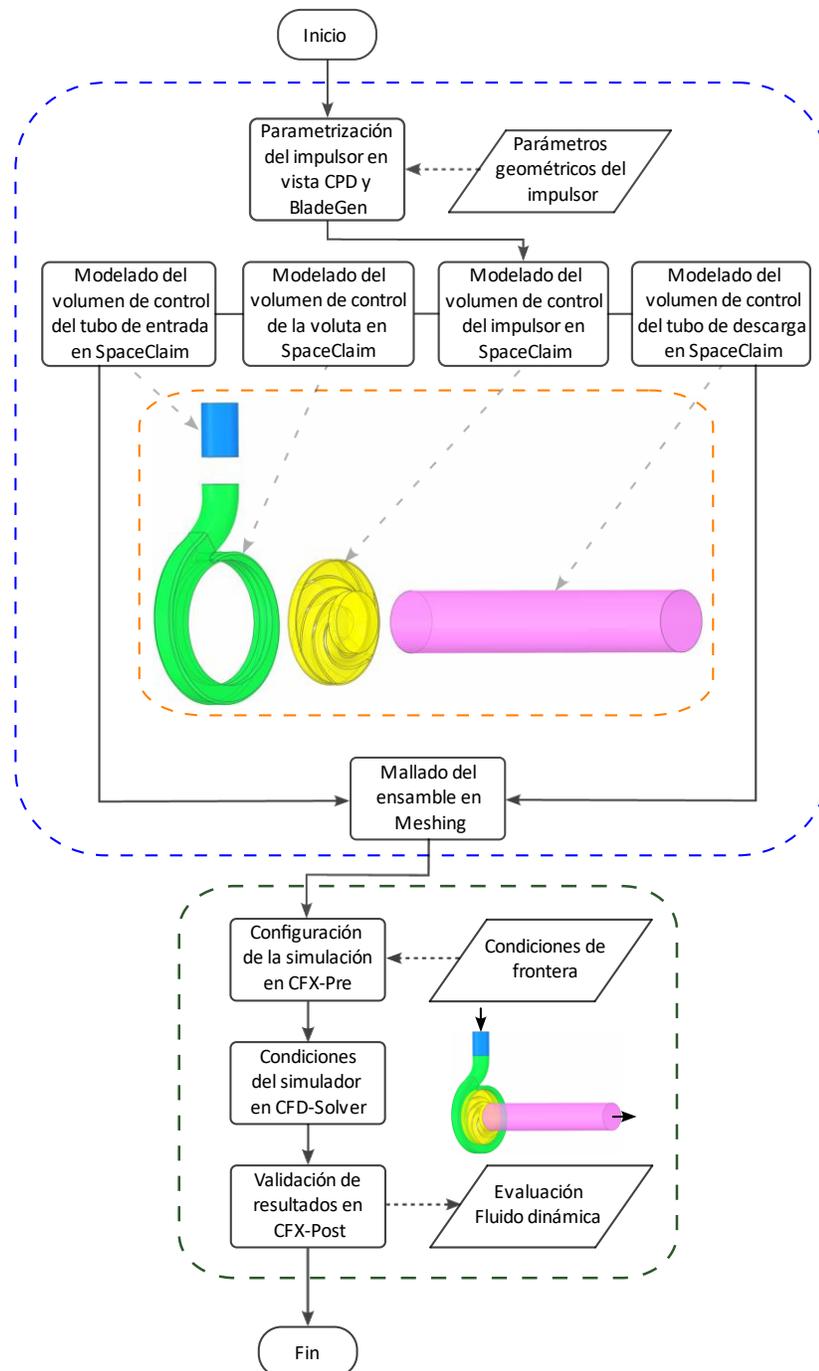
Con base en los algoritmos de optimización presentados en esta sección, se concluyó el desarrollo del tercer objetivo de la presente investigación.

## 2.4 Simulación numérica

La simulación numérica se utilizó para validar la cabeza hidráulica optimizada en la sección 2.3, respecto a la PAT base. La Figura 2-17 muestra el diagrama de flujo del proceso de simulación numérica para el perfil original y optimizado, realizada con el módulo CFX del programa Ansys Workbench. Se puede observar dos eventos en el procedimiento: modelado computacional, del impulsor y simulación, delimitado en recuadros de color azul y verde, respectivamente. Para los volúmenes de control del tubo de entrada, voluta, impulsor y tubo de salida, se realizaron en el módulo SpaceClaim, mientras que el proceso de discretización se realizó en el módulo Meshing. Para el modelado del volumen de control del impulsor, el perfil hidráulico se desarrolló en el módulo BladeGen, mediante los parámetros geométricos reportados en el estudio base. Finalmente, el proceso de simulación se realizó en el módulo CFX, de la siguiente forma: se configuró las condiciones de frontera (entrada y salida), se establecieron las condiciones del simulador, con base en el equipo de cómputo utilizado, y se validaron los resultados de forma

numérica y fluido dinámica. Con base en el modelado original [112], no fue posible modelar la cámara inferior y superior, debido a la carencia del dimensionamiento para ambos elementos.

**Figura 2-17:** diagrama de flujo del proceso de simulación de la PAT.

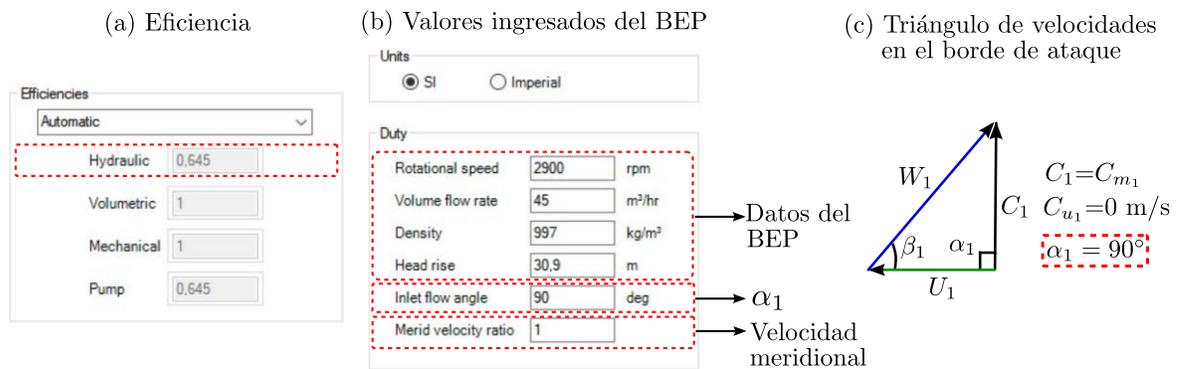


El modelado y la simulación aplicada a la turbo máquina P21, además de la validación del proceso de optimización, se realizó conforme los pasos vistos en la Figura 2-17. A continuación, se detalla de cada procedimiento computacional llevado a cabo en la investigación.

### 2.4.1 Parametrización del impulsor

La parametrización del impulsor se realizó en los módulos Vista CPD y BladeGen del software Ansys Workbench, con el fin de obtener un perfil hidráulico aproximado de la PAT. Con base en los parámetros geométricos, la Figura 2-18 presenta los datos ingresados en el BEP de la turbo máquina en el módulo Vista CPD (Centrifugal pump design, por su traducción desde el inglés). Los datos ingresados fueron en modo bomba, debido que la vista CPD está diseñada en ese modo de operación. En (a) se aprecia el cálculo de la eficiencia hidráulica con base en la eficiencia volumétrica, mecánica y global del sistema. Sin embargo, debido que el estudio base de la PAT no reportó ambos datos, se configuró con base en los valores registrados en el programa. Seguidamente, en (b) se registró la información del BEP y el ángulo de entrada, que es equivalente al ángulo de flujo visto en la sección 1.1.8. y explicado con detalle en (c), mediante el triángulo de velocidades. Además, se configuró la velocidad meridional, establecida en 1, con el fin que la variable sea homogénea en el borde de ataque del álabe (ver Figura 1-8).

**Figura 2-18:** registro de datos del BEP en el módulo Vista CPD.



Seguidamente, se configuró los parámetros geométricos del impulsor. La Figura 2-19 muestra el cuadro de registro de datos que proporciona la Vista CPD. En principio, se configuró la relación entre la carcasa inferior y eje. Sin embargo, dado la carencia en este parámetro, se asume un valor equivalente a 1. Por otra parte,  $\beta_1$  se tabuló para la carcasa superior e inferior con  $30^\circ$  en ambos casos. De igual forma, fue configurado  $D_2$ ,  $\beta_2$ ,  $z$  y  $\delta$ , de acuerdo con lo reportado en el artículo base. Finalmente, la inclinación del borde de salida y de la curvatura de la carcasa inferior se mantuvieron por defecto, debido a la carencia de ambos datos.

**Figura 2-19:** registro de los parámetros geométricos del impulsor.

The figure shows a screenshot of a CAD software parameter input form for an impeller. The form is organized into several sections, with specific parameters highlighted by red dashed boxes and labeled with arrows:

- Hub diameter:** Contains 'Shaft min diam factor' (1) and 'Dhub / Dshaft' (1). An arrow points to this section with the label 'Relacion carcasa inferior y eje'.
- Tip diameter:** Contains 'User defined' (dropdown), 'Head coefficient' (0.46), and 'Tip diameter' (169 mm). An arrow points to the tip diameter field with the label  $D_2$ .
- Leading edge blade angles:** Contains 'User defined' (dropdown), 'Hub blade angle' (30 deg), and 'Mean blade angle' (30 deg). An arrow points to the hub blade angle field with the label  $\beta_1$  en la carcasa inferior.
- Trailing edge blade angles:** Contains 'Blade angle' (25 deg) and 'Rake angle' (0 deg). An arrow points to the blade angle field with the label  $\beta_2$ , and another arrow points to the rake angle field with the label 'Inclinación del borde de salida'.
- Miscellaneous:** Contains 'Number of vanes' (6), 'Thickness / tip diam' (0.035), and 'Hub inlet draft angle' (30 deg). Arrows point to these fields with labels: 'Número de álabes (z)', 'Espesor del álabe ( $\delta$ )', and 'Inclinación de la curvatura de la carcasa inferior'.
- Shroud:** Contains 'User defined' (dropdown), 'Incidence' (0 deg), and 'Shroud blade angle' (30 deg). An arrow points to the shroud blade angle field with the label  $\beta_1$  en la carcasa superior.

La Figura 2-20 presenta los resultados obtenidos en el modelado del perfil hidráulico del impulsor. Se puede observar tres conjuntos de resultados, donde se detalla en (a) el rendimiento calculado (*Overall performance*) y en (b) entrada del impulsor (*Impeller inlet*) y salida del impulsor (*Impeller exit*).

El conjunto del rendimiento calculado en (a) se presenta en dos secciones. La primera sección expone las expresiones matemáticas para el cálculo de la velocidad específica de la bomba de forma adimensional ( $\Omega_s$ ), sistema estadounidense ( $N_s$ ) y sistema europeo ( $n_q$ ). El sistema europeo es el equivalente al  $N_{sp}$  visto en la Ecuación (1-1) y el que está registrado en la Tabla 2-2. Además,

se muestra la velocidad específica de succión ( $N_{ss}$ ), junto a la potencia requerida por la bomba (*power*). La segunda sección presenta la energía transferida al fluido ( $\psi$ , como *head coeff*), el flujo que circula por la bomba ( $\phi$ , como *Flow coeff*), factor de estabilidad de la curva característica con un flujo cercano a cero ( $K_s$ ), la cabeza neta de succión positiva requerida ( $NPSH_r$ ) y el coeficiente de difusión (*diffn ratio*). Con base a la guía del software Ansys Vista CPD [136], se debe considerar lo siguiente:

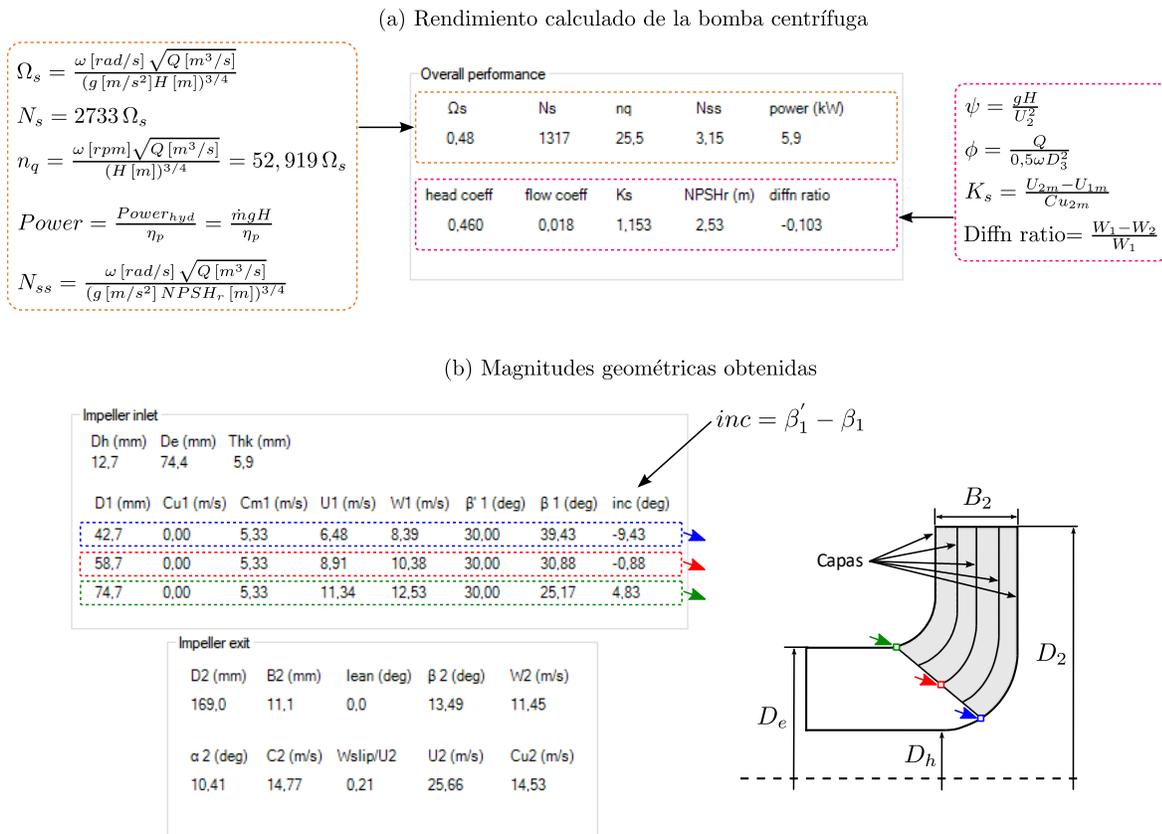
- $\Omega_s$  indica flujo radial si el valor calculado está entre el rango de 0,3-0,8.
- $N_{ss}$  indica el rendimiento de cavitación de la bomba. Se clasifica en el siguiente rango:
  - 1,5 indica cavitación deficiente.
  - 2,5 indica cavitación razonable.
  - 4,0 indica cavitación bueno.
  - $> 4,0$  indica cavitación excepcional.
- *power* incluye la eficiencia global de la turbo máquina para el cálculo. Se define de la siguiente forma:  $\eta_{bomba} = \eta_{hidráulica} \cdot \eta_{volumétrica} \cdot \eta_{mecánica}$
- $K_s$  mide que tan estable es la curva característica de la bomba, cuando el flujo se aproxima a cero. Debe ser un valor mayor o igual a 0,9.
- *Diffn ratio* debe ser un valor cercano a cero y no superior a 0,25. Un valor de cero, indica la máxima eficiencia del flujo, cuando las velocidades relativas son equivalentes ( $W_1 = W_2$ )

Seguidamente, el conjunto de la entrada del impulsor en (b) expone los parámetros del perfil hidráulico en las capas representadas en color azul, rojo y verde. Las variables geométricas expuestas fueron las siguientes: diámetro de succión ( $D_e$ , como *eye diameter*, equivale a  $2 \cdot r_1$ ), diámetro del eje ( $D_h$ , como *hub diameter*, equivale a  $2 \cdot r_{sh}$ ), espesor de los álabes ( $Thk$ , equivale a  $\delta$ ), y el ángulo de entrada del álabe  $\beta'_1$  (equivale a  $\beta_1$ ). Las capas hacen referencia a la división del modelado del álabe en diferentes secciones. Este aspecto se abordó en el Módulo BladeGen.

Por último, el conjunto de la salida del impulsor, en (b), se encontraron parámetros relevantes como: diámetro del impulsor ( $D_2$ , equivale a  $2 \cdot r_2$ ), ancho de salida del impulsor ( $B_2$ , equivale a  $b_2$ ) y *lean* (equivale a la inclinación del borde de salida de la Figura 2-19).

Para resaltar, los parámetros que no fueron mencionados en la Figura 2-20, no fueron relevantes en el modelado preliminar, debido que le perfil hidráulico se debió parametrizar en el módulo BladeGen.

Figura 2-20: resultados obtenidos en la Vista CPD para el modelado del impulsor.



Adicionalmente, el software reportó una eficiencia de 68,15 %, obteniendo un error relativo de 5,66 %. Sin embargo, la eficiencia obtenida en vista CPD es la global, en lugar de la eficiencia hidráulica. Por otra parte, parámetros como  $\lambda$ ,  $b_1$ ,  $\beta_2$  y  $\varphi$  no se reportaron en los resultados y no fue posible compararlos desde el módulo Vista CPD. Por lo tanto, estos se modificaron en BladeGen.

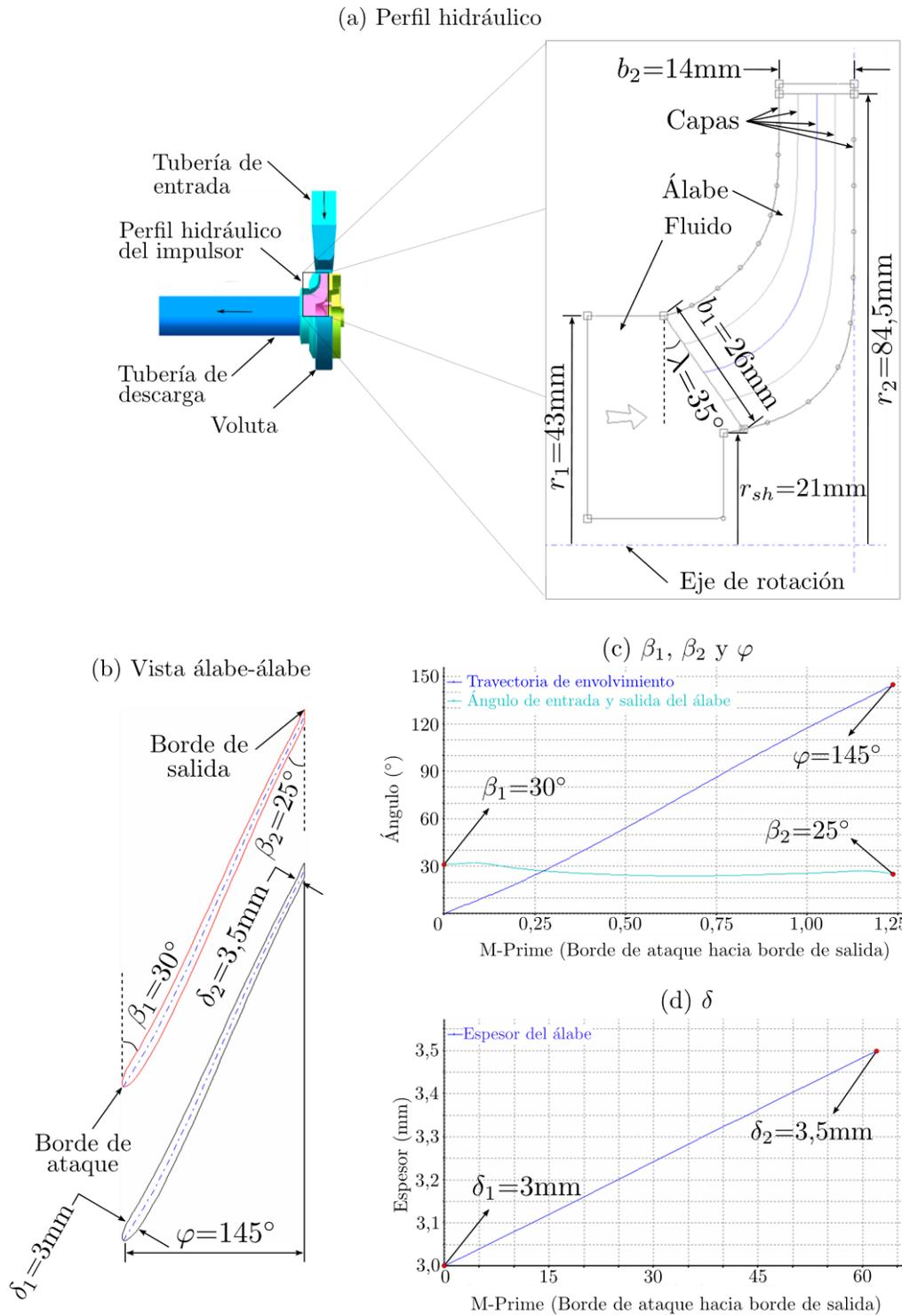
Posterior a la parametrización base en la vista CPD, el módulo BladeGen permitió la modificación del perfil hidráulico con base en los parámetros geométricos registrados en la Tabla 2-4. Los autores

del estudio base de la PAT modelada (P21) realizaron investigaciones adicionales empleando la misma turbo máquina [112], [115], [137]–[140], donde se corroboraron las magnitudes del impulsor y se corroboró la curvatura del perfil hidráulico.

La Figura 2-21 presenta los parámetros geométricos configurados del perfil hidráulico del impulsor, dividido en cuatro secciones: en (a) se muestra el perfil hidráulico con la vista de la PAT base en la parte izquierda. En principio, se observa el modelado base de la PAT, que incluye la tubería de entrada y tubería de salida. Seguidamente, se observa el acercamiento del perfil ubicado en la parte derecha, donde se tiene parametrizado  $r_1$ ,  $r_{sh}$ ,  $b_1$ ,  $\lambda$ ,  $r_2$  y  $b_2$ , con los valores reportados en el artículo base. Adicionalmente, en la misma vista puede observarse el eje de rotación y las capas utilizadas para la parametrización. En este caso, se utilizaron las capas de la carcasa superior e inferior (curvas extremas del perfil) y la capa central que está trazada con línea azul. El perfil hidráulico fue modificado partiendo de los resultados obtenidos en la vista CPD (ver Figura 2-20). Finalmente, es posible notar un espacio que hay entre el eje de rotación

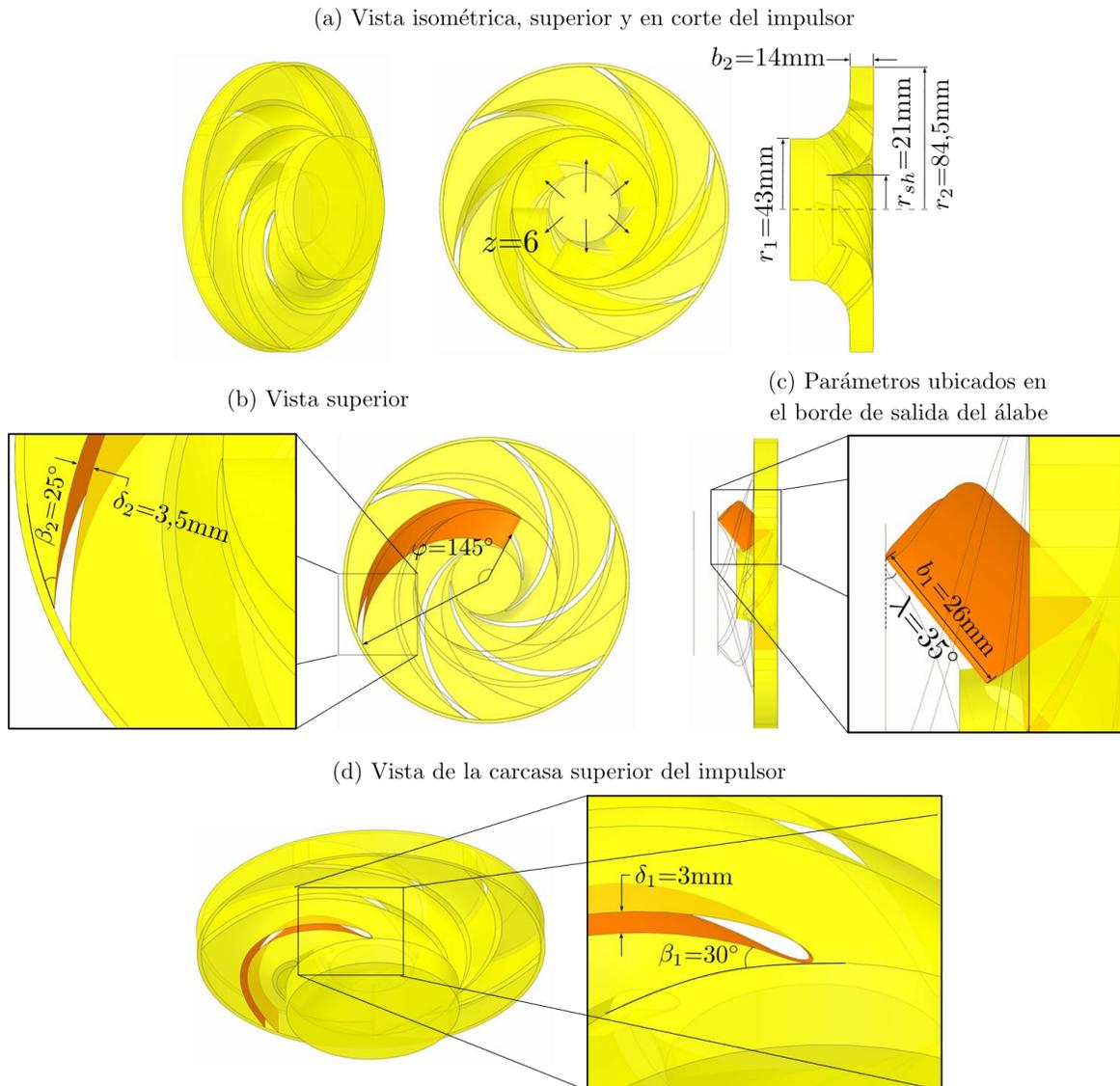
Seguidamente, en (b) se observa la vista álabe-álabe donde se tiene el resultado de la parametrización de  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  y  $\varphi$ , a lo largo del borde de ataque y borde de salida. Para el caso de  $\varphi$ , el ángulo se toma como referencia desde el centro del eje de rotación hacia los bordes de ataque y salida. Sin embargo, por simplicidad se representa según lo expuesto en la figura. En (c) se detalla la curva parametrizada para  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  y  $\varphi$  a lo largo de la trayectoria meridional del álabe (M-Prime), donde la curva tiende a ser lineal entre el borde de ataque (M-Prime=0) y borde de salida (M-Prime=1,25). De igual manera, (d) muestra la curva de tendencia del espesor del álabe.

Figura 2-21: parámetros geométricos configurados del perfil hidráulico.



### 2.4.2 Modelado del volumen de control del impulsor

Con base en los parámetros establecidos en la Parametrización del impulsor, La Figura 2-22 muestra el modelado del volumen de control del impulsor junto con los parámetros ajustados. El modelado fue realizado en SpaceClaim de Ansys. En (a) se observa la vista isométrica, superior y en corte del impulsor, donde se pueden localizar los parámetros  $z$ ,  $r_1$ ,  $r_{sh}$ ,  $r_2$  y  $b_2$ . Seguidamente, en (b) se muestra la vista superior, donde se expone el ángulo  $\varphi$  y los parámetros  $\beta_2$  y  $\delta_2$ . Posteriormente, en (c) se visualiza la vista de los parámetros ubicados en el borde de salida del álabe, con uno de los álabes resaltados en naranja. Se visualizan los parámetros  $\lambda$  y  $b_1$ . Finalmente, en (d) se expone la vista de la carcasa superior del impulsor, mostrando los parámetros  $\beta_1$  y  $\delta_1$ . Cabe recordar que para el modelado se tuvo la nomenclatura en modo bomba, debido que la vista CPD y posterior parametrización en BladeGen se registró cada parámetro en este modo de operación.

**Figura 2-22:** modelado del volumen de control del impulsor con los parámetros geométricos.

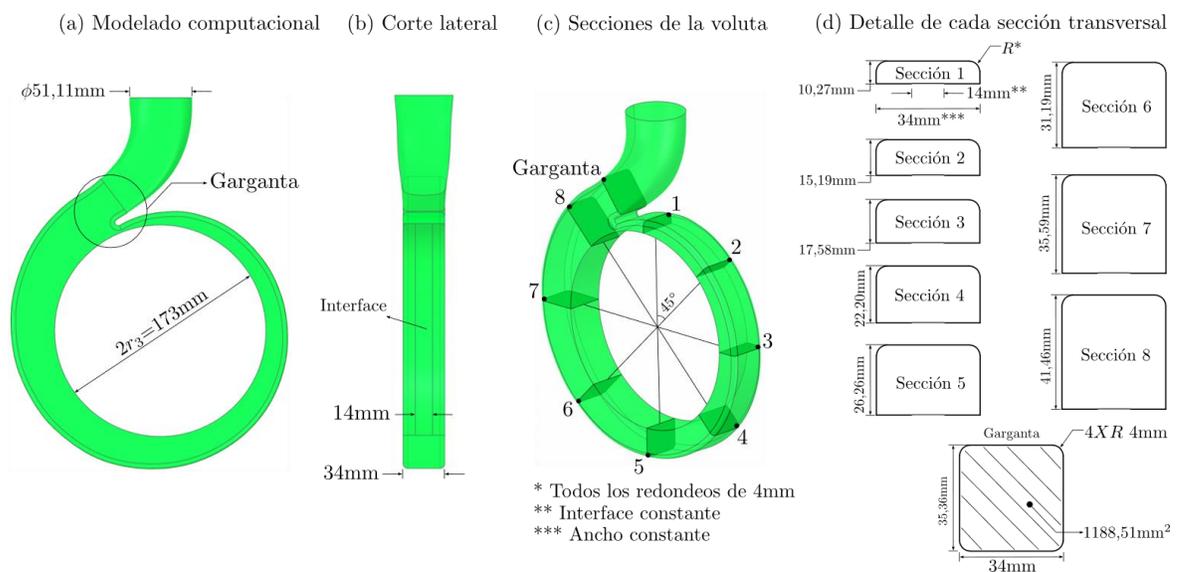
### 2.4.3 Modelado del volumen de control de voluta y tuberías

La Figura 2-23 presenta el modelado de la geometría de la voluta con base en estudios previos de los autores [112], [115], [138], [139]. La voluta es de sección rectangular. Es importante destacar

que el proceso de modelado computacional se realizó con base en los artículos reportados, mediante ingeniería inversa. Por lo tanto, existe una propagación de errores geométricos.

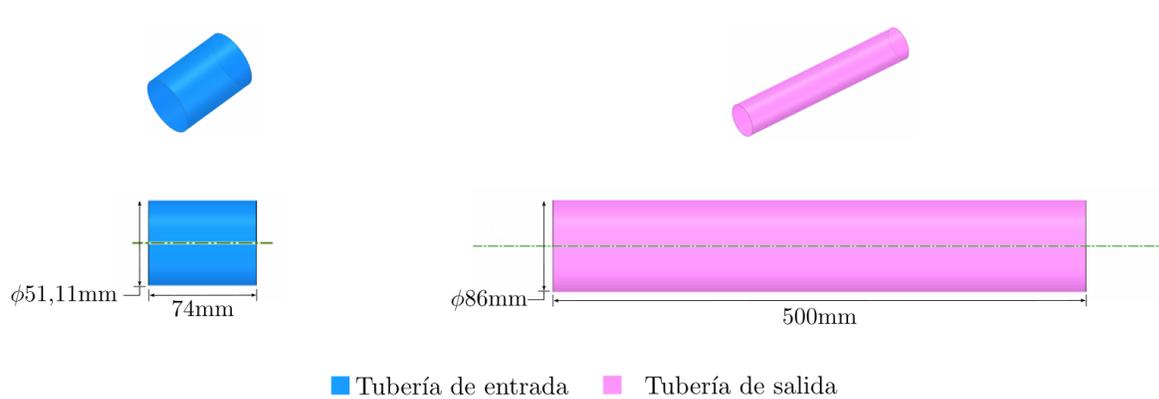
En (a) se muestra el modelado computacional del volumen de control, junto con las cotas del diámetro base ( $2r_3$ ) y el diámetro de entrada de la voluta. Adicionalmente, se muestra la región de la garganta que es donde la sección se modifica para terminar en una circunferencia para conectar el tubo de entrada. En (b) se muestra una vista de corte lateral, donde se destaca la región de la interfaz, es decir, donde se acopla con el impulsor. Esta sección mide 14 mm, por lo que el espacio restante es considerado como pared en la simulación. Seguidamente, en (c) se observan las secciones de la voluta, junto con la sección de la garganta. En total se obtuvieron ocho secciones, separadas entre sí  $45^\circ$ . Finalmente, en (d) se muestran las dimensiones para cada sección transversal desarrollada. Con base en el parámetro  $F$ , reportado en la Tabla 2-4, la sección de la garganta fue de  $1188,51 \text{ mm}^2$ , siendo un 2,43 % superior a la reportada en el artículo base. Basado en los estudios reportados en la sección de Pérdidas hidráulicas, en la voluta hay menor disipación de energía, en comparación con el impulsor.

**Figura 2-23:** modelado del volumen de control de la voluta.



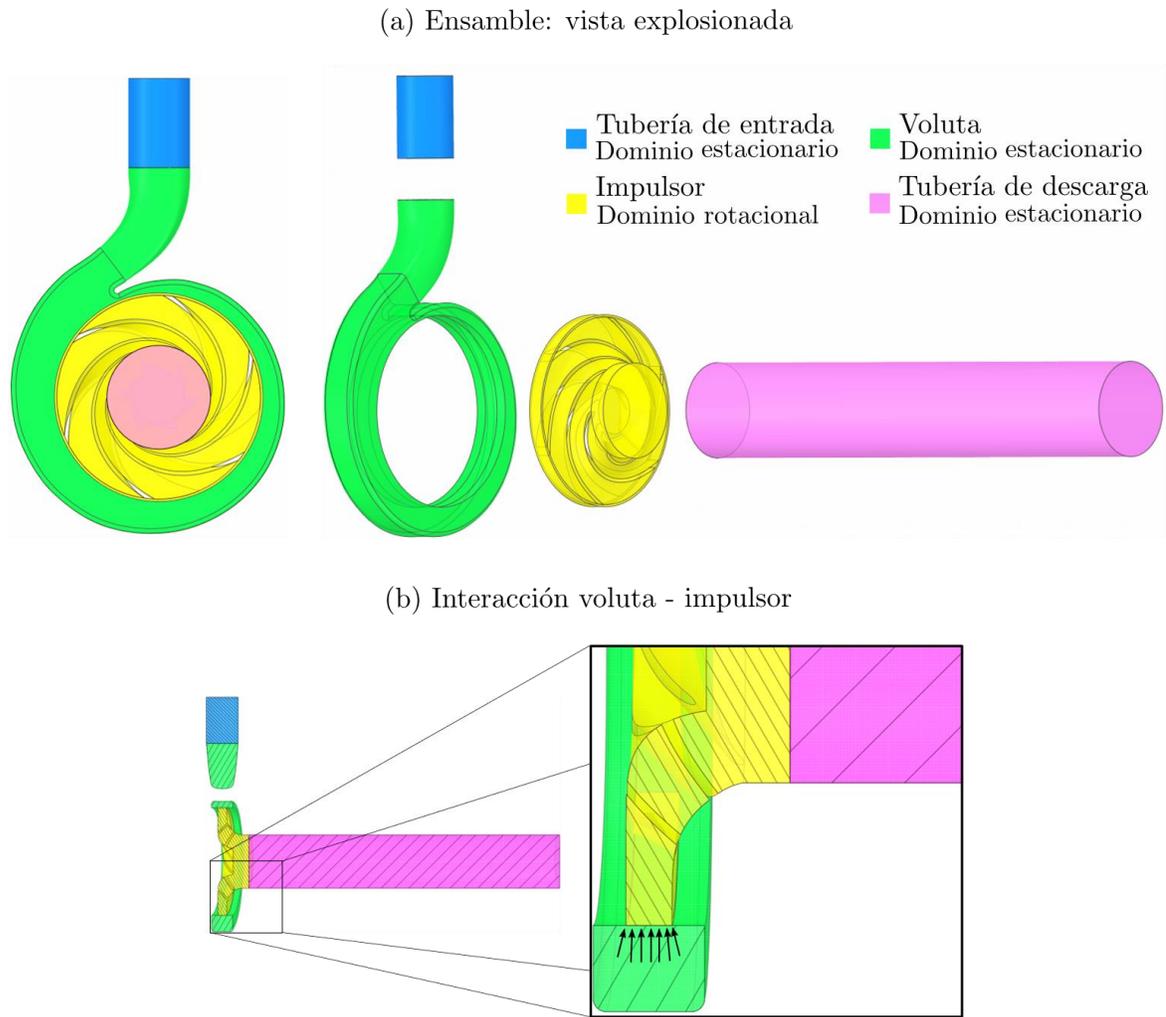
Para el caso de las tuberías de entrada y salida, la Figura 2-24 expone el modelado geométrico junto con el dimensionamiento, obtenido de estudios previos [112], [115], [139]. Ambas tuberías son necesarias para que haya un desarrollo del flujo en la turbo máquina.

**Figura 2-24:** modelado del volumen de control de la tubería de entrada y salida.



Por último, la Figura 2-25 muestra el ensamble del volumen de control de la turbo máquina. En (a) se detalla la vista explosionada, donde cada volumen de control es separado, mostrando el dominio rotacional y estacionario. Luego, en (b) se puede visualizar la interacción voluta – impulsor, mostrando los vectores de flujo en la interfaz que conectan ambos dominios, realizado con base en lo consultado en la sección de Análisis numérico y experimental.

**Figura 2-25:** ensamble del volumen de control de la turbo máquina.



### 2.4.4 Discretización del volumen de control

Para la discretización del volumen de control, se realizó un estudio de malla mediante el índice de convergencia de malla (GCI). El GCI se basa en el método de extrapolación de Richardson [141]. Este método permite estimar una solución exacta de una variable fluido dinámica cuando el número de elementos de la malla tiende a infinito. Además, determina una malla adecuada para simulaciones posteriores. En la literatura se han realizado estudios sobre turbinas gravitacionales

de vórtice [142], [143], y PATs [142]–[147] analizando variables como la altura, el torque y el paso de tiempo. Las ecuaciones utilizadas en esta metodología son las siguientes:

- La Ecuación (2-36) es el tamaño representativo de malla  $h$ , que depende del número de elementos de malla  $N$ . Deben evaluarse al menos tres configuraciones de malla. Se tiene en cuenta que  $h_1 < h_2 < h_3$ , siendo  $N_1$  la malla refinada.
- La Ecuación (2-37) hace referencia al factor de refinamiento  $r$  depende de  $h$ . Las variables  $h_c$  y  $h_f$  indica el tamaño representativo de una malla poco refinada en relación con una de mayor número de elementos, respectivamente. Para tres configuraciones de malla, se tiene que:  $r_{21} = h_2/h_1$ , y  $r_{32} = h_3/h_2$ .
- La Ecuación (2-38) es el orden aparente  $p$ , que depende de  $r$  y de una variable de control resultante en simulaciones previas ( $\phi$ ) con diferente número de malla. En este caso,  $\varepsilon_{32} = \phi_3 - \phi_2$ , y  $\varepsilon_{21} = \phi_2 - \phi_1$ .  $\varepsilon$  no debe ser igual a cero. Si  $\varepsilon_{32}/\varepsilon_{21} \leq 0$ , indica convergencia oscilatoria. Adicionalmente,  $q(p) = 0$  si  $r_{21} = r_{32}$ . El orden aparente depende del orden de la simulación.
- La Ecuación (2-39) hace referencia al valor extrapolado  $\phi_{ext}^{21}$  cuando  $h$  tiende a cero. Este es el resultado para la comparación de dos mallas. Para tres mallas, el cálculo se realiza considerando la malla refinada y la intermedia.
- La Ecuación (2-40) representa error relativo aproximado de la malla fina  $e_a^{21}$ . Es el error relativo entre las variables de interés de las mallas evaluadas.
- La Ecuación (2-41) es el error relativo de malla fina extrapolado  $e_{ext}^{21}$ . El resultado obtenido en la Ecuación (2-39) se compara con la variable de interés obtenida en la simulación.
- La Ecuación (2-42) calcula el índice de convergencia de malla  $GCI_{fina}$ , para un orden aparente entre 0,95 y 2,05. Se utilizó 1.25 porque es un factor de seguridad recomendado en la literatura [142]. En caso de que el orden aparente sea mayor a 2,05, se utiliza la Ecuación (2-43), donde  $\Delta M = \max(|\phi_2 - \phi_1|, |\phi_3 - \phi_2|, |\phi_3 - \phi_1|)$ .

$$h_i = \left(\frac{1}{N_i}\right)^{1/3} \quad (2-36)$$

$$r = \frac{h_c}{h_f} \tag{2-37}$$

$$p = \frac{1}{\ln(r_{21})} |\ln|\varepsilon_{32}/\varepsilon_{21}| + q(p) \tag{2-38}$$

$$\phi_{ext}^{21} = \frac{r_{21}^p \phi_1 - \phi_2}{r_{21}^p - 1} \tag{2-39}$$

$$e_a^{21} = \left| \frac{\phi_1 - \phi_2}{\phi_1} \right| \tag{2-40}$$

$$e_{ext}^{21} = \left| \frac{\phi_{ext}^{12} - \phi_1}{\phi_{ext}^{12}} \right| \tag{2-41}$$

$$GCI_{fina}^{21} = \frac{1,25 e_a^{21}}{r_{21}^p - 1}, \text{ con } 0,95 \leq p < 2,05 \tag{2-42}$$

$$GCI_{fine}^{21} = \max\left(\frac{1,25 e_a^{21}}{r_{21}^p - 1}, \frac{1,25 \Delta M}{|\phi_1|}\right), \text{ con } p \geq 2,05 \tag{2-43}$$

La Tabla 2-12 presenta los resultados obtenidos para las tres mallas analizadas en términos de cabeza y eficiencia. El resultado relevante es el GCI obtenido del valor extrapolado cuando la malla tiende a elementos infinitos. Respecto al orden aparente de la simulación, este valor fue superior a 2,05, siendo el valor máximo obtenido de 2,622. De acuerdo con la literatura, las causas por las que el orden aparente fue superior al orden de la simulación son debido al refinamiento de la malla [148], y que  $\varepsilon_{32} - \varepsilon_{21}$  es un valor cercano a cero [141].

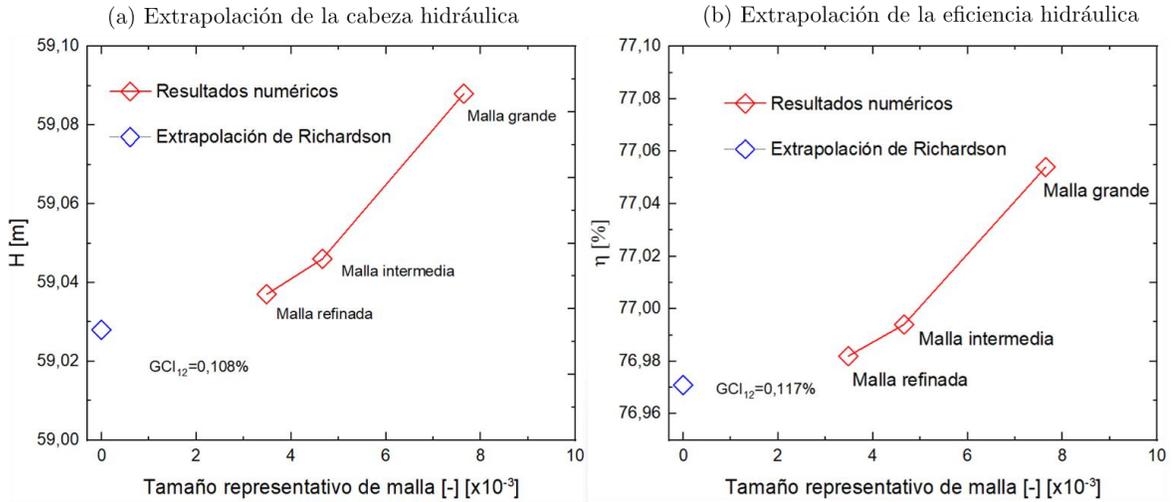
**Tabla 2-12:** resultados obtenidos de independencia de malla.

Variable	Cabeza	Eficiencia	Detalle
$N_1$	23'659.863		Malla refinada
$N_2$	9'896.937		Malla intermedia
$N_3$	2'238.790		Malla grande
$\phi_1$	59,037	786,982	Variable de interés
$\phi_2$	59,046	76,994	Variable de interés
$\phi_3$	59,088	77,054	Variable de interés
$h_1$	3,48E-03		Malla refinada

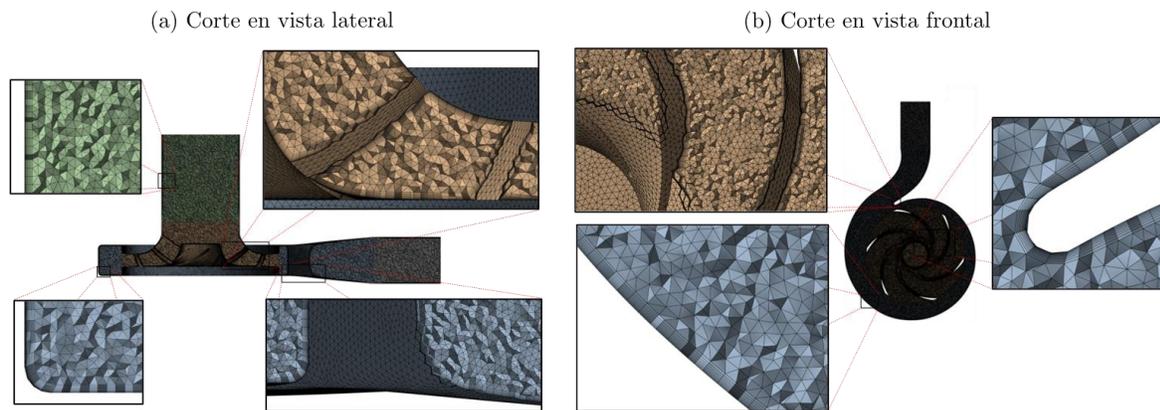
Variable	Cabeza	Eficiencia	Detalle
$h_2$	4,66E-03		Malla media
$h_3$	7,64E-03		Malla grande
$r_{21}$	1,34		$r \geq 1,3$
$r_{32}$	1,64		$r \geq 1,3$
$\varepsilon_{21}$	9E-03	1,2E-02	$\varepsilon_{21}$ y $\varepsilon_{32}$ no deben ser valores cercanos a cero
$\varepsilon_{32}$	4,2E-02	6E-02	
$\varepsilon_{32}/\varepsilon_{21}$	4,67	5	$\varepsilon_{32}/\varepsilon_{21} < 0$ incida convergencia oscilatoria
$s$	1	1	Signo matemático
$q(p)$	-0,826	-0,848	Si $q(p) = 0$ , indica que $r_{21} = r_{32}$
$p$	2,460	2,622	Debe ser aproximado al orden de la simulación
$\phi_{ext}$	59,028	76,971	Valor extrapolado para $h = 0$
$e_a^{21}$ (%)	0,015	0,016	Error relativo sin considerar el valor extrapolado
$e_{ext}^{21}$ (%)	0,015	0,014	Error relativo considerando el orden aparente
$GCI_{12}$ (%)	0,108	0,117	GCI para la malla refinada

La Figura 2-26 muestra los gráficos que representan el comportamiento de convergencia de la variable extrapolada de cabeza (a) y eficiencia hidráulica (b) con respecto al tamaño de malla representativo. Tras analizar la extrapolación de Richardson, se determinó que la malla de 9'896.937 elementos fue la opción adecuada debido a que el GCI era menor al 1 %, valor inferior al 5 % sugerido por la literatura [145]–[147].

**Figura 2-26:** independencia de malla para la cabeza y eficiencia.



La malla seleccionada mediante el método de extrapolación de Richardson se desarrolló en el módulo Meshing de Ansys 2023 R1, que ha sido utilizado por diversos estudios en la literatura [39], [52], [53], [81], [144], [149]–[152]. La Figura 2-27 muestra la malla seleccionada en el método de extrapolación de Richardson. Se puede observar una vista de corte lateral en (a), junto con una vista en corte frontal en (b), donde ambos muestran la discretización del impulsor y la voluta. Para considerar los fenómenos de viscosidad en las paredes, se utilizó el criterio del  $y^+$  para determinar la capa límite. Como resultado, se obtuvo un promedio de 35,29, valor que está acorde con el artículo base [112].

**Figura 2-27:** malla del volumen de control del impulsor y la voluta.

La Tabla 2-13 expone las métricas de la malla seleccionada, que relaciona la calidad requerida por el módulo Meshing y el solucionador Ansys-CFX [153], [154]. La relación aspecto máxima obtenida en la malla es aceptable de acuerdo con lo requerido por el software y también un reporte de un estudio que obtuvo un valor de 74,57 [155]. Seguidamente, la oblicuidad obtenida estuvo por debajo del valor límite requerido por Meshing. Adicionalmente, un estudio realizado por Ramírez *et al.* [156] expuso un ángulo ortogonal aceptable de 26,41, siendo inferior respecto al obtenido por el presente estudio. En contraste, la calidad ortogonal obtuvo un valor mínimo de 0,102. Sin embargo, el promedio fue de 0,7999. Finalmente, las métricas de malla, con base en los aspectos del software Ansys, estuvieron dentro del rango requerido.

**Tabla 2-13:** métricas de malla.

Módulo	Métrica	Mínimo	Promedio	Máximo	Rango
Meshing	Relación aspecto	1,158	1,861	10,904	$x < 1000$
	Calidad ortogonal	0,102	0,799	0,999	$x > 0,16$
	Oblicuidad	2,09E-09	0,200	0,898	$x < 0,9$
	Ángulo ortogonal	39,1 °	-	57,2 °	Aceptable

Módulo	Métrica	Mínimo	Promedio	Máximo	Rango
CFX	Factor de expansión	4	-	17	$x < 20$
solucionador	Relación aspecto	4	-	6	Bueno

### 2.4.5 Configuración y condición de la simulación

Las condiciones de frontera se establecieron acorde con el artículo base [112]. Para este propósito, las ecuaciones de gobierno consideraron la continuidad y el modelo RANS (Promedio de Reynolds Navier-Stokes, por sus siglas en inglés), expuestas en la Ecuación (2-44) y Ecuación (2-45), respectivamente [151].

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2-44)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu_{eff} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2-45)$$

El modelo de turbulencia *SST* (transporte de esfuerzo cortante, por sus siglas en inglés) es un modelo de dos ecuaciones en las que se relaciona la energía cinética y la frecuencia turbulenta. En la Ecuación (2-46) y Ecuación (2-47) se presentan ambas expresiones [53], [151], [157]. Un estudio realizado por Plua *et al.* [41] encontró que este modelo es el segundo más utilizado para la simulación de PAT (siendo el más utilizado el  $k - \varepsilon$ ), preferido en el 27 % de los análisis.

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i k)}{\partial x_i} = P_k - \beta \rho k \omega + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] \quad (2-46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i \omega)}{\partial x_i} = & \left[ \frac{5}{9} F_1 + 0.44(1 - F_1) \right] \frac{1}{v_t} P_k - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] \\ & + 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (2-47)$$

El cálculo del estrés de Reynolds en el modelo *SST* es basado en la hipótesis de Boussinesq, expuesto en la Ecuación (2-48) [53], [158].

$$u'_i u'_j = \nu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (2-48)$$

Finalmente, la viscosidad cinemática turbulenta,  $\nu_t$ , se definió en la Ecuación (2-49) [53], [98], [159].

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, S F_2)} \quad (2-49)$$

En la configuración del módulo CFX, se establece por defecto las funciones de pared del modelo *SST* como automático, por lo que el software activa las funciones al detectar que el fluido está cerca de regiones adyacentes a las paredes. La Tabla 2-14 presenta las condiciones de frontera establecidas en el módulo CFX de Ansys. En adición, la variable de salida (flujo másico) se modificó en diferentes valores, con el fin de construir la curva característica numérica. La interfaz seleccionada en el acople voluta – impulsor e impulsor – tubo de salida fue Frozen Rotor, utilizada para turbo máquinas [160], [161]. Finalmente, se simuló en doble precisión, con el fin de obtener resultados adecuados.

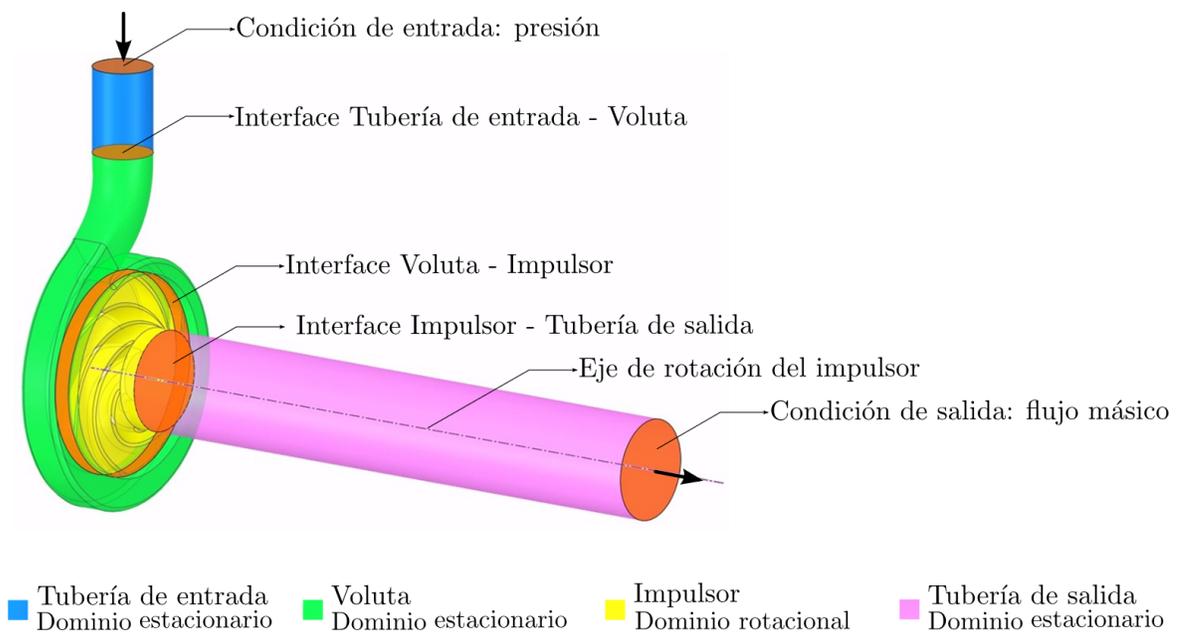
**Tabla 2-14:** condiciones de frontera configurada en el módulo CFX de Ansys.

Aspecto	Selección
Tipo de análisis	Estado estacionario
Fluido de trabajo	Agua, a 25 °C
Dominio estático	Tubería de entrada, tubería de salida y voluta
Dominio rotacional	Impulsor
Modelo de turbulencia	<i>SST</i> $k - \omega$
Variable de entrada	Presión total (800kPa)
Variable de salida	Flujo másico
Velocidad angular (rpm)	2900

Aspecto	Selección
Rugosidad ( $\mu\text{m}$ )	50
Interfaz	Rotor congelado
Orden de la simulación	2
Valor residual	1 E-6
Iteraciones	1000

Finalmente, la Figura 2-28 presenta las condiciones de frontera con base en los dominios computacionales. En el volumen de control de la PAT se puede observar el sentido de flujo del agua, junto con las condiciones de entrada y salida y las interfaces utilizadas.

**Figura 2-28:** condiciones de frontera en los dominios computacionales.



El equipo utilizado para la simulación numérica se encuentra en el laboratorio de modelado, del Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín. Las características de cómputo fueron las siguientes:

- Procesador: Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2667 0 @ 2,90GHz 2,90GHz (2 procesadores)
- Núcleos: 12

- Memoria instalada (RAM): 64,0 Gb
- Tipo de sistema: Sistema operativo de 64 bits, procesador x64
- Tiempo de simulación promedio por cada condición de flujo másico: 12 horas con 15 minutos.

Finalmente, para las simulaciones del perfil optimizado propuesto, se realizó el procedimiento bajo las mismas condiciones, respecto a la metodología descrita, con la variación de la geometría del impulsor.

## **3. Resultados**

El presente apartado muestra los logros obtenidos mediante la metodología desarrollada en el capítulo 2. Se inició desde el análisis de los modelos analíticos desarrollados. Posteriormente, se realizó la selección de la ecuación para el proceso de optimización, con base en las PAT encontradas en la literatura y criterios técnico operativos. Seguidamente, se procedió a optimizar el impulsor con base en el modelo analítico seleccionado. Finalmente, se procedió a la validación de los parámetros optimizados, mediante simulación numérica y CFD.

### **3.1 Análisis y validación de los modelos analíticos planteados**

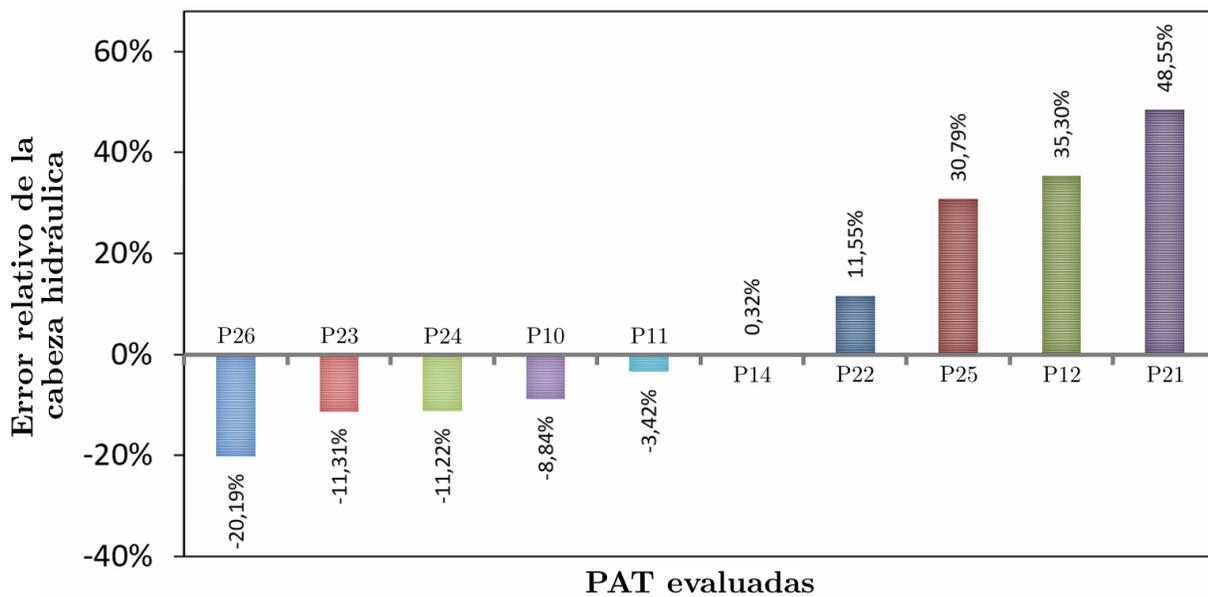
En esta sección se realizó el análisis y validación de cada uno de los modelos analíticos desarrollados en la sección 2.2.3, empleando las turbinas encontradas en la literatura. Es importante notar que el número de turbinas empleado para cada validación fue variable, dado que la selección del modelo dependió de los parámetros geométricos obtenidos con la información disponible en las investigaciones consultadas. El objetivo de esta sección fue identificar cuál modelo permitió establecer un comportamiento aproximando fluido dinámicamente el mayor número de turbinas con un error relativo inferior al 20 %. La selección del error relativo se consideró con base en la literatura especializada como un valor aceptable para la cabeza hidráulica en el modelado computacional en PAT [40], [70], [71], [72].

Como procedimiento, se evaluó cada modelo analítico propuesto, con el fin de verificar el error relativo obtenido con las PAT consultadas en la literatura. Como criterio de selección del mejor modelo, se tuvo en cuenta, en su orden, la cantidad proporcional de PAT en el rango permisible, el error relativo promedio y la desviación estándar. Posteriormente, se seleccionó el modelo final entre los candidatos destacados, con el fin de utilizarlo en las rutinas de optimización. Finalmente, se aclara que los gráficos que presenten error relativo negativo indican que la diferencia entre la cabeza experimental reportada por los artículos es inferior a la cabeza calculada. Por el contrario, cuando el error relativo es positivo, indica que la cabeza calculada es inferior a la cabeza experimental.

### 3.1.1 Modelo 1. Sin consideraciones previas

La Figura 3-1 presenta el gráfico de barras del error relativo de la cabeza hidráulica obtenida mediante la evaluación del modelo 1, que consideró seis parámetros geométricos ( $r_1, r_2, b_1, b_2, \beta_1, \beta_2$ ). Se detalla un total de 10 de los 28 ejemplares evaluados, que reportaron los parámetros. Se obtuvo un error relativo máximo de 48,55 % en la PAT P21, mientras que el error relativo mínimo fue de 0,32 % en la PAT P14. Al considerar un error relativo aceptable del 20 %, seis PAT están por debajo de la cifra mencionada. Finalmente, el error relativo promedio para esta evaluación fue del 18,15 %.

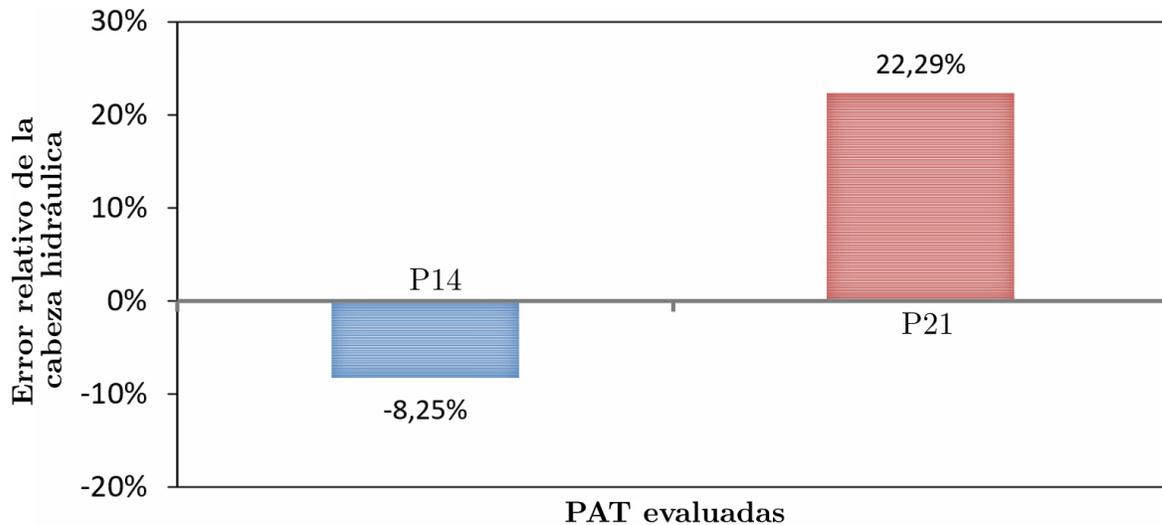
Figura 3-1: error relativo obtenido de la evaluación del modelo 1.



### 3.1.2 Modelo 2. Consideración del eje

La Figura 3-2 presenta el gráfico de barras del error relativo de la cabeza hidráulica obtenida mediante la evaluación del modelo 2, que consideró siete parámetros geométricos ( $r_1, r_2, r_{sh}, b_1, b_2, \beta_1, \beta_2$ ). Se detalla un total de 2 de los 28 ejemplares evaluados, que reportaron los parámetros. Se obtuvo un error relativo máximo de 22,29 % en la PAT P21, mientras que el error relativo mínimo fue de 8,25 % en la PAT P14. Al considerar un error relativo aceptable del 20 %, solo una PAT está por debajo de la cifra mencionada. Finalmente, el error relativo promedio para esta evaluación fue del 15,27 %.

**Figura 3-2:** error relativo obtenido de la evaluación del modelo 2.

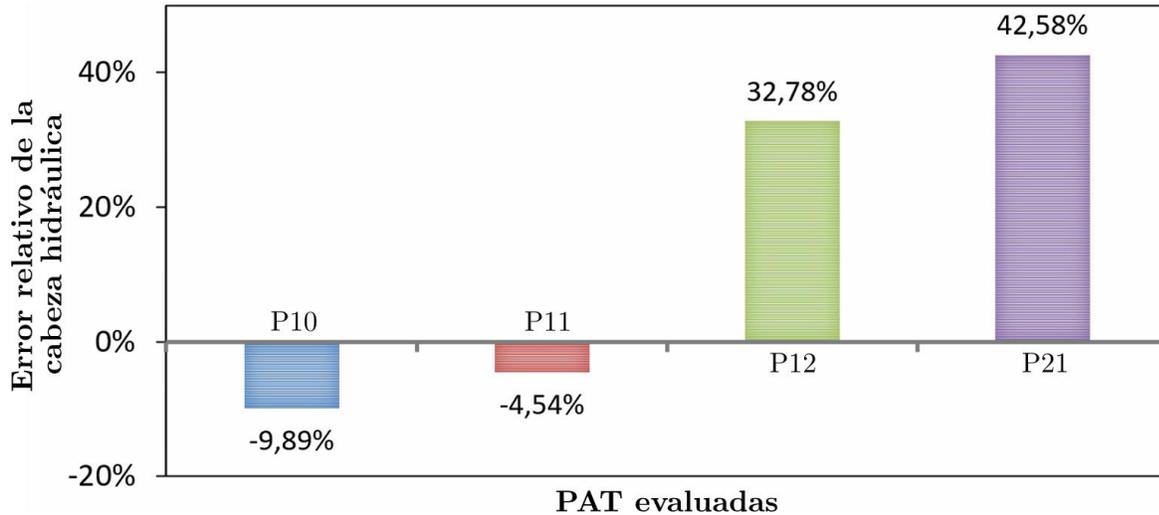


### 3.1.3 Modelo 3. Consideración del ángulo de succión del álabe

La Figura 3-3 presenta el gráfico de barras del error relativo de la cabeza hidráulica obtenida mediante la evaluación del modelo 3, que consideró siete parámetros geométricos ( $r_1, r_2, \lambda, b_1, b_2, \beta_1, \beta_2$ ). Se detalla un total de 4 de los 28 ejemplares evaluados, que reportaron los parámetros. Se obtuvo un error relativo máximo de 42,58 % en la PAT P21, mientras que el error relativo mínimo fue de 4,54 % en la PAT P11. Al considerar un error relativo aceptable del 20 %, solo una PAT está por debajo de la cifra mencionada.

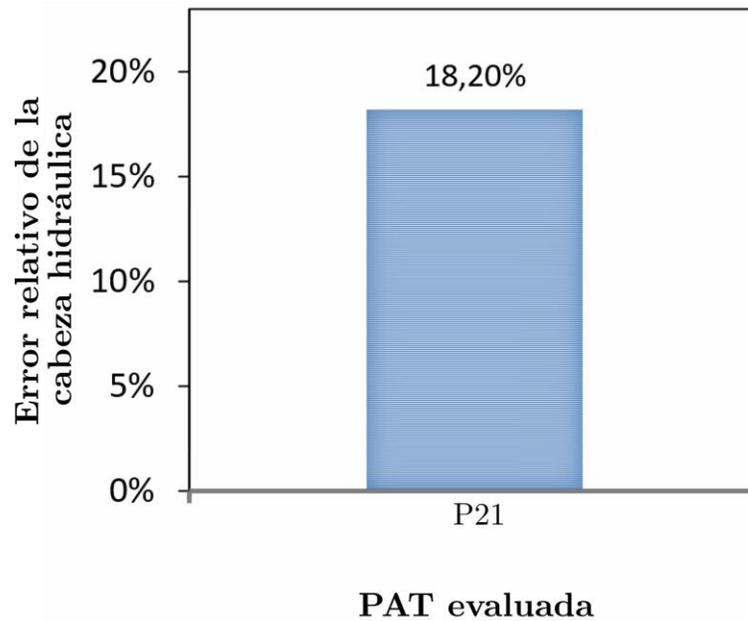
dos PAT están por debajo de la cifra mencionada. Finalmente, el error relativo promedio para esta evaluación fue del 22,45 %.

**Figura 3-3:** error relativo obtenido de la evaluación del modelo 3.



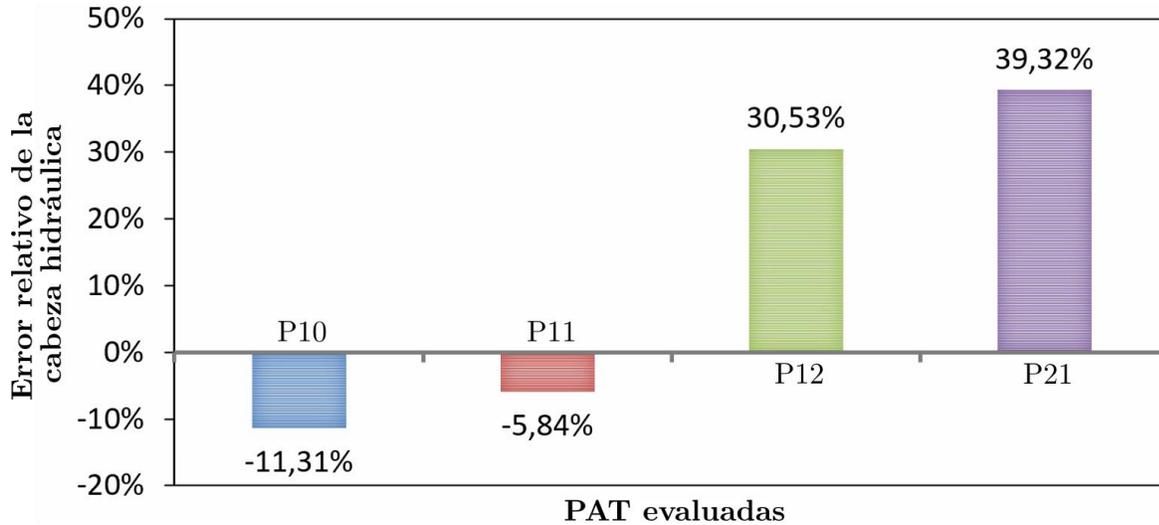
### 3.1.4 Modelo 4. Consideración del eje y espesor de los álabes

La Figura 3-4 presenta el gráfico de barras del error relativo de la cabeza hidráulica obtenida mediante la evaluación del modelo 4, que consideró nueve parámetros geométricos ( $r_1, r_2, r_{sh}, b_1, b_2, \beta_1, \beta_2, \delta, z$ ). Se detalla un total de 1 de los 28 ejemplares evaluados, que reportaron los parámetros. Se obtuvo un error relativo máximo de 18,20 % en la PAT P21. Al considerar un error relativo aceptable del 20 %, La PAT está por debajo de la cifra mencionada.

**Figura 3-4:** error relativo obtenido de la evaluación del modelo 4.

### 3.1.5 Modelo 5. Consideración del ángulo de succión y espesor de los álabes

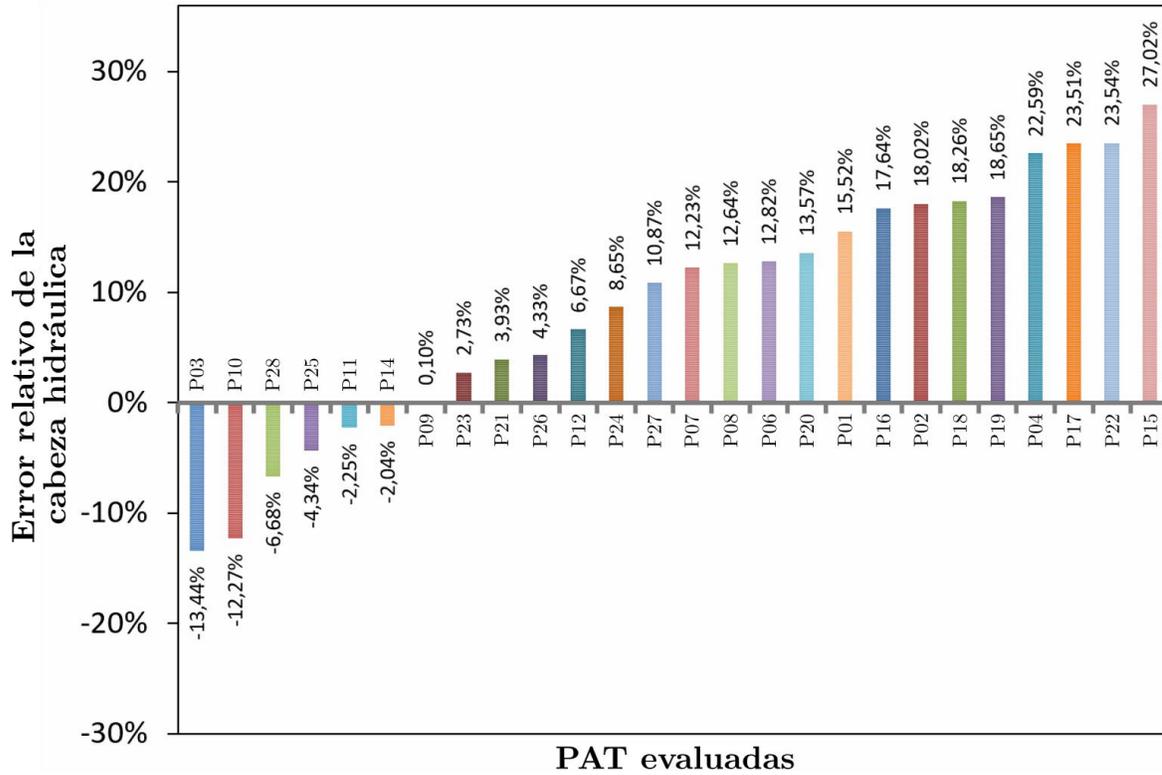
La Figura 3-5 presenta el gráfico de barras del error relativo de la cabeza hidráulica obtenida mediante la evaluación del modelo 5, que consideró nueve parámetros geométricos ( $r_1, r_2, \lambda, b_1, b_2, \beta_1, \beta_2, \delta, z$ ). Se detalla un total de 4 de los 28 ejemplares evaluados, que reportaron los parámetros. Se obtuvo un error relativo máximo de 39,32 % en la PAT P21, mientras que el error relativo mínimo fue de 5,84 % en la PAT P11. Al considerar un error relativo aceptable del 20 %, dos PAT están por debajo de la cifra mencionada. Finalmente, el error relativo promedio para esta evaluación fue del 21,75 %.

**Figura 3-5:** error relativo obtenido de la evaluación del modelo 5.

### 3.1.6 Modelo 6. Caudal como parámetro en la entrada

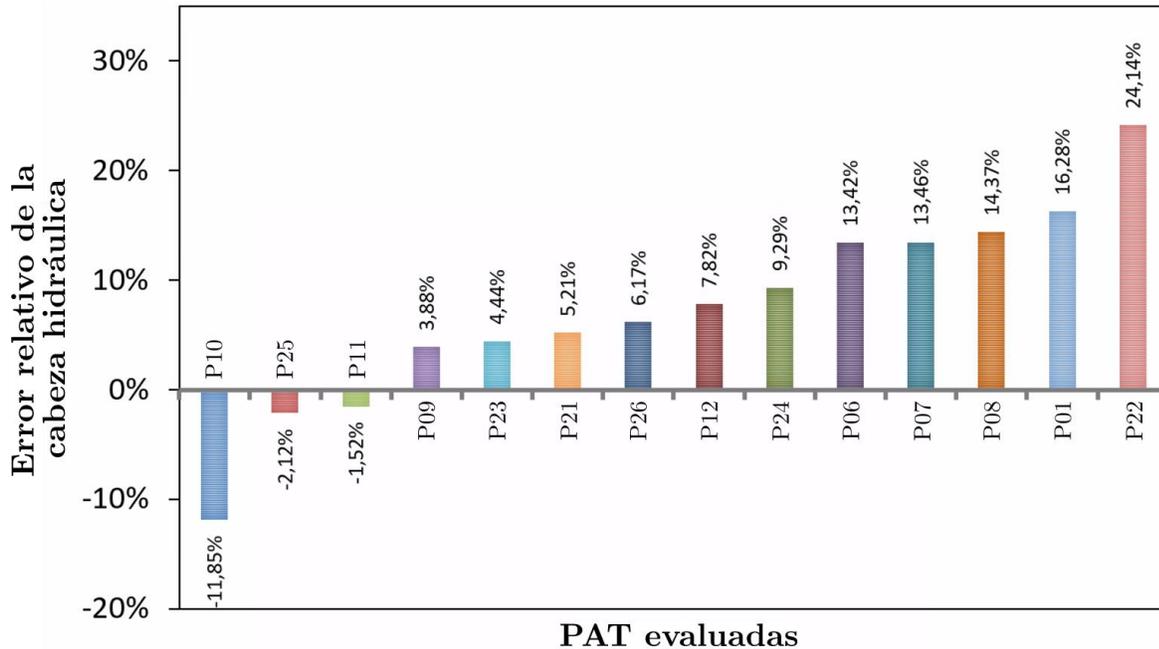
La Figura 3-6 presenta el gráfico de barras del error relativo de la cabeza hidráulica obtenida mediante la evaluación del modelo 6, que consideró tres parámetros geométricos ( $r_2, b_2, \beta_2$ ). Se detalla un total de 26 de los 28 ejemplares evaluados, que reportaron los parámetros. Se obtuvo un error relativo máximo de 27,02 % en la PAT P15, mientras que el error relativo mínimo fue de 0,10 % en la PAT P09. Al considerar un error aceptable relativo del 20 %, 22 PAT están por debajo de la cifra mencionada. Finalmente, el error relativo promedio para esta evaluación fue del 12,09 %.

**Figura 3-6:** error relativo obtenido de la evaluación del modelo 6.



### 3.1.7 Modelo 7. Caudal y espesor de los álabes

La Figura 3-7 presenta el gráfico de barras del error relativo de la cabeza hidráulica obtenida mediante la evaluación del modelo 7, que consideró cinco parámetros geométricos ( $r_2, b_2, \beta_2, \delta, z$ ). Se detalla un total de 14 de los 28 ejemplares evaluados, que reportaron los parámetros. Se obtuvo un error relativo máximo de 24,14 % en la PAT P22, mientras que el error relativo mínimo fue de 1,52 % en la PAT P11. Al considerar un error relativo aceptable del 20 %, 13 PAT están por debajo de la cifra mencionada. Finalmente, el error relativo promedio para esta evaluación fue del 9,57 %.

**Figura 3-7:** error relativo obtenido de la evaluación del modelo 7.

### 3.1.8 Selección del modelo analítico

La Tabla 3-1 presenta los modelos que tuvieron un mejor desempeño con base en los criterios de la cantidad proporcional de PAT en el rango permisible, el error relativo promedio y la desviación estándar. Con base en los resultados, se obtuvo lo siguiente:

- Rango permisible (<20 %):** el modelo 4 obtuvo el 100 % de PAT dentro del rango permisible, siendo en este caso para un ejemplar evaluado. Por su parte, el modelo 7 obtuvo una precisión del 92,86 % con 14 ejemplares y el modelo 6 con 84,62 % para 26 ejemplares. Por otra parte, el modelo 2, 3 y 5 obtuvieron un 50 % de las PAT dentro del rango, aunque estos modelos evaluaron entre dos y cuatro PAT.
- Error relativo promedio:** de los tres modelos que obtuvieron mejor rango permisible, el modelo 7 obtuvo el menor error relativo promedio, siendo de 9,57 %. Seguidamente, el

modelo 6 obtuvo un 12,09 %, mientras que el modelo 4, que fue el modelo mejor destacado del criterio anterior, obtuvo un error de 18,20 %. Por otra parte, el modelo 3 obtuvo el mayor error relativo promedio, siendo de 22,45 %, seguido del modelo 5 con un 21,75 %.

- **Desviación estándar:** el modelo 7 obtuvo la menor desviación estándar, siendo de 0,090 m, seguido del modelo 6 con 0,113 m. El modelo con mayor desviación estándar fue el modelo 3, con 0,263 m.

Con base en el análisis anterior, el modelo 6 y 7 destacaron respecto a los criterios de selección, mientras que el modelo 4 sólo destacó en el rango permisible. Adicionalmente, se puede mencionar que el modelo 3 obtuvo el menor desempeño con base en los criterios. Al comparar los modelos 6 y 7 respecto a los demás, se pudo notar que tienen una diferencia respecto a los datos de entrada: el modelo 6 y 7 consideraron el caudal en el BEP como variable, mientras que los demás modelos consideraron evaluaciones de la geometría. Lo anterior sugiere que los parámetros ubicados en la salida del impulsor de la PAT son sensibles respecto al cambio geométrico. Por otra parte, es posible que los modelos 4 y 5, que son los que mayor cantidad de parámetros geométricos aportaron, no obtuvieron un adecuado desempeño al considerar los parámetros de salida del impulsor. Por lo tanto, se recomienda un mayor desarrollo de los modelos 4 y 5 para estudios posteriores.

En resumen, el modelo 7 obtuvo el mejor desempeño con base en los criterios de error relativo promedio y desviación estándar. Por lo anterior, este modelo fue utilizado en las rutinas de optimización.

**Tabla 3-1:** estadísticas de los modelos con mejor desempeño.

Modelo	Parámetros Geométricos	PAT evaluadas	Error $\leq 20\%$	Error $\leq 10\%$	Error $\leq 5\%$	Desviación estándar (m)	Error relativo promedio (%)
M1	6	10	6	3	2	0,234	18,15
M2	7	2	1	1	0	0,216	15,27
M3	7	4	2	2	1	0,263	22,45
M4	9	1	1	0	0	-	18,20
M5	9	4	2	1	1	0,255	21,75
M6	3	26	22	10	7	0,113	12,09
M7	5	14	13	8	4	0,090	9,57

### 3.2 Optimización del perfil hidráulico

Para la optimización del perfil hidráulico, se consideró la maximización de la cabeza hidráulica, en lugar de minimizar la expresión. El criterio para la maximización se basó en la consulta del estado del arte, donde las variables geométricas investigadas en la sección de Modificaciones geométricas en impulsores radiales, se evidenció parámetros como el ancho del álabe en la entrada, el ángulo de entrada y el diámetro del impulsor, la eficiencia incrementaba con el aumento de la magnitud geométrica. Por otro lado, el objetivo de la presente investigación es el incremento de la eficiencia, en lugar de la minimización de la cabeza hidráulica. Seguidamente, los estudios consultados sobre la variación del número de álabes fueron determinantes para no considerar este parámetro en las iteraciones del algoritmo. Al realizar una prueba preliminar, los algoritmos tuvieron la tendencia de proporcionar el extremo límite, siendo de cuatro álabes en este caso. Al identificar que la reducción del número de álabes no aportaba en el aumento de la eficiencia, este parámetro se mantuvo constante en el proceso investigativo. Para que los algoritmos estuvieran en igualdad de condiciones, se estableció lo siguiente:

- Partículas: 100
- Iteraciones: 2.000
- Repeticiones del algoritmo: 1.000

Los parámetros del algoritmo (partículas, iteraciones y repeticiones) se analizaron de forma heurística, mediante ensayo de prueba y error. Se pudo identificar que, al incrementar el número de partículas e iteraciones, no hubo cambio significativo en la respuesta de los parámetros geométricos analizados del modelo 7 y la cabeza hidráulica.

Para el análisis de resultados, se consideró lo siguiente:

- Convergencia: mediante el análisis de la función objetivo, se verificó que los resultados obtenidos cumplieran con las restricciones establecidas y con el resultado esperado.
- Tiempo de procesamiento: tiempo que tardó en algoritmo en entregar la solución factible.
- Desviación estándar: dispersión del resultado de cada parámetro geométrico.

La Tabla 3-2 resume el promedio de los datos obtenidos en la evaluación de los algoritmos, comparado con los datos geométricos y de cabeza de la PAT modelada (P21). Como resultado, el VSA obtuvo un menor tiempo de procesamiento, con un promedio de repetición de 0,051 segundos, mientras que el algoritmo SSA tardó 3,31 veces más que el VSA. Seguidamente, el algoritmo SSA convergió respecto a los valores extremos seleccionados en las restricciones técnico operativas, mientras que el VSA obtuvo diferencias sutiles en los parámetros  $\beta_2$  y  $\delta$ . Finalmente, el PSO obtuvo los parámetros geométricos cercanos a los límites restringidos. Con respecto al resultado de la cabeza hidráulica, se obtuvo un error máximo de 6,10 % por parte del SSA, seguido del VSA con 6,07 % y el PSO de 6,00 %. La cabeza hidráulica obtuvo una diferencia máxima de 3,223 m respecto al valor experimental, mientras que se obtuvo una diferencia de 0,102 m entre los algoritmos SSA y PSO. Con base en el valor mínimo y máximo, obtenido mediante 1.000 repeticiones del algoritmo, el PSO presentó diferencias notables con los parámetros  $\beta_2$  y  $\delta$ , donde el valor mínimo y promedio hubo una diferencia relativa del 17,170% y 3,601%, mientras que, para los demás algoritmos, la diferencia fue menor al 1,58%. Finalmente, los tres algoritmos evaluados obtuvieron resultados acordes a lo esperado en la maximización de la cabeza hidráulica.

**Tabla 3-2:** resultados obtenidos en la evaluación del modelo 7.

Parámetro		P21	PSO	VSA	SSA
$r_2$ (mm)	Mínimo	-	86,043	86,110	86,110
	Promedio	84,5	86,079	86,110	86,110
	Máximo	-	86,110	86,110	86,110
$b_2$ (mm)	Mínimo	-	13,891	14,000	14,000
	Promedio	14	13,976	14,000	14,000
	Máximo	-	14,000	14,000	14,000
$\beta_2$ (°)	Mínimo	-	24,945	29,868	30,130
	Promedio	25	30,116	30,101	30,130
	Máximo	-	30,130	30,130	30,130
$\delta$ (mm)	Mínimo	-	3,400	3,400	3,400
	Promedio	3 - 3,5 *	3,527	3,407	3,400
	Máximo	-	3,596	3,461	3,400
$z(-)**$	-	6	6	6	6
Cabeza (m)	Mínimo	-	55,885	55,878	56,023
	Promedio	52,8	55,967	56,006	56,023
	Máximo	-	56,014	56,019	56,023
Error (%)	-	-	6,00	6,07	6,10
Tiempo una repetición (s)	-	-	0,064	0,051	0,215
Tiempo 1.000 repeticiones (s)	-	-	64,956	51,316	214,846

\*Espesor de 3 mm en el borde de ataque y 3,5 mm en el borde de salida.

\*\*El número de álabes se mantuvo constante en la evaluación de las rutinas de programación. La razón se debe a una respuesta preliminar obtenida, donde el algoritmo sugirió un valor mínimo de álabes. Sin embargo, en los estudios expuestos en las Modificaciones geométricas en impulsores radiales, dos estudios demostraron que tener un número bajo de álabes, la eficiencia disminuye.

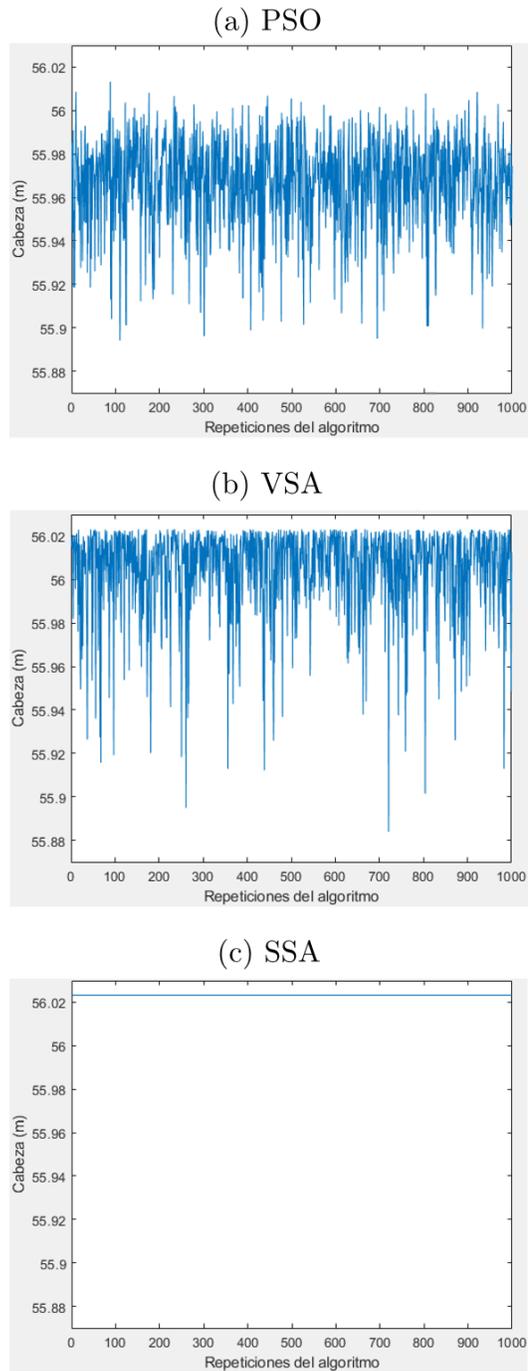
Con el fin de comparar los resultados registrados en la Tabla 3-2, la Tabla 3-3 presenta el análisis de la desviación estándar para las 1.000 repeticiones de las rutinas de programación. Se pudo observar en los resultados que el algoritmo SSA no obtuvo variación en el parámetro  $\beta_2$ , mientras que los demás parámetros estuvieron en el orden desde E-13. Seguidamente, el VSA tuvo variación mínima en los parámetros  $r_2$  y  $b_2$  en el orden de E-13 y E-14, respectivamente, mientras que  $\beta_2$  y  $\delta$  tuvieron una desviación estándar inferior a una unidad. En la misma línea, el PSO obtuvo, en general, variaciones en una unidad en los parámetros geométricos. Seguidamente, la cabeza tuvo una desviación estándar máxima de 0,152 m en el PSO, mientras que el SSA obtuvo la menor desviación estándar.

**Tabla 3-3:** desviación estándar para las 1.000 repeticiones de los algoritmos.

Parámetro	PSO	VSA	SSA
$r_2$ (mm)	0,187227	2,08E-13	2,08E-13
$b_2$ (mm)	0,127293	8,16E-14	8,33E-14
$\beta_2$ (°)	0,222969	0,044723	0
$\delta$ (mm)	0,05113	0,015185	1,48E-14
Cabeza (m)	0,152128	0,070713	1,92E-13

Finalmente, la Figura 3-8 muestra la comparación del cálculo de la cabeza hidráulica obtenida para las 1.000 repeticiones de los algoritmos de optimización. El rango normalizado para las gráficas en el eje Y estuvo entre 55,87, 56,03. Se puede observar que el gráfico obtenido con el PSO en (a) y VSA en (b), tuvo una oscilación similar, aunque más dispersa en el PSO, mientras que el VSA (c) se obtuvo convergencia en el mismo valor.

**Figura 3-8:** gráfico de comparación de la cabeza hidráulica obtenida para las repeticiones de los algoritmos de optimización



Aunque los algoritmos PSO y VSA presentaron mejor desempeño en el tiempo de ejecución y error en la cabeza hidráulica, y el SSA obtuvo una menor desviación estándar, fue necesario realizar la simulación numérica para verificar cuál de los tres algoritmos utilizados en la presente investigación incidió en el mayor incremento en la eficiencia hidráulica.

### **3.3 Validación numérica y fluido dinámica**

En esta sección, se exponen los resultados de las simulaciones numéricas y fluido dinámicas realizadas al impulsor original y optimizado mediante PSO.

#### **3.3.1 Validación numérica del perfil original**

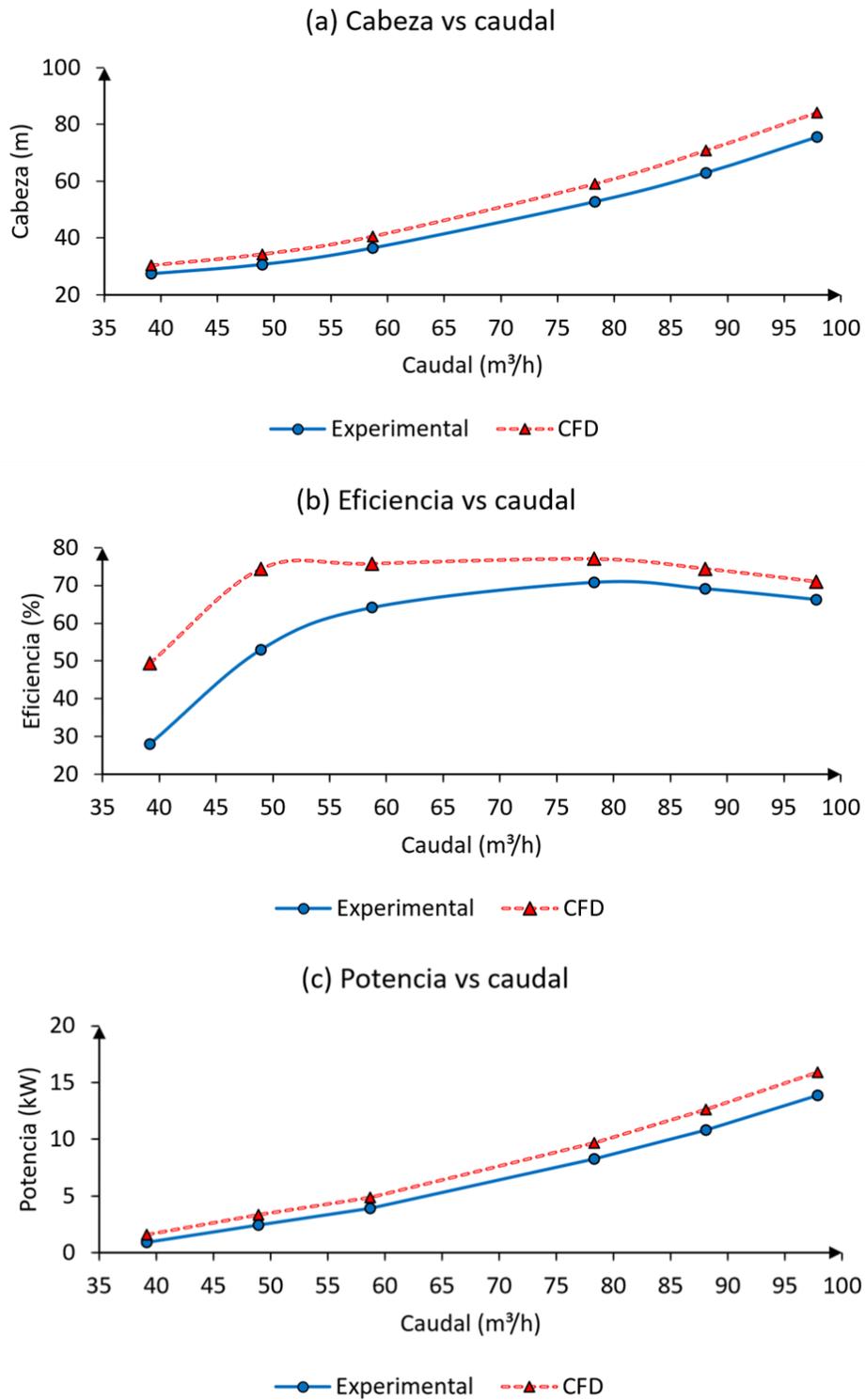
La Figura 3-9 presenta la validación del método numérico mediante la curva característica numérica y experimental de la simulación realizada con el impulsor base (P21). Se puede observar tres gráficas que relacionan las condiciones de operación, respecto al caudal. Seguidamente, se detallan dos curvas para cada gráfica: la curva azul hace referencia a los datos experimentales extraídos del artículo base de la PAT P21, mientras que la curva de color rojo es respecto a los resultados numéricos y CFD obtenidos con las expresiones de la sección de Ecuaciones de rendimiento en bombas.

Como resultado, la curva que relaciona a la cabeza con el caudal en (a) muestra tendencia creciente para los datos experimentales y CFD. Por otra parte, el error relativo en la cabeza se mantuvo relativamente constante, que osciló entre 10,731 % y 12,357 %, obteniendo un error en el BEP de 11,829 %. Aunque el análisis expuesto resultó en un error superior al 10 %, se pudo validar la misma tendencia hidráulica de los datos experimentales. Para el caso de la curva de eficiencia respecto al caudal en (b), hubo discrepancia respecto a las condiciones de carga parcial, obteniendo un error máximo de 76,606 % para el caudal mínimo evaluado y mínimo de 18,213 % para una condición de 60 m<sup>3</sup>/h. Sin embargo, a medida que se evaluaba puntos cercanos del BEP, se pudo notar que el

error estuvo por debajo del 10 %, siendo 8,811 % en el BEP. EN resumen, para las condiciones descritas, la eficiencia tuvo un comportamiento adecuado en el punto de análisis y condiciones de sobrecarga, mientras que, para la región de carga parcial, se obtuvo variaciones significativas.

Finalmente, la curva que relaciona la potencia con respecto al caudal en (c), mostró un comportamiento hidráulico similar al de la gráfica de la eficiencia hidráulica en (b). en la región de análisis del BEP y en condiciones de sobrecarga, se identificó un error relativo inferior al 20 %, mientras que, al operar con caudal de carga parcial, el error relativo fue similar al obtenido en la eficiencia hidráulica. La Tabla 3-4 registró los datos experimentales y CFD de los puntos analizados.

**Figura 3-9:** curva característica numérica y experimental de la PAT evaluada.



**Tabla 3-4:** comparación de datos experimentales y CFD de los puntos simulados.

Caudal (m <sup>3</sup> /h)	Cabeza Exp. (m)	Cabeza CFD (m)	Error relativo (%)	Eficiencia Exp. (%)	Eficiencia CFD (%)	Error relativo (%)
39,150	27,330	30,263	10,731	27,990	49,432	76,606
48,938	30,600	34,203	11,775	52,950	74,371	40,455
58,725	36,460	40,517	11,127	64,080	75,751	18,213
78,300	52,800	59,046	11,829	70,760	76,994	8,811
88,088	63,030	70,819	12,357	69,080	74,423	7,734
97,875	75,640	84,178	11,288	66,230	70,995	7,194

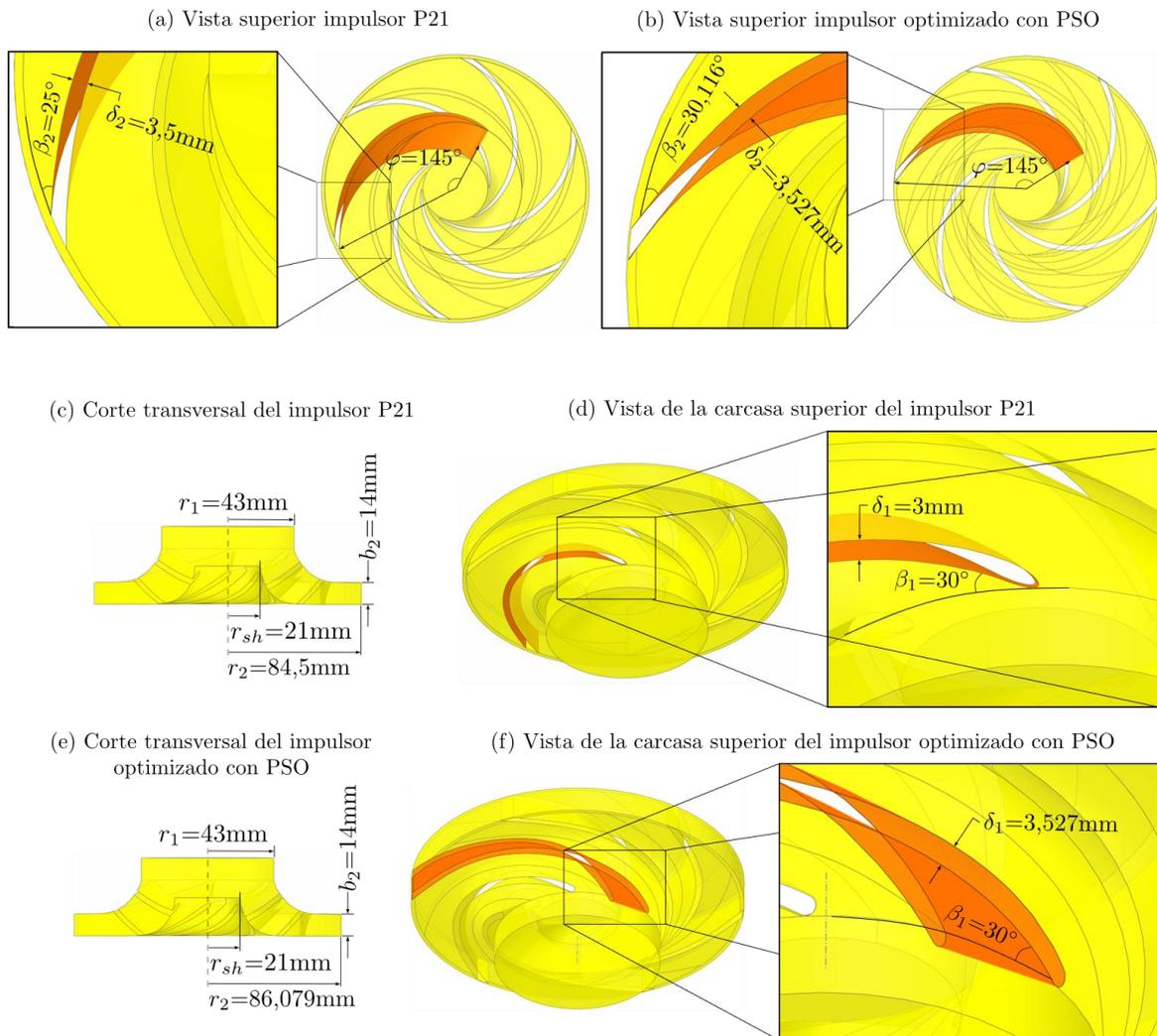
Como se mencionó previamente, el error relativo en la cabeza en la simulación numérica estuvo por debajo del 13 %, mientras que la eficiencia y potencia en carga parcial oscilaron entre 76 % y 18 %. También se pudo notar que, en el BEP, el error fue inferior al 10 %. En condiciones de sobrecarga, el error tuvo tendencia en disminuir para la eficiencia y estabilizarse en la cabeza hidráulica. Las causales del error relativo obtenido se debieron a lo siguiente:

- La ingeniería inversa aplicada para el modelado de los componentes de la PAT no incluyó la cámara superior e inferior, debido a la carencia de información.
- Simplificaciones realizadas en la geometría para la adaptación del volumen de control del impulsor a los parámetros analizados en los modelos analíticos.
- Calidad de la malla y consideraciones realizadas en la configuración de la simulación.
- Acople entre el impulsor y la voluta, sin considerar las cámaras superior e inferior.
- No se consideraron pérdidas mecánicas, además de componentes como sellos mecánicos, rodamientos, como lo reportado por Wang *et al.* [94], que obtuvieron un error inferior al 10 % en la simulación. Los autores Ismail *et al.* [81] obtuvieron un error relativo de 11,38 % en la eficiencia del BEP al comparar la curva experimental con respecto a la simulación realizada.

### 3.3.2 Validación numérica del impulsor optimizado

La Figura 3-10 expone la comparación de las modificaciones geométricas entre el impulsor P21 y el optimizado con PSO. Se puede visualizar la modificación de los parámetros  $\beta_2$  y  $\delta$  en la vista superior para el impulsor base (a) y el impulsor optimizado (b), mientras que la modificación del radio del impulsor se observa en la vista de corte transversal para el impulsor base (c) y el optimizado (d). Finalmente, se presenta el espesor del álabe en el borde de salida, con base en la vista de la carcasa superior para el impulsor base (d) y para el optimizado (f).

**Figura 3-10:** comparación modificaciones geométricas entre impulsor P21 y optimizado con PSO.



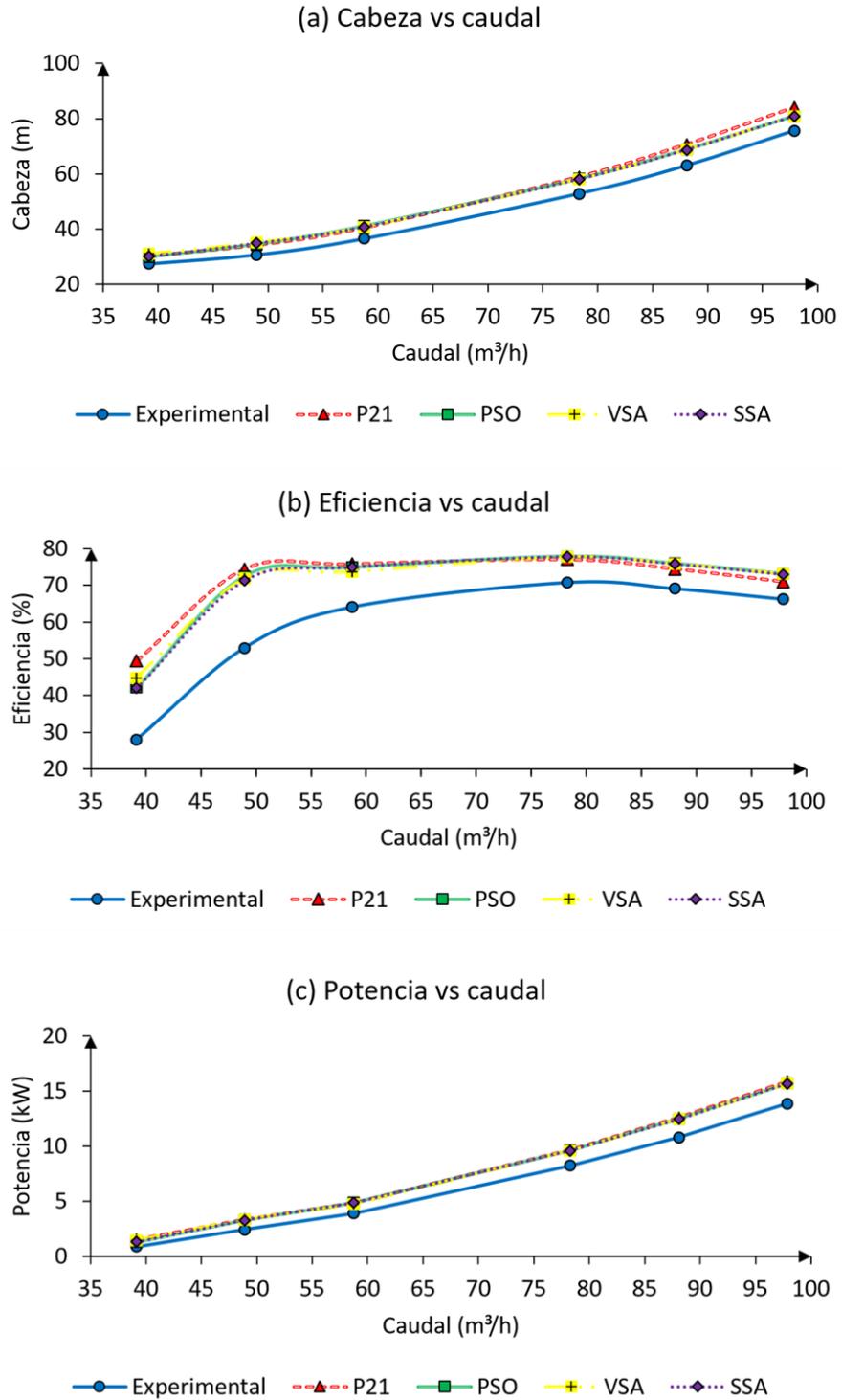
---

La Figura 3-11 presenta los resultados numéricos de la validación del método numérico de optimización de PSO, VSA y SSA, respecto a la curva P21 (simulación CFD) y experimental de la PAT base. Se puede observar tres gráficas que relacionan las condiciones de operación, respecto al caudal. Seguidamente, se detallan cinco curvas para cada gráfica: la curva azul hace referencia a los datos experimentales extraídos del artículo base, mientras que la curva de color rojo es la validación (P21). Las curvas restantes son las resultantes de los métodos de optimización mediante PSO (verde), VSA (amarillo) y SSA (violeta).

Como resultado, la curva que relaciona a la cabeza con el caudal en (a) muestra tendencia similar de los analizados en los algoritmos respecto a la P21. Por otra parte, al realizar la comparación entre las simulaciones, se observó una diferencia máxima de 3,941 % para el caso del SSA en condición de sobrecarga, además de obtener variaciones positivas y negativas que determinaron que las curvas estuvieron por encima y debajo de la P21, respectivamente. Para el caso de la curva de eficiencia respecto al caudal en (b), hubo discrepancia respecto al primer punto en la condición de carga parcial, donde se encontró una diferencia de 14,962 % que indicó que la eficiencia estuvo por debajo de la P21. Sin embargo, la eficiencia incrementó a partir de la condición en el BEP, con un máximo de 1,112 % para el PSO, mientras que, para las condiciones de sobrecarga, la eficiencia hidráulica incrementó hasta 2,996 % para el mismo algoritmo. Para las condiciones descritas, la eficiencia fue inferior en condiciones de carga parcial, mientras que, para condiciones en el BEP y sobrecarga, se evidenció un incremento. Finalmente, la curva que relaciona la potencia con respecto al caudal en (c), mostró un comportamiento hidráulico similar al de la gráfica de la eficiencia hidráulica en (a).

En resumen, mediante los impulsores optimizados, se identificó que la eficiencia se incrementó en el BEP y condiciones de sobrecarga. En la Tabla 3-5, Tabla 3-6 y Tabla 3-7 se registraron los datos obtenidos en la simulación numérica y comparación con la curva P21 para los algoritmos PSO, VSA y SSA, respectivamente, donde el caudal se registró como  $Q/Q_{BEP}$ , donde 1 es el caudal en el BEP.

**Figura 3-11:** curva característica numérica de los datos experimentales, P21, y algoritmos PSO, VSA y SSA.



**Tabla 3-5:** resultados numéricos obtenidos mediante la optimización del impulsor con PSO.

$Q/Q_{BEP}$	Cabeza	Cabeza	Diferencia	Eficiencia	Eficiencia	Diferencia
	P21 (m)	PSO (m)	(%)	P21 (%)	PSO (%)	relativa (%)
0,5	30,263	29,937	-1,076	49,432	42,211	-14,608
0,625	34,203	34,478	0,804	74,371	72,421	-2,621
0,75	40,517	41,043	1,300	75,751	74,864	-1,172
<b>1</b>	<b>59,046</b>	<b>58,186</b>	<b>-1,456</b>	<b>76,994</b>	<b>77,851</b>	<b>1,112</b>
1,125	70,819	68,790	-2,865	74,423	75,905	1,992
1,25	84,178	80,878	-3,920	70,995	73,122	2,996

**Tabla 3-6:** resultados numéricos obtenidos mediante la optimización del impulsor con VSA.

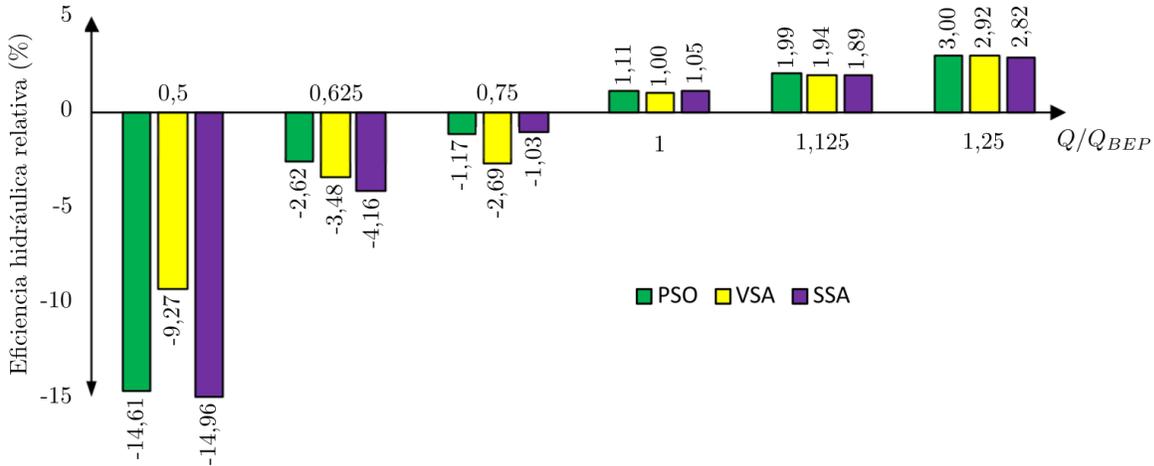
$Q/Q_{BEP}$	Cabeza	Cabeza	Diferencia	Eficiencia	Eficiencia	Diferencia
	P21 (m)	VSA (m)	(%)	P21 (%)	VSA (%)	relativa (%)
0,5	30,263	30,938	2,230	49,432	44,851	-9,267
0,625	34,203	35,024	2,399	74,371	71,786	-3,475
0,75	40,517	40,680	0,403	75,751	73,714	-2,690
<b>1</b>	<b>59,046</b>	<b>58,051</b>	<b>-1,685</b>	<b>76,994</b>	<b>77,763</b>	<b>0,999</b>
1,125	70,819	68,695	-2,999	74,423	75,864	1,937
1,25	84,178	80,850	-3,953	70,995	73,070	2,923

**Tabla 3-7:** resultados numéricos obtenidos mediante la optimización del impulsor con SSA.

$Q/Q_{BEP}$	Cabeza	Cabeza SSA	Diferencia	Eficiencia	Eficiencia	Diferencia
	P21 (m)	(m)	(%)	P21 (%)	SSA (%)	relativa (%)
0,5	30,263	29,994	-0,887	49,432	42,036	-14,962
0,625	34,203	34,798	1,740	74,371	71,275	-4,162
0,75	40,517	40,776	0,639	75,751	74,974	-1,026
<b>1</b>	<b>59,046</b>	<b>58,056</b>	<b>-1,677</b>	<b>76,994</b>	<b>77,802</b>	<b>1,049</b>
1,125	70,819	68,690	-3,006	74,423	75,832	1,893
1,25	84,178	80,861	-3,941	70,995	72,996	2,819

La Figura 3-12 expone la variación de la eficiencia hidráulica relativa, respecto a la simulación P21 (CFD). Se pueden observar gráficos de barras de color verde, amarillo y violeta para los algoritmos PSO, VSA y SSA, respectivamente. El gráfico relaciona el cambio relativo de la eficiencia hidráulica con la relación del caudal en los puntos simulados en las secciones 3.3.1 y 3.3.2, respecto al caudal en el BEP de 78,3 m<sup>3</sup>/h. En general, se puede observar una tendencia de incremento de la eficiencia desde la condición de carga parcial hasta sobrecarga. En análisis, se pudo observar que, para condiciones de carga parcial en 0,5, la eficiencia disminuyó hasta un 14,96 % para el impulsor parametrizado con los resultados del SSA, mientras que, al aumentar el caudal hasta la relación de 0,75, la reducción de la eficiencia fue hasta 1,03 % para el caso del SSA. A partir de la condición en el BEP, se evidenció un incremento de la eficiencia de máximo 1,11 % para el impulsor modelado mediante los datos obtenidos con PSO, por lo que este método de optimización permitió incrementar la eficiencia de 76,994 % hasta 77,851 %, siendo el valor máximo obtenido en este estudio. Seguidamente, el SSA incrementó un 1,05 %, llegando hasta 77,802 %, mientras que el VSA incrementó hasta en 1,00 %, culminando en 77,763 %. Adicional a los resultados con el PSO, la PAT requirió menor cabeza hidráulica, con una reducción de 1,456 %, desde 59,046 m a 58,186 m, mientras que la potencia hidráulica generada sólo disminuyó un 0,39 %, pasando de 9,668 kW a 9,630 kW. La reducción porcentual de la potencia en el BEP se compensó con la reducción aún mayor de la cabeza hidráulica, razón por la que la eficiencia hidráulica incrementó.

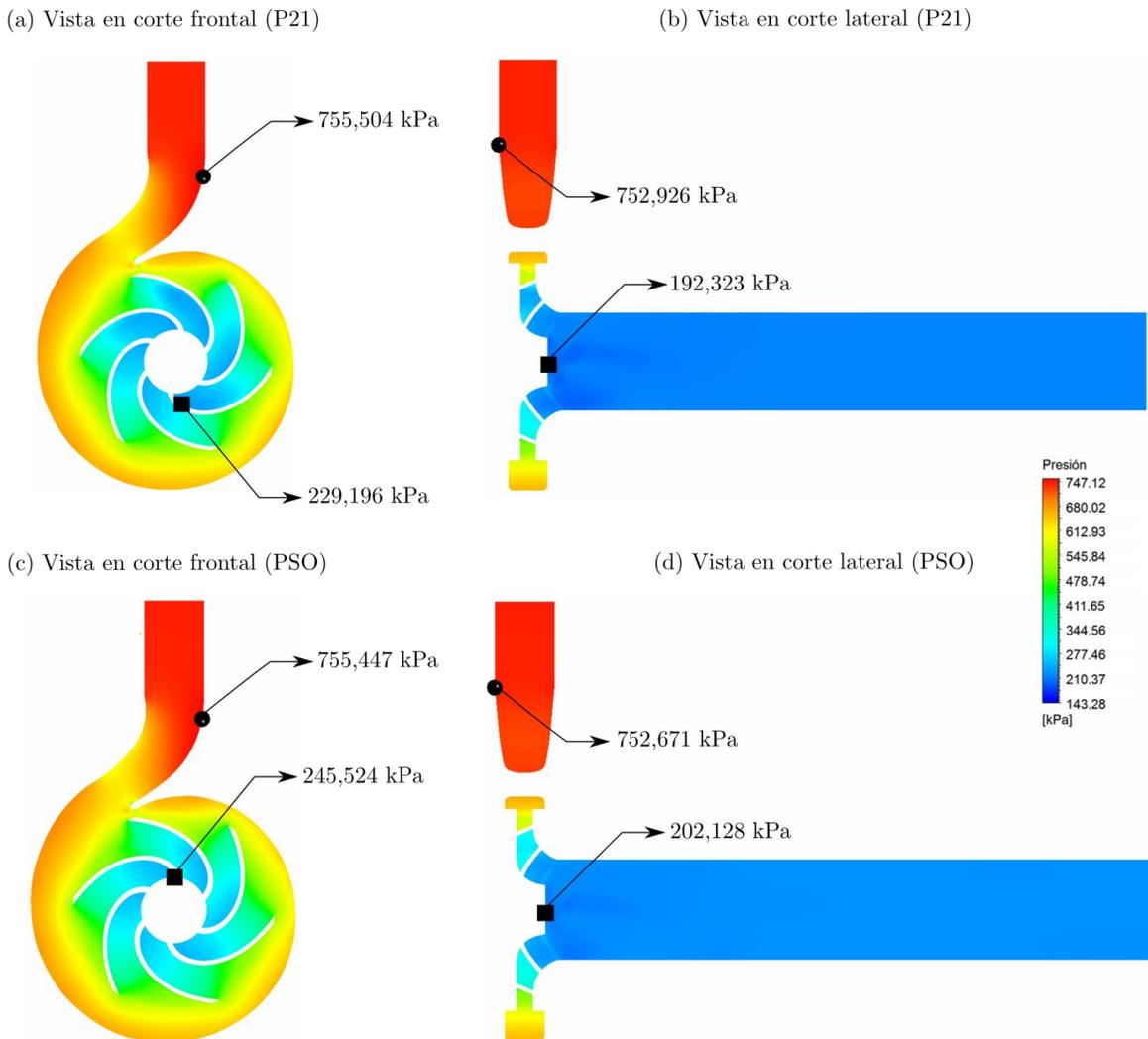
En condiciones de sobrecarga, la eficiencia incrementó aún más para condición de caudal de 1,25, donde tuvo un máximo de 3,00 % con el impulsor de PSO. Sin embargo, la eficiencia hidráulica en la validación de P21 fue de 70,995 % y la mejorada de 73,122 %, siendo inferior a la obtenida en el BEP. Finalmente, se concluye que, aunque los tres métodos de optimización ayudaron al incremento de la eficiencia de la PAT, el impulsor simulado mediante los resultados obtenidos con el algoritmo PSO, permitió un mayor incremento de la eficiencia hidráulica en el BEP, siendo del 1,11 %.

**Figura 3-12:** variación de la eficiencia hidráulica relativa, respecto a la simulación de P21.

### 3.3.3 Comparación fluido dinámica entre el impulsor P21 y el optimizado con PSO

Los resultados numéricos de la PAT indicaron de forma cuantitativa las condiciones de operación para conocer el comportamiento del sistema. Como complemento, la representación de los contornos de presión y velocidad, permitieron observar en detalle el comportamiento de la turbomáquina al interior, detallando los fenómenos físicos que interactúan en el sistema. La Figura 3-13 muestra los contornos de presión del impulsor base y optimizado mediante PSO, en el BEP. En (a) se observa la vista en corte frontal y en (b) la vista en corte lateral para el modelo P21, mientras que (c) y (d) se exponen para el impulsor optimizado con PSO. La presión se encuentra en el rango de 143,28 kPa y 747,12 kPa. En la entrada, la presión ingresa con un valor máximo de 755,504 kPa para el P21 en (a) y 755,447 kPa para el PSO en (c), localizada en la voluta de la vista de corte frontal, y disminuye hasta un mínimo de 192,323 kPa para P21 en (b) y 202,128 kPa para el PSO en (d), ambos puntos en el impulsor. De este modo, la energía de presión se transformó en energía rotacional y posteriormente en energía mecánica para la generación de la potencia hidráulica.

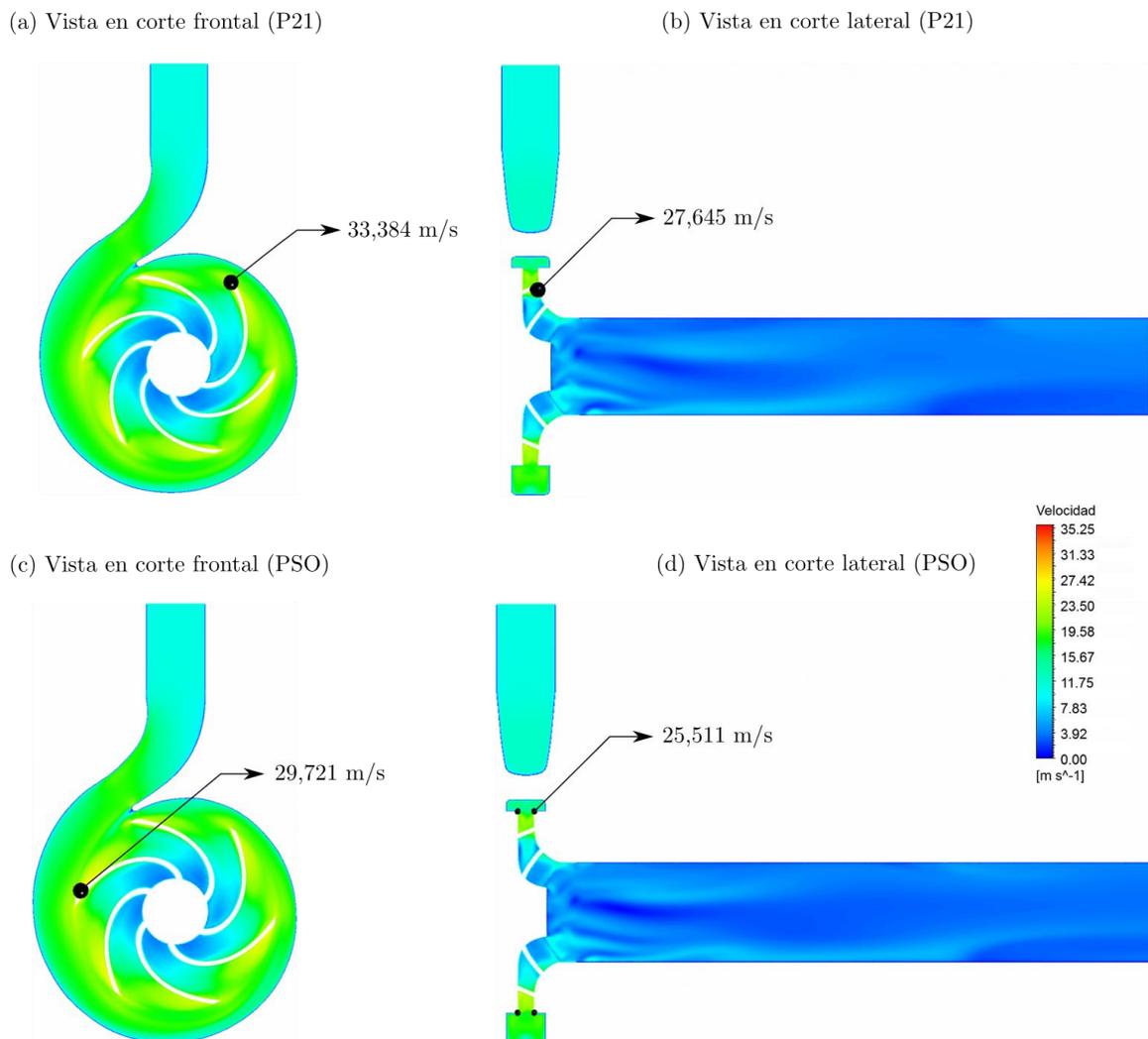
**Figura 3-13:** contornos de presión de la PAT con el impulsor base (P21) y el PSO, en el BEP.



La Figura 3-14 muestra los contornos de velocidad del impulsor base y optimizado con PSO, en el BEP. En (a) se observa la vista en corte frontal y en (b) la vista en corte lateral para el modelo P21, mientras que (c) y (d) se exponen para el impulsor optimizado con PSO. La velocidad se encuentra en el rango de 0 m/s y 35,25 m/s. Para la simulación P21, la velocidad máxima se alcanza en el borde de ataque, donde se tiene una magnitud de 33,384 m/s visible en (a), mientras en la vista de corte lateral en (b), se obtuvo un máximo de 27,645 m/s. Por otra parte, para el impulsor optimizado, la velocidad máxima es inferior, siendo de un valor máximo de 29,721 m/s en el borde de ataque de (c) y de 25,511 m/s visible en la vista en corte lateral en (d). La velocidad promedio obtenida en la simulación P21 fue de 15,731 m/s y 7,372 m/s para a vista en (a) y (b), mientras que

para la simulación aplicando los parámetros geométricos resultantes del algoritmo PSO fue de 15,611 m/s y 5,235 m/s para (c) y (d), respectivamente. En comparación con la velocidad promedio, el impulsor optimizado tuvo una reducción de 0,76 % y 27,61 % para la vista frontal y lateral, respectivamente. De este modo, la energía cinética se transformó en energía mecánica rotacional que permitió la generación de la potencia hidráulica.

**Figura 3-14:** contornos de velocidad de la PAT con el impulsor base (P21) y el PSO, en el BEP.

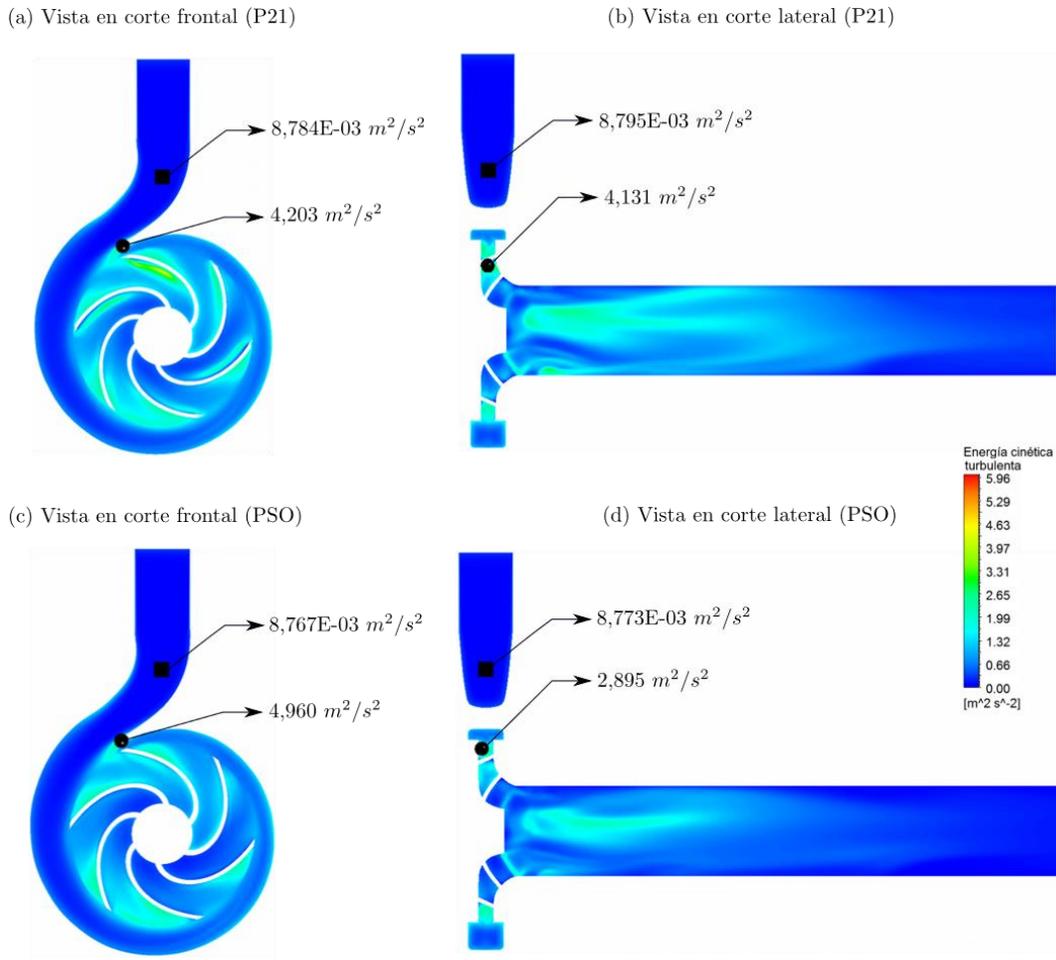


La Figura 3-15 muestra los contornos de energía cinética turbulenta del impulsor base y optimizado mediante PSO, en el BEP. En (a) se observa la vista en corte frontal y en (b) la vista en corte lateral

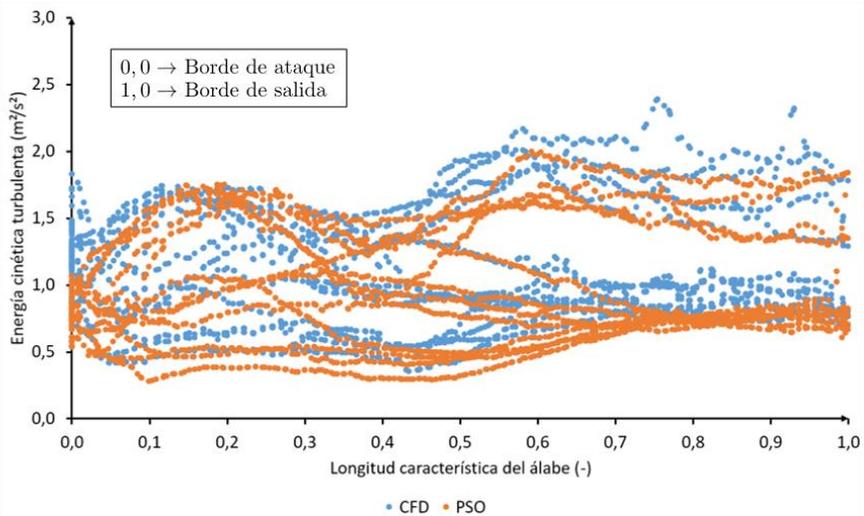
para el modelo P21, mientras que (c) y (d) se exponen para el impulsor optimizado con PSO. Adicionalmente, en (e) se muestra el gráfico de puntos de dispersión de la energía cinética turbulenta en los álabes, entre el borde de ataque (en cero) y el borde de salida (en uno). La energía cinética turbulenta se encuentra en el rango de  $0 \text{ m}^2/\text{s}^2$  y  $5,960 \text{ m}^2/\text{s}^2$ . La menor energía disipada se localizó en la entrada de la voluta, donde se obtuvo valores cercanos a  $9\text{E-}03 \text{ m}^2/\text{s}^2$ . Por otra parte, para la vista frontal de ambas simulaciones, en (a) y (c), la mayor disipación de la energía cinética turbulenta se localizó en la región de la garganta de la voluta, obteniendo valores de  $4,203 \text{ m}^2/\text{s}^2$  y  $4,960 \text{ m}^2/\text{s}^2$ , respectivamente. Seguidamente, para la vista lateral en (b) y (d), la mayor energía cinética turbulenta disipada se localizó en el borde de ataque, con valores registrados de  $4,131 \text{ m}^2/\text{s}^2$  y  $2,895 \text{ m}^2/\text{s}^2$ , respectivamente. En la misma línea, se observa que la energía cinética turbulenta se presenta en mayor medida en el impulsor y la tubería de salida.

En la gráfica de puntos de dispersión expuesta en (e), se muestra la energía cinética turbulenta disipada en los seis álabes, desde el borde de ataque en la coordenada 0,0, hasta el borde de salida en la coordenada 1,0. Se puede apreciar dos grupos de puntos dispersos, diferenciados con el color azul para la validación P21 y color naranja para el impulsor optimizado con PSO. Se puede notar de forma cualitativa que la simulación llevada a cabo con el impulsor optimizado generó menor energía cinética turbulenta en comparación con la validación P21 del impulsor base. Lo anterior explica que, al generar menor energía cinética turbulenta, el impulsor tiende a convertir mayor cantidad de energía en trabajo mecánico.

**Figura 3-15:** energía cinética turbulenta con el impulsor base (P21) y el PSO, en el BEP.



(e) Energía cinética turbulenta formada en los álabes



De forma cuantitativa, y con base en la Figura 3-15 (e), la Tabla 3-8 expone la energía cinética turbulenta promedio disipada en los tres dominios más significantes de la PAT, para cada simulación realizada en el BEP. La tubería de entrada no tuvo efecto significativo en la energía cinética turbulenta, debido que el promedio fue inferior a  $0,010 \text{ m}^2/\text{s}^2$ . En la voluta, se puede observar que la disipación de energía cinética turbulenta es inferior con el proceso de optimización, obteniendo una disminución de 1,67 % del VSA, respecto a la simulación P21. Para el caso del impulsor optimizado con PSO, la diferencia fue de 0,15 %. Seguidamente, en el impulsor hubo una reducción significativa de la energía cinética turbulenta disipada: 11,46 % con el SSA, 11,09 % con el PSO y 10,53 % con el VSA, siendo la simulación realizada con el impulsor optimizado con SSA el que menor energía disipó en promedio. Sin embargo, respecto a la tubería de salida, el modelo con PSO obtuvo la menor reducción, con un 35,93 %, seguido del VSA con 34,78 %. Por su parte, el modelo SSA obtuvo la menor reducción, siendo de 5,77 %. Este último aspecto fue lo que pudo ser decisivo para que el modelo realizado con los parámetros del PSO sea el más eficiente, en comparación con los modelos desarrollados con los parámetros obtenidos con el VSA y SSA. Finalmente, se registró la sumatoria de los promedios obtenidos, con el fin de comparar la energía cinética turbulenta disipada de los tres dominios en conjunto. Se pudo evidenciar que la optimización del impulsor mediante PSO obtuvo una menor energía cinética turbulenta disipada, mientras que el método SSA fue el mayor de los tres métodos. Sin embargo, es inferior respecto al P21.

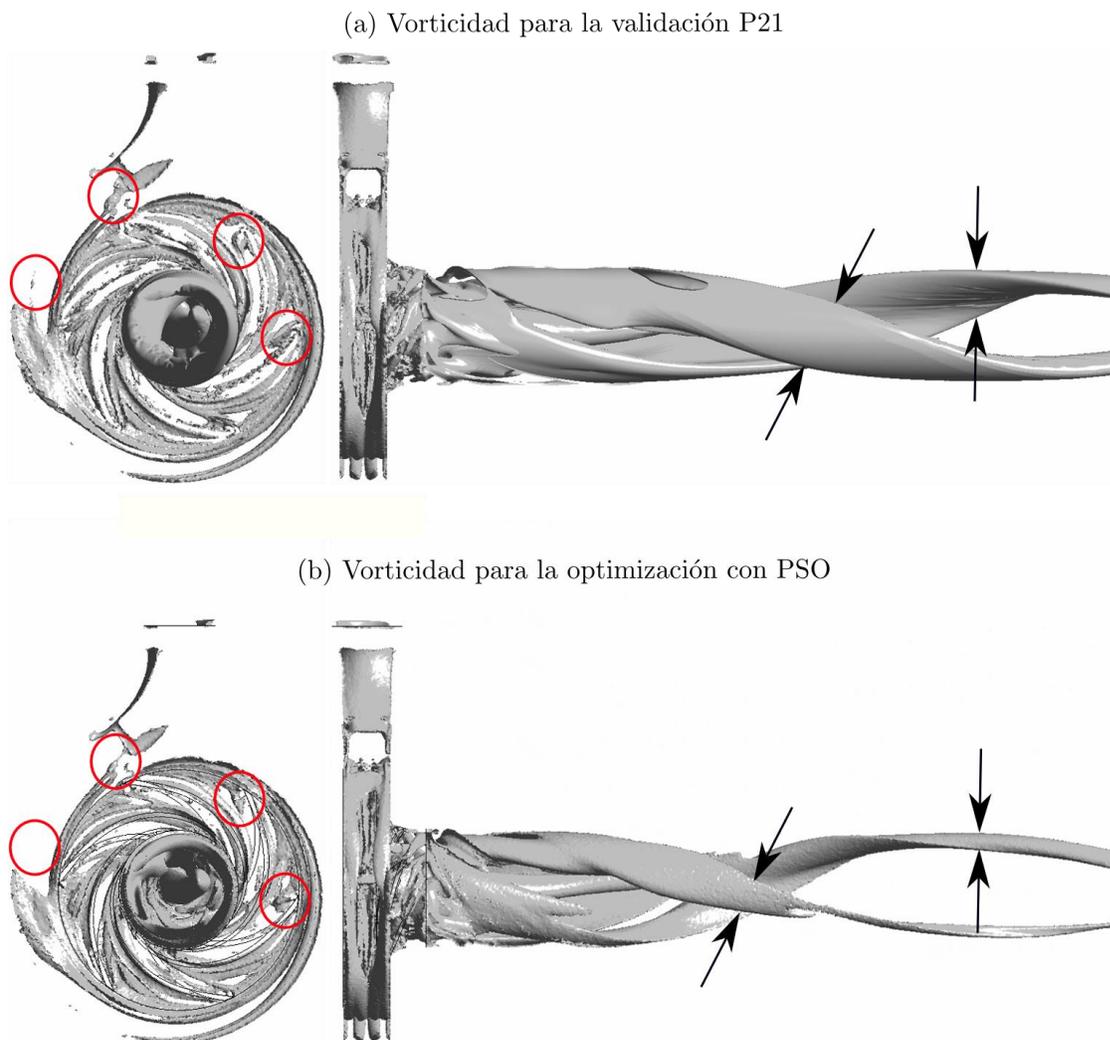
**Tabla 3-8:** energía cinética turbulenta promedio disipada en los dominios, respecto al BEP de cada simulación, en  $\text{m}^2/\text{s}^2$ .

Dominio	P21	PSO	VSA	SSA
Voluta	0,658	0,657	0,647	0,656
Impulsor	1,073	0,954	0,960	0,950
Tubería de salida	0,693	0,444	0,452	0,651
Sumatoria	2,424	2,055	2,059	2,257

Por último, Figura 3-16 presenta la comparación de la vorticidad formada mediante la simulación P21 y el modelo optimizado con PSO. Lo expuesto en la figura hace referencia a la isosuperficie

representada mediante la velocidad invariante ( $Q$ ), seleccionada para  $10.000/s^2$ . Se puede detallar dos vistas: frontal y de perfil. En comparación, la vista de perfil muestra tres regiones encerradas con círculos rojos, que compara de forma cualitativa los vórtices de ambas simulaciones, siendo de menor formación los obtenidos mediante la optimización con PSO. Por otra parte, la vista lateral expone la diferencia en el tamaño de los vórtices que se generaron en la tubería de salida, que está relativamente acorde a lo reportado en la Tabla 3-8, donde la simulación P21 posee un promedio de  $0,693 \text{ m}^2/s^2$ , mientras que la optimización con PSO fue de  $0,444 \text{ m}^2/s^2$ .

**Figura 3-16:** vorticidad formada en la PAT con el impulsor base (P21) y el PSO.



Con base en las simulaciones y posterior verificación del incremento de la eficiencia hidráulica, se concluyó el desarrollo del cuarto objetivo de la presente investigación.

## 4. Conclusiones y recomendaciones

### 4.1 Conclusiones

Se identificaron 11 componentes geométricos del impulsor de la PAT que pueden incidir en su eficiencia. Los parámetros geométricos para la aplicación en los modelos analíticos fueron los siguientes: ángulo de entrada del álabe ( $\beta_1$ ), ángulo de salida del álabe ( $\beta_2$ ), ángulo de envolvimiento del álabe ( $\varphi$ ), espesor del álabe ( $\delta$ ), radio de eje del impulsor ( $r_{sh}$ ), radio de entrada del impulsor ( $r_1$ ), radio de salida del impulsor ( $r_2$ ), ancho de entrada del álabe ( $b_1$ ), ancho de salida del álabe ( $b_2$ ), ángulo de succión del álabe ( $\lambda$ ) y el número de álabes ( $z$ )

Se propusieron siete modelos analíticos que representan la cabeza hidráulica de una bomba centrífuga operada como turbina, considerando la evaluación de la eficiencia hidráulica y el conjunto de restricciones técnico operativas. De las 28 PAT consultadas en la literatura para evaluar los modelos analíticos, se utilizaron 14 en el Modelo 7, el cual, obtuvo un destacable desempeño en el rango permisible inferior al 20 % de error relativo en la cabeza hidráulica, con una precisión de 92,86 % de las PAT evaluadas, mientras que fue el mejor en el criterio del menor error relativo promedio, con 9,57 %, y menor desviación estándar, con 0,090 m. Finalmente, el modelo 7 siete consideró la aplicación de cuatro parámetros geométricos de los 11 propuestos, en los que se encontraron el radio de salida del impulsor ( $r_2$ ), ancho de salida del álabe ( $b_2$ ), ángulo de salida del álabe ( $\beta_2$ ) y espesor del álabe ( $\delta$ ). Adicionalmente, el número de álabes ( $z$ ) se mantuvo constante y se consideró el caudal en el BEP en lugar de los parámetros de descarga del impulsor.

Se propusieron tres estrategias de solución basada en algoritmos de optimización que permitieron resolver el modelo analítico propuesto para la PAT respetando el conjunto de restricciones técnico operativas asociadas a esta. Se utilizaron tres algoritmos de optimización: PSO, VSA y SSA, que se simularon con 100 partículas, 2.000 iteraciones y 1.000 repeticiones del programa. El PSO obtuvo el menor error relativo respecto a la cabeza experimental, siendo de 6,00 % y 64,956 segundos para las 1.000 iteraciones. Por otra parte, el algoritmo SSA obtuvo el mayor tiempo de ejecución para las 1.000 repeticiones siendo de 214,846 segundos, mientras que el menor tiempo de ejecución fue del VSA, con 51,316 segundos. Se concluye que el algoritmo PSO entregó los resultados acordes con el mayor aumento de la eficiencia y menor tiempo de ejecución, mientras que el VSA fue el

que menor tiempo tardó en las 1.000 repeticiones. Por último, el SSA obtuvo el mayor tiempo de ejecución y mayor error relativo en la cabeza hidráulica calculada, con 6,10 %.

Se validó la eficiencia de la solución optimizada, mediante simulación numérica. Se identificó que la optimización con PSO permitió obtener un impulsor con mayor eficiencia, que mejoró la eficiencia de 76,994 % a 77,851 %, incrementó un 1,112 %. Además, se demostró que el impulsor redujo la energía cinética turbulenta un 11,09 % respecto al impulsor P21. Por último, se evidenció de forma cualitativa que el proceso de optimización permitió la reducción de vórtices en el dominio del impulsor y la tubería de salida.

El presente trabajo mejoró la eficiencia hidráulica de una PAT en un 1,112 %, mediante la modificación de la geometría del impulsor, empleando un modelo analítico que utilizó cuatro parámetros. Para lograr la mejora en la eficiencia hidráulica, el método de optimización PSO demostró ser el algoritmo adecuado para esta aplicación. La validación de los resultados se llevó a cabo mediante el análisis de contornos de presión, velocidad, energía cinética turbulenta y vorticidad, confirmando así la mejora en el comportamiento fluido dinámico de la PAT.

## **4.2 Recomendaciones**

Se recomienda la evaluación de los modelos 4 y 5, que tienen la mayor cantidad de parámetros geométricos aportados en el modelado analítico. Lo anterior, debido que no obtuvieron un adecuado desempeño al considerar los parámetros de salida del impulsor.

# Bibliografía

- [1] G. Tiwari, J. Kumar, V. Prasad, and V. K. Patel, "Utility of CFD in the design and performance analysis of hydraulic turbines — A review," *Energy Reports*, vol. 6. Elsevier Ltd, pp. 2410–2429, Nov. 01, 2020. doi: 10.1016/j.egy.2020.09.004.
- [2] J. W. Day *et al.*, "The Energy Pillars of Society: Perverse Interactions of Human Resource Use, the Economy, and Environmental Degradation," *BioPhysical Economics and Resource Quality*, vol. 3, no. 1, Mar. 2018, doi: 10.1007/s41247-018-0035-6.
- [3] J. Pinkse and K. Groot, "Sustainable entrepreneurship and corporate political activity: Overcoming market barriers in the clean energy sector," *Entrepreneurship: Theory and Practice*, vol. 39, no. 3, pp. 633–654, May 2015, doi: 10.1111/etap.12055.
- [4] I. Dincer and C. Acar, "A review on clean energy solutions for better sustainability," *International Journal of Energy Research*, vol. 39, no. 5. John Wiley and Sons Ltd, pp. 585–606, Apr. 01, 2015. doi: 10.1002/er.3329.
- [5] United Nations, "Ensure access to affordable, reliable, sustainable and modern energy." Accessed: Feb. 16, 2021. [Online]. Available: <https://www.un.org/sustainabledevelopment/energy/>
- [6] United Nations, "Ensure sustainable consumption and production patterns." Accessed: Oct. 18, 2022. [Online]. Available: <https://www.un.org/sustainabledevelopment/sustainable-consumption-production/>
- [7] International Renewable Energy Agency, *RENEWABLE ENERGY STATISTICS 2023*. 2023. Accessed: Jul. 12, 2023. [Online]. Available: <https://www.irena.org/Publications/2023/Jul/Renewable-energy-statistics-2023>
- [8] REN21, "RENEWABLES 2023 GLOBAL STATUS REPORT," 2023. Accessed: Jul. 12, 2023. [Online]. Available: <https://www.ren21.net/reports/global-status-report/>
- [9] International Hydropower Association, "2022 Hydropower Status Report Contents Contents," 2022. Accessed: Jul. 12, 2023. [Online]. Available: <https://www.hydropower.org/publications/2022-hydropower-status-report>
- [10] Acolgen, "Capacidad instalada en Colombia." [Online]. Available: <https://www.acolgen.org.co/>

- 
- [11] UPME, “Plan de Expansión de Referencia Generación Transmisión 2015 - 2029.” Accessed: Mar. 20, 2022. [Online]. Available: <https://www1.upme.gov.co/Paginas/Plan-Expansion-2015-2029.aspx>
- [12] UPME, “CAPACIDAD EFECTIVA DE ENERGÍA ELÉCTRICA -SIN- AÑO 2015.” [Online]. Available: [http://sig.simec.gov.co/GeoPortal/images/pdf/UPME\\_EN\\_TRANSMISION\\_PLAN\\_ACTUAL\\_2019.pdf](http://sig.simec.gov.co/GeoPortal/images/pdf/UPME_EN_TRANSMISION_PLAN_ACTUAL_2019.pdf)
- [13] F. Emiro, S. Vargas, A. Fernanda Sierra Alarcón, and C. Alberto Guerrero Fajardo, “Pequeñas y microcentrales hidroeléctricas: alternativa real de generación eléctrica. Small and micro hydroelectric power plants: a real alternative for electricity generation.”
- [14] PARATEC, “Plantas menores.” [Online]. Available: <http://paratec.xm.com.co/paratec/SitePages/generacion.aspx?q=lista>
- [15] Ingfocol Ltda, “Primer Atlas hidroenergético revela gran potencial en Colombia.” [Online]. Available: <https://www1.upme.gov.co/Paginas/Primer-Atlas-hidroenergetico-revela-gran-potencial-en-Colombia.aspx>
- [16] A. M. A. Haidar, M. F. M. Senan, A. Noman, and T. Radman, “Utilization of pico hydro generation in domestic and commercial loads,” *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 16, no. 1. Elsevier Ltd, pp. 518–524, 2012. doi: 10.1016/j.rser.2011.08.017.
- [17] A. Williams and S. Porter, “Comparison of hydropower options for developing countries with regard to the environmental, social and economic aspects.”
- [18] S. Miao, J. Yang, F. Shi, X. Wang, and G. Shi, “Research on energy conversion characteristic of pump as turbine,” *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 10, no. 4, Apr. 2018, doi: 10.1177/1687814018770836.
- [19] R. Rayner, *Pump Users Handbook*, 4th ed. Elsevier, 1995. doi: 10.1016/B978-1-85617-216-5.X5000-0.
- [20] Conforempresarial, “Curso de Chiller.” Accessed: May 29, 2022. [Online]. Available: <https://www.conforempresarial.com/curso-de-chiller/>
- [21] The C&B Equipment Story, “A Guide to Centrifugal Pump Parts with Maintenance Checklist.” Accessed: May 29, 2022. [Online]. Available: <https://cbeuptime.com/a-guide-to-centrifugal-pump-parts-with-maintenance-checklist/>

- 
- [22] J. Graciano-Urbe, J. Sierra, and E. Torres-López, "Instabilities and influence of geometric parameters on the efficiency of a pump operated as a turbine for micro hydro power generation: A review," *Journal of Sustainable Development of Energy, Water and Environment Systems*, vol. 9, no. 4, 2021, doi: 10.13044/j.sdewes.d8.0321.
- [23] KSB, *Selecting Centrifugal Pumps*, vol. V5. Frankenthal, Germany: KSB Aktiengesellschaft, Communications., 2005. Accessed: May 29, 2022. [Online]. Available: <https://pdf4pro.com/amp/fullscreen/selecting-centrifugal-pumps-ksb-451cdd.html>
- [24] Michael smith engineers, "Useful information on specific speed and suction specific speed." Accessed: Oct. 11, 2020. [Online]. Available: <https://www.michael-smith-engineers.co.uk/resources/useful-info/specific-speed>
- [25] Neutrium, "Pump Specific Speed." Accessed: Oct. 19, 2022. [Online]. Available: <https://neutrium.net/equipment/pump-specific-speed/>
- [26] I. Pump & Corrosion Technologies, "Pump Specific Speed." Accessed: Oct. 19, 2022. [Online]. Available: <http://pumpandcorrosion.com/technical/pump-specific-speed/>
- [27] M. R. Anderson, "Specific Speed Demystified." Accessed: Oct. 19, 2022. [Online]. Available: <https://www.conceptsnrec.com/blog/specific-speed-demystified>
- [28] A. A. Williams, "WREX 1996 PUMPS AS TURBINES FOR LOW COST MICRO I-HYDRO POWER."
- [29] V. S. Lobnanoff, *Centrifugal Pumps—Design and Applications*, 2nd ed. Houston, TX, USA: Gulf Publishing Company, 1992.
- [30] B. Orchard and S. Klos, "Pumps as turbines for water industry," *World Pumps*, vol. 2009, no. 8, pp. 22–23, 2009, doi: 10.1016/S0262-1762(09)70283-4.
- [31] V. Jülch, "Comparison of electricity storage options using levelized cost of storage (LCOS) method," *Appl Energy*, vol. 183, pp. 1594–1606, Dec. 2016, doi: 10.1016/j.apenergy.2016.08.165.
- [32] J. Krenn, H. Keck, and M. Sallaberger, "Small and Mid-Size Pump-Turbines with Variable Speed," *Energy Power Eng*, vol. 5, no. 2, pp. 48–54, 2013, doi: 10.4236/epe.2013.52A007.
- [33] M. Shabani and J. Mahmoudimehr, "Techno-economic role of PV tracking technology in a hybrid PV-hydroelectric standalone power system," *Appl Energy*, vol. 212, no. September 2017, pp. 84–108, 2018, doi: 10.1016/j.apenergy.2017.12.030.

- 
- [34] E. N. Nyeche and E. O. Diemuodeke, "Modelling and optimisation of a hybrid PV-wind turbine-pumped hydro storage energy system for mini-grid application in coastline communities," *J Clean Prod*, vol. 250, pp. 119–578, 2020, doi: 10.1016/j.jclepro.2019.119578.
- [35] S. Barbarelli, V. Pisano, and M. Amelio, "Development of a Predicting Model for Calculating the Geometry and the Characteristic Curves of Pumps Running as Turbines in Both Operating Modes," *Energies (Basel)*, vol. 15, no. 7, Apr. 2022, doi: 10.3390/en15072669.
- [36] H. Nautiyal, A. Kumar, and S. Yadav, "Experimental Investigation of Centrifugal Pump Working as Turbine for Small Hydropower Systems," *ENERGY SCIENCE AND TECHNOLOGY*, vol. 1, no. 1, pp. 79–86, 2011, [Online]. Available: [www.cscanada.net](http://www.cscanada.net)
- [37] J. Chapallaz, P. Eichenberg, and G. Fisher, *Manual on Pumps Used as Turbines*, vol. 11. Braunschweig: VIEWEG, 1992.
- [38] S. Barbarelli, M. Amelio, and G. Florio, "Experimental activity at test rig validating correlations to select pumps running as turbines in microhydro plants," *Energy Convers Manag*, vol. 149, pp. 781–797, 2017, doi: 10.1016/j.enconman.2017.03.013.
- [39] D. Penagos-Vásquez, J. Graciano-Uribe, S. V. García, and J. S. del Rio, "Characteristic Curve Prediction of a Commercial Centrifugal Pump Operating as a Turbine Through Numerical Simulations," *Journal of Advanced Research in Fluid Mechanics and Thermal Sciences*, vol. 83, no. 1, pp. 153–169, 2021, doi: 10.37934/ARFMTS.83.1.153169.
- [40] S. Barbarelli, M. Amelio, and G. Florio, "Using a statistical-numerical procedure for the selection of pumps running as turbines to be applied in water pipelines: Study cases," *Journal of Sustainable Development of Energy, Water and Environment Systems*, vol. 6, no. 2, pp. 323–340, Jun. 2018, doi: 10.13044/j.sdewes.d5.0181.
- [41] F. Plua, V. Hidalgo, P. A. López-Jiménez, and M. Pérez-Sánchez, "Analysis of applicability of cfd numerical studies applied to problem when pump working as turbine," *Water (Switzerland)*, vol. 13, no. 15, Aug. 2021, doi: 10.3390/w13152134.
- [42] GPM Surplus, "Flowserve 16" Steel Semi-Open Impeller." Accessed: May 29, 2022. [Online]. Available: <https://gpmsurplus.com/product/flowserve-16-steel-semi-open-impeller/>

- 
- [43] Indiamart, “Centrifugal Pump Impeller, For Industrial.” Accessed: May 29, 2022. [Online]. Available: <https://www.indiamart.com/proddetail/centrifugal-pump-impeller-16361624512.html>
- [44] Made-In-China, “Molde Tipo Sulzer parte de la bomba hidráulica de impulsor de la bomba de agua.” Accessed: Oct. 18, 2022. [Online]. Available: [https://es.made-in-china.com/co\\_sourcepump/product\\_Sulzer-Type-Casting-Hydraulic-Pump-Part-for-Water-Pump-Impeller\\_euhguusry.html](https://es.made-in-china.com/co_sourcepump/product_Sulzer-Type-Casting-Hydraulic-Pump-Part-for-Water-Pump-Impeller_euhguusry.html)
- [45] Cindex, “¿Sabes qué son las bombas centrífugas y sus tipos de impulsores?” Accessed: Apr. 20, 2022. [Online]. Available: <http://www.cindex.com.mx/bombas/sabes-que-son-las-bombas-centrifugas-y-sus-tipos-de-impulsores/>
- [46] Predictiva21, “2.1.- Impulsores.” Accessed: Apr. 20, 2022. [Online]. Available: <https://predictiva21.com/2-1-impulsores/>
- [47] B. Sanda and V. Daniela, “THE INFLUENCE OF THE INLET ANGLE OVER THE RADIAL IMPELLER GEOMETRY DESIGN APPROACH WITH ANSYS,” 2012.
- [48] A. Carravetta, S. Derakhshan Houreh, and H. M. Ramos, *Pumps as Turbines. Fundamentals and Applications*, 1st ed. Cham, Switzerland: Springer, 2018.
- [49] C. Mataix, *Turbomáquinas Hidráulicas*. Madrid: Editorial ICAI, 1975.
- [50] M. Lorusso *et al.*, “Efficient CFD evaluation of the NPSH for centrifugal pumps,” in *Energy Procedia*, Elsevier Ltd, Sep. 2017, pp. 778–785. doi: 10.1016/j.egypro.2017.08.262.
- [51] C. Mataix, *Turbomáquinas hidráulicas*, Third ed. Madrid: Litoprint, 1975.
- [52] K. Sengpanich, E. L. J. Bohez, P. Thongkruer, and K. Sakulphan, “New mode to operate centrifugal pump as impulse turbine,” *Renew Energy*, vol. 140, pp. 983–993, Sep. 2019, doi: 10.1016/j.renene.2019.03.116.
- [53] M. M. Ghorani, M. H. Sotoude Haghghi, A. Maleki, and A. Riasi, “A numerical study on mechanisms of energy dissipation in a pump as turbine (PAT) using entropy generation theory,” *Renew Energy*, vol. 162, pp. 1036–1053, Dec. 2020, doi: 10.1016/j.renene.2020.08.102.
- [54] S. Huang, G. Qiu, X. Su, J. Chen, and W. Zou, “Performance prediction of a centrifugal pump as turbine using rotor-volute matching principle,” *Renew Energy*, vol. 108, pp. 64–71, 2017, doi: 10.1016/j.renene.2017.02.045.

- 
- [55] L. Wang, S. N. Asomani, J. Yuan, and D. Appiah, "Geometrical optimization of pump-as-turbine (PAT) impellers for enhancing energy efficiency with 1-D theory," *Energies (Basel)*, vol. 13, no. 6, Aug. 2020, doi: 10.3390/en13164120.
- [56] Y. A. Çengel and J. M. Cimbala, *Mecánica de Fluidos - Fundamentos y Aplicaciones*, 1ra ed. Mexico DF: McGrawHill, 2006.
- [57] M. Polo Encinas, *Turbomáquinas hidráulicas*, Primera edición. Mexico DF: Editorial Limusa, 1976.
- [58] S. Derakhshan and A. Nourbakhsh, "Theoretical, numerical and experimental investigation of centrifugal pumps in reverse operation," *Exp Therm Fluid Sci*, vol. 32, no. 8, pp. 1620–1627, Sep. 2008, doi: 10.1016/j.expthermflusci.2008.05.004.
- [59] J. Fernández, R. Barrio, E. Blanco, J. L. Parrondo, and A. Marcos, "Numerical investigation of a centrifugal pump running in reverse mode," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy*, vol. 224, no. 3, pp. 373–381, Jan. 2010, doi: 10.1243/09576509JPE757.
- [60] S. S. Yang, S. Derakhshan, and F. Y. Kong, "Theoretical, numerical and experimental prediction of pump as turbine performance," *Renew Energy*, vol. 48, pp. 507–513, Dec. 2012, doi: 10.1016/j.renene.2012.06.002.
- [61] Xianghui Su, Si Huang, Guangqi Qiu, and Guowei Ou, "Flow performance analysis on shutoff condition in centrifugal pump based on CFD simulation," in *2014 ISFMFE - 6th International Symposium on Fluid Machinery and Fluid Engineering*, Institution of Engineering and Technology, 2014, pp. 014 (5 .)-014 (5 .). doi: 10.1049/cp.2014.1142.
- [62] Neelambika and Veerbhadrappa, "CFD ANALYSIS OF MIXED FLOW IMPELLER," *Int J Res Eng Technol*, vol. 03, no. 15, pp. 601–607, May 2014, doi: 10.15623/ijret.2014.0315112.
- [63] Z. Qian, F. Wang, Z. Guo, and J. Lu, "Performance evaluation of an axial-flow pump with adjustable guide vanes in turbine mode," *Renew Energy*, vol. 99, pp. 1146–1152, Dec. 2016, doi: 10.1016/j.renene.2016.08.020.
- [64] S. Derakhshan and A. Nourbakhsh, "Theoretical, numerical and experimental investigation of centrifugal pumps in reverse operation," *Exp Therm Fluid Sci*, vol. 32, no. 8, pp. 1620–1627, Sep. 2008, doi: 10.1016/j.expthermflusci.2008.05.004.

- 
- [65] J. Du, H. Yang, and Z. Shen, "Study on the impact of blades wrap angle on the performance of pumps as turbines used in water supply system of high-rise buildings," *International Journal of Low-Carbon Technologies*, vol. 13, no. 1, pp. 102–108, Mar. 2018, doi: 10.1093/ijlct/cty002.
- [66] S. S. Yang, F. Y. Kong, X. Y. Qu, and W. M. Jiang, "Influence of blade number on the performance and pressure pulsations in a pump used as a turbine," *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*, vol. 134, no. 12, 2012, doi: 10.1115/1.4007810.
- [67] S. Barbarelli, M. Amelio, and G. Florio, "Predictive model estimating the performances of centrifugal pumps used as turbines," *Energy*, vol. 107, pp. 103–121, Jul. 2016, doi: 10.1016/j.energy.2016.03.122.
- [68] X. Tan and A. Engeda, "Performance of centrifugal pumps running in reverse as turbine: Part II - systematic specific speed and specific diameter based performance prediction," *Renew Energy*, vol. 99, pp. 188–197, Dec. 2016, doi: 10.1016/j.renene.2016.06.052.
- [69] S. Fontanella, O. Fecarotta, B. Molino, L. Cozzolino, and R. Della Morte, "A performance prediction model for pumps as turbines (PATs)," *Water (Switzerland)*, vol. 12, no. 4, Apr. 2020, doi: 10.3390/W12041175.
- [70] Arthur Williams, *Pumps as Turbines: A users guide*. London: Technology Publications, 1995.
- [71] A. A. Williams, "The Turbine Performance of Centrifugal Pumps: A Comparison of Prediction Methods," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy*, vol. 208, no. 1, pp. 59–66, Feb. 1994, doi: 10.1243/PIME\_PROC\_1994\_208\_009\_02.
- [72] G. A. Maria Castorino, L. Manservigi, S. Barbarelli, E. Losi, and M. Venturini, "Development and validation of a comprehensive methodology for predicting PAT performance curves," *Energy*, vol. 274, Jul. 2023, doi: 10.1016/j.energy.2023.127366.
- [73] M. Rossi, A. Nigro, G. R. Pisaturo, and M. Renzi, "Technical and economic analysis of Pumps-as-Turbines (PaTs) used in an Italian Water Distribution Network (WDN) for electrical energy production," in *Energy Procedia*, Elsevier Ltd, 2019, pp. 117–122. doi: 10.1016/j.egypro.2019.01.055.

- 
- [74] M. Stefanizzi, M. Torresi, B. Fortunato, and S. M. Camporeale, "Experimental investigation and performance prediction modeling of a single stage centrifugal pump operating as turbine," in *Energy Procedia*, Elsevier Ltd, Sep. 2017, pp. 589–596. doi: 10.1016/j.egypro.2017.08.218.
- [75] P. Singh and F. Nestmann, "An optimization routine on a prediction and selection model for the turbine operation of centrifugal pumps," *Exp Therm Fluid Sci*, vol. 34, no. 2, pp. 152–164, Feb. 2010, doi: 10.1016/j.expthermflusci.2009.10.004.
- [76] S. Derakhshan and A. Nourbakhsh, "Experimental study of characteristic curves of centrifugal pumps working as turbines in different specific speeds," *Exp Therm Fluid Sci*, vol. 32, no. 3, pp. 800–807, Jan. 2008, doi: 10.1016/j.expthermflusci.2007.10.004.
- [77] S. Derakhshan, B. Mohammadi, and A. Nourbakhsh, "Efficiency improvement of centrifugal reverse pumps," *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*, vol. 131, no. 2, pp. 0211031–0211039, Feb. 2009, doi: 10.1115/1.3059700.
- [78] P. Singh and F. Nestmann, "Internal hydraulic analysis of impeller rounding in centrifugal pumps as turbines," *Exp Therm Fluid Sci*, vol. 35, no. 1, pp. 121–134, Jan. 2011, doi: 10.1016/j.expthermflusci.2010.08.013.
- [79] S. V. Jain, A. Swarnkar, K. H. Motwani, and R. N. Patel, "Effects of impeller diameter and rotational speed on performance of pump running in turbine mode," *Energy Convers Manag*, vol. 89, pp. 808–824, Jan. 2015, doi: 10.1016/j.enconman.2014.10.036.
- [80] A. Doshi, S. Channiwala, and P. Singh, "Inlet impeller rounding in pumps as turbines: An experimental study to investigate the relative effects of blade and shroud rounding," *Exp Therm Fluid Sci*, vol. 82, pp. 333–348, Apr. 2017, doi: 10.1016/j.expthermflusci.2016.11.024.
- [81] M. Azlan Ismail, A. Khalid Othman, and H. Zen, "CFD Modelling of a Pump as Turbine (PAT) with Rounded Leading Edge Impellers for Micro Hydro Systems," 2017.
- [82] S. S. Yang, F. Y. Kong, H. Chen, and X. H. Su, "Effects of blade wrap angle influencing a pump as turbine," *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*, vol. 134, no. 6, 2012, doi: 10.1115/1.4006677.
- [83] S. S. Yang, F. Y. Kong, W. M. Jiang, and X. Y. Qu, "Effects of impeller trimming influencing pump as turbine," *Comput Fluids*, vol. 67, pp. 72–78, Aug. 2012, doi: 10.1016/j.compfluid.2012.07.009.

- 
- [84] Y. Sun-Sheng, K. Fan-Yu, F. Jian-Hui, and X. Ling, "Numerical research on effects of splitter blades to the influence of pump as turbine," *International Journal of Rotating Machinery*, vol. 2012, 2012, doi: 10.1155/2012/123093.
- [85] F. X. Shi, J. H. Yang, and X. H. Wang, "Analysis on the effect of variable guide vane numbers on the performance of pump as turbine," *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 10, no. 6, Jun. 2018, doi: 10.1177/1687814018780796.
- [86] M. Azlan Ismail, A. Khalid Othman, H. Zen, and M. Suffian Misran, "CFD Modelling of Pump as Turbine with Various Number of Blade for Microhydro System," *Journal of Applied Science & Process Engineering*, vol. 3, no. 1, 2016.
- [87] J. Delgado, J. P. Ferreira, D. I. C. Covas, and F. Avellan, "Variable speed operation of centrifugal pumps running as turbines. Experimental investigation," *Renew Energy*, vol. 142, pp. 437–450, Nov. 2019, doi: 10.1016/j.renene.2019.04.067.
- [88] S. S. Yang, C. Wang, K. Chen, and X. Yuan, "Research on blade thickness influencing pump as turbine," *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 2014, 2014, doi: 10.1155/2014/190530.
- [89] W. Tao, K. Fanyu, Y. Sunsheng, C. Kai, and G. Qiuqin, "Determination of special impeller diameter for pump as turbine and its effects on turbine performance," *Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering (Transactions of the CSAE)*, pp. 60–66, 2016, doi: 10.11975/j.issn.1002-6819.2016.15.009.
- [90] Y. Bai, F. Kong, S. Yang, K. Chen, and T. Dai, "Effect of blade wrap angle in hydraulic turbine with forward-curved blades," *Int J Hydrogen Energy*, vol. 42, no. 29, pp. 18709–18717, Jul. 2017, doi: 10.1016/j.ijhydene.2017.04.185.
- [91] H. Yu, T. Wang, Y. Dong, Q. Gou, L. Lei, and Y. Liu, "Numerical investigation of splitter blades on the performance of a forward-curved impeller used in a pump as turbine," *Ocean Engineering*, vol. 281, Aug. 2023, doi: 10.1016/j.oceaneng.2023.114721.
- [92] T. Wang, F. Kong, B. Xia, Y. Bai, and C. Wang, "The method for determining blade inlet angle of special impeller using in turbine mode of centrifugal pump as turbine," *Renew Energy*, vol. 109, pp. 518–528, 2017, doi: 10.1016/j.renene.2017.03.054.
- [93] T. Wang, R. Xiang, H. Yu, and M. Zhou, "Performance improvement of forward-curved impeller with an adequate outlet swirl using in centrifugal pump as turbine," *Renew Energy*, vol. 204, pp. 67–76, Mar. 2023, doi: 10.1016/j.renene.2023.01.011.

- 
- [94] T. Wang, C. Wang, F. Kong, Q. Gou, and S. Yang, "Theoretical, experimental, and numerical study of special impeller used in turbine mode of centrifugal pump as turbine," *Energy*, vol. 130, pp. 473–485, 2017, doi: 10.1016/j.energy.2017.04.156.
- [95] Y. Sun-Sheng, P. Singh, and H. Zhang, "Flow investigations of reverse running volute pumps with backward vanes in comparison to forward type turbine vanes," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy*, vol. 233, no. 1, pp. 111–131, Feb. 2019, doi: 10.1177/0957650918768354.
- [96] S. C. Miao, J. H. Yang, G. T. Shi, and T. T. Wang, "Blade profile optimization of pump as turbine," *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 7, no. 9, pp. 1–9, Sep. 2015, doi: 10.1177/1687814015605748.
- [97] M. Sen-chun, S. Zhi-xiao, W. Xiao-hui, S. Feng-xia, and S. Guang-tai, "Impeller meridional plane optimization of pump as turbine," *Sci Prog*, vol. 103, no. 1, Jan. 2020, doi: 10.1177/0036850419876542.
- [98] J. Xu, L. Wang, S. N. Asomani, W. Luo, and R. Lu, "Improvement of internal flow performance of a centrifugal pump-as-turbine (Pat) by impeller geometric optimization," *Mathematics*, vol. 8, no. 10, pp. 1–23, Oct. 2020, doi: 10.3390/math8101714.
- [99] M. Sen-chun, Z. Hong-biao, W. Ting-ting, W. Xiao-hui, and S. Feng-xia, "Optimal design of blade in pump as turbine based on multidisciplinary feasible method," *Sci Prog*, vol. 103, no. 4, 2020, doi: 10.1177/0036850420982105.
- [100] Y. Ji, Z. Yang, J. Ran, and H. Li, "Multi-objective parameter optimization of turbine impeller based on RBF neural network and NSGA-II genetic algorithm," *Energy Reports*, vol. 7, pp. 584–593, Nov. 2021, doi: 10.1016/j.egy.2021.10.003.
- [101] B. Jiang, J. Yang, X. Wang, S. Miao, and X. Bai, "Optimization of pumps as turbines blades based on SVM-HDMR model and PSO algorithm," *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 13, no. 7, 2021, doi: 10.1177/16878140211034364.
- [102] B. Jiang, J. Yang, X. Wang, F. Shi, and X. Bai, "Optimization of twisted blade of pump as turbine based on high dimensional surrogate model," *Sci Prog*, vol. 104, no. 4, Oct. 2021, doi: 10.1177/00368504211059050.

- 
- [103] Y. Qin, D. Li, H. Wang, Z. Liu, X. Wei, and X. Wang, "Multi-objective optimization design on high pressure side of a pump-turbine runner with high efficiency," *Renew Energy*, vol. 190, pp. 103–120, May 2022, doi: 10.1016/j.renene.2022.03.085.
- [104] M. Rossi and M. Renzi, "A general methodology for performance prediction of pumps-as-turbines using Artificial Neural Networks," *Renew Energy*, vol. 128, pp. 265–274, Dec. 2018, doi: 10.1016/j.renene.2018.05.060.
- [105] R. Huang, Z. Zhang, W. Zhang, J. Mou, P. Zhou, and Y. Wang, "Energy performance prediction of the centrifugal pumps by using a hybrid neural network," *Energy*, vol. 213, Dec. 2020, doi: 10.1016/j.energy.2020.119005.
- [106] S. N. Asomani, J. Yuan, L. Wang, D. Appiah, and F. Zhang, "Geometrical effects on performance and inner flow characteristics of a pump-as-turbine: A review," *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 12, no. 4. SAGE Publications Inc., Apr. 01, 2020. doi: 10.1177/1687814020912149.
- [107] D. Appiah, F. Zhang, S. Yuan, and M. K. Osman, "Effects of the geometrical conditions on the performance of a side channel pump: A review," *International Journal of Energy Research*, vol. 42, no. 2. John Wiley and Sons Ltd, pp. 416–428, Feb. 01, 2018. doi: 10.1002/er.3803.
- [108] F. Zhang, D. Appiah, J. Zhang, S. Yuan, M. K. Osman, and K. Chen, "Transient flow characterization in energy conversion of a side channel pump under different blade suction angles," *Energy*, vol. 161, pp. 635–648, Oct. 2018, doi: 10.1016/j.energy.2018.07.152.
- [109] S. Rawal and J. T. Kshirsagar, "Numerical Simulation on a Pump Operating in a Turbine Mode," *Proceedings Of The Twenty-Third International Pump Users Symposium*, pp. 21–27, 2007, doi: 10.21423/R1WD5C.
- [110] A. Yu, L. Li, J. Ji, and Q. Tang, "Numerical study on the energy evaluation characteristics in a pump turbine based on the thermodynamic entropy theory," *Renew Energy*, vol. 195, pp. 766–779, Aug. 2022, doi: 10.1016/j.renene.2022.06.077.
- [111] Ansys, "ANSYS TurboSystem Users Guide," Canonsburg, Pennsylvania, United States, Nov. 2013.
- [112] T. Lin, Z. Zhu, X. Li, J. Li, and Y. Lin, "Theoretical, experimental, and numerical methods to predict the best efficiency point of centrifugal pump as turbine," *Renew Energy*, vol. 168, pp. 31–44, May 2021, doi: 10.1016/j.renene.2020.12.040.

- 
- [113] J. S. Anagnostopoulos, "CFD Analysis and Design Effects in a Radial Pump Impeller," *WSEAS TRANSACTIONS ON FLUID MECHANICS Issue*, vol. 7, 2006.
- [114] M. Binama *et al.*, "Blade trailing edge position influencing pump as turbine (PAT) pressure field under part-load conditions," *Renew Energy*, vol. 136, pp. 33–47, Jun. 2019, doi: 10.1016/j.renene.2018.12.077.
- [115] T. Lin, X. Li, Z. Zhu, J. Xie, Y. Li, and H. Yang, "Application of enstrophy dissipation to analyze energy loss in a centrifugal pump as turbine," *Renew Energy*, vol. 163, pp. 41–55, Jan. 2021, doi: 10.1016/j.renene.2020.08.109.
- [116] M. Polák, "Innovation of pump as turbine according to calculation model for francis turbine design," *Energies (Basel)*, vol. 14, no. 9, May 2021, doi: 10.3390/en14092698.
- [117] B. Qi, D. Zhang, L. Geng, R. Zhao, and B. P. M. van Esch, "Numerical and experimental investigations on inflow loss in the energy recovery turbines with back-curved and front-curved impeller based on the entropy generation theory," *Energy*, vol. 239, Jan. 2022, doi: 10.1016/j.energy.2021.122426.
- [118] F. Santos Sabrás, *Máquinas hidráulicas: Turbinas hidráulicas. 2a. Parte*. Universidad de Navarra, 1993.
- [119] M. A. Rodríguez-Cabal, J. Ardila Marín, L. F. Grisales-Noreña, O. D. Montoya, and J. A. Sierra del Rio, "Optimization of a Drive Shaft using PSO Algorithm," *WSEAS Trans. Appl. Theor. Mech*, vol. 13, pp. 130–139, 2018.
- [120] Q. He and L. Wang, "An effective co-evolutionary particle swarm optimization for constrained engineering design problems," *Eng Appl Artif Intell*, vol. 20, no. 1, pp. 89–99, Feb. 2007, doi: 10.1016/j.engappai.2006.03.003.
- [121] N. Ben Guedria, "Improved accelerated PSO algorithm for mechanical engineering optimization problems," *Applied Soft Computing Journal*, vol. 40, pp. 455–467, Mar. 2016, doi: 10.1016/j.asoc.2015.10.048.
- [122] N. Yusup, A. M. Zain, and S. Z. M. Hashim, "Overview of PSO for optimizing process parameters of machining," in *Procedia Engineering*, 2012, pp. 914–923. doi: 10.1016/j.proeng.2012.01.064.

- 
- [123] A. O. S. Moraes, J. F. Mitre, P. L. C. Lage, and A. R. Secchi, "A robust parallel algorithm of the particle swarm optimization method for large dimensional engineering problems," *Appl Math Model*, vol. 39, no. 14, pp. 4223–4241, Jul. 2015, doi: 10.1016/j.apm.2014.12.034.
- [124] V. K. Patel and R. V. Rao, "Design optimization of shell-and-tube heat exchanger using particle swarm optimization technique," *Appl Therm Eng*, vol. 30, no. 11–12, pp. 1417–1425, Aug. 2010, doi: 10.1016/j.applthermaleng.2010.03.001.
- [125] O. D. Montoya, W. Gil-Gonzalez, and L. F. Grisales-Noreña, "Vortex Search Algorithm for Optimal Power Flow Analysis in DC Resistive Networks with CPLs," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 67, no. 8, pp. 1439–1443, Aug. 2020, doi: 10.1109/TCSII.2019.2938530.
- [126] O. D. Montoya, L. F. Grisales-Noreña, W. T. Amin, L. A. Rojas, and J. Campillo, "Vortex Search Algorithm for Optimal Sizing of Distributed Generators in AC Distribution Networks with Radial Topology," in *Communications in Computer and Information Science*, Springer, 2019, pp. 235–249. doi: 10.1007/978-3-030-31019-6\_21.
- [127] L. S. Avellaneda-Gómez and O. D. Montoya-Giraldo, "Aplicación del algoritmo de optimización por enjambre de salpas para la estimación de parámetros en transformadores monofásicos empleando medidas de tensión y corriente," *Revista UIS Ingenierías*, vol. 21, no. 2, pp. 131–146, May 2022, doi: 10.18273/revuin.v21n2-2022011.
- [128] J. Kennedy and R. Eberhart, "Particle swarm optimization," in *Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks*, IEEE, 1995, pp. 1942–1948. doi: 10.1109/ICNN.1995.488968.
- [129] J. F. Jaramillo Vélez and L. F. Grisales Noreña, "SINTONIZACIÓN DEL D-STATCOM POR MEDIO DEL MÉTODO DE OPTIMIZACIÓN PSO," Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, 2013.
- [130] Á. M. Cabal Rodríguez, "Diseño mecánico con un enfoque en ejes de transmisión y resortes helicoidales utilizando técnicas metaheurísticas de optimización," Instituto Tecnológico Metropolitano, Medellín, Colombia, 2021.
- [131] B. Doğan and T. Ölmez, "A new metaheuristic for numerical function optimization: Vortex Search algorithm," *Inf Sci (N Y)*, vol. 293, pp. 125–145, Feb. 2015, doi: 10.1016/j.ins.2014.08.053.

- [132] S. Gupta, K. Deep, H. Moayedi, L. K. Foong, and A. Assad, "Sine cosine grey wolf optimizer to solve engineering design problems," *Eng Comput*, vol. 37, no. 4, pp. 3123–3149, Oct. 2021, doi: 10.1007/s00366-020-00996-y.
- [133] S. Mirjalili, A. H. Gandomi, S. Z. Mirjalili, S. Saremi, H. Faris, and S. M. Mirjalili, "Salp Swarm Algorithm: A bio-inspired optimizer for engineering design problems," *Advances in Engineering Software*, vol. 114, pp. 163–191, Dec. 2017, doi: 10.1016/j.advengsoft.2017.07.002.
- [134] A. E. Hegazy, M. A. Makhlof, and G. S. El-Tawel, "Improved salp swarm algorithm for feature selection," *Journal of King Saud University - Computer and Information Sciences*, vol. 32, no. 3, pp. 335–344, Mar. 2020, doi: 10.1016/j.jksuci.2018.06.003.
- [135] R. A. Ibrahim, A. A. Ewees, D. Oliva, M. Abd Elaziz, and S. Lu, "Improved salp swarm algorithm based on particle swarm optimization for feature selection," *J Ambient Intell Humaniz Comput*, vol. 10, no. 8, pp. 3155–3169, Aug. 2019, doi: 10.1007/s12652-018-1031-9.
- [136] Ansys, "Ansys TurboSystem User's Guide," Canonsburg, Pennsylvania, United States, Jul. 2022. [Online]. Available: <http://www.ansys.com>
- [137] T. Lin, X. Li, Z. Zhu, H. Xie, and J. Hu, "Analysis of the Unsteady Flow Characteristics of Chemical Centrifugal Pump as Turbine at the Best Efficiency Point Condition," *Jixie Gongcheng Xuebao/Journal of Mechanical Engineering*, vol. 57, no. 22, pp. 395–405, Nov. 2021, doi: 10.3901/JME.2021.22.395.
- [138] T. Lin, J. Zhang, J. Li, X. Li, and Z. Zhu, "Pressure Fluctuation–Vorticity Interaction in the Volute of Centrifugal Pump as Hydraulic Turbines (PATs)," *Processes*, vol. 10, no. 11, Nov. 2022, doi: 10.3390/pr10112241.
- [139] T. Lin *et al.*, "Vortex-Pressure Fluctuation Interaction in the Outlet Duct of Centrifugal Pump as Turbines (PATs)," *Sustainability (Switzerland)*, vol. 14, no. 22, Nov. 2022, doi: 10.3390/su142215250.
- [140] Y. L. Zhang, J. F. Li, and Z. C. Zhu, "The acceleration effect of pump as turbine system during starting period," *Sci Rep*, vol. 13, no. 1, Dec. 2023, doi: 10.1038/s41598-023-31899-9.
- [141] I. B. Celik, U. Ghia, P. J. Roache, C. J. Freitas, H. Coleman, and P. E. Raad, "Procedure for estimation and reporting of uncertainty due to discretization in CFD applications," *Journal*

- 
- of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*, vol. 130, no. 7, pp. 0780011–0780014, Jul. 2008, doi: 10.1115/1.2960953.
- [142] L. Velásquez, A. Posada, and E. Chica, “Surrogate modeling method for multi-objective optimization of the inlet channel and the basin of a gravitational water vortex hydraulic turbine,” *Appl Energy*, vol. 330, Jan. 2023, doi: 10.1016/j.apenergy.2022.120357.
- [143] L. Velásquez, A. Posada, and E. Chica, “Optimization of the basin and inlet channel of a gravitational water vortex hydraulic turbine using the response surface methodology,” *Renew Energy*, vol. 187, pp. 508–521, Mar. 2022, doi: 10.1016/j.renene.2022.01.113.
- [144] D. Štefan, M. Rossi, M. Hudec, P. Rudolf, A. Nigro, and M. Renzi, “Study of the internal flow field in a pump-as-turbine (PaT): Numerical investigation, overall performance prediction model and velocity vector analysis,” *Renew Energy*, vol. 156, pp. 158–172, Aug. 2020, doi: 10.1016/j.renene.2020.03.185.
- [145] F. Zhang *et al.*, “Guide vane profile optimization of pump-turbine for grid connection performance improvement,” *Energy*, vol. 274, Jul. 2023, doi: 10.1016/j.energy.2023.127369.
- [146] F. Zhang *et al.*, “Performance improvement of a pump as turbine in storage mode by optimization design based on genetic algorithm and fuzzy logic,” *J Energy Storage*, vol. 62, Jun. 2023, doi: 10.1016/j.est.2023.106875.
- [147] F. Zhang, R. Xiao, D. Zhu, W. Liu, and R. Tao, “Pressure pulsation reduction in the draft tube of pump turbine in turbine mode based on optimization design of runner blade trailing edge profile,” *J Energy Storage*, vol. 59, Mar. 2023, doi: 10.1016/j.est.2022.106541.
- [148] M. S. Karaalioglu and S. Bal, “Performance prediction of cavitating marine current turbine by BEMT based on CFD,” *Ocean Engineering*, vol. 255, Jul. 2022, doi: 10.1016/j.oceaneng.2022.111221.
- [149] M. Djerroud, G. Dituba Ngoma, and W. Ghie, “Numerical Identification of Key Design Parameters Enhancing the Centrifugal Pump Performance: Impeller, Impeller-Volute, and Impeller-Diffuser,” *ISRN Mechanical Engineering*, vol. 2011, pp. 1–16, Nov. 2011, doi: 10.5402/2011/794341.
- [150] S. Rajendran and D. K. Purushothaman, “Analysis of a centrifugal pump impeller using ANSYS-CFX Design of Reverse Gear Mechanism in Two Wheeler for Physically Challenged

- Person View project Design and Experimental Study of Axial Flow Impeller by Increasing Air Flow Rate and Reducing Air Pollution-using CFD View project Analysis of a centrifugal pump impeller using ANSYS-CFX." [Online]. Available: [www.ijert.org](http://www.ijert.org)
- [151] A. Maleki, M. M. Ghorani, M. H. S. Haghighi, and A. Riasi, "Numerical study on the effect of viscosity on a multistage pump running in reverse mode," *Renew Energy*, vol. 150, pp. 234–254, May 2020, doi: 10.1016/j.renene.2019.12.113.
- [152] Diego Penagos-Vasquez, Jonathan Graciano-Uribe, Luis Grisales-Noreña, Sebastián Vélez García, and Edward Andrés Torres-López, "Influence of Leading and Trailing Edge Angle on Impeller Blades of a Pump as Turbine," *Journal of Advanced Research in Fluid Mechanics and Thermal Sciences*, vol. 105, no. 1, pp. 166–183, Jun. 2023, doi: 10.37934/arfmts.105.1.166183.
- [153] Ansys, "Ansys Meshing user's guide," 2010.
- [154] Ansys, "Ansys CFX-Solver Modeling Guide." 2021.
- [155] Z. Cao, J. Deng, L. Zhao, and L. Lu, "Numerical research of pump-as-turbine performance with synergy analysis," *Processes*, vol. 9, no. 6, 2021, doi: 10.3390/pr9061031.
- [156] R. Ramirez, E. Avila, L. Lopez, A. Bula, and J. Duarte Forero, "CFD characterization and optimization of the cavitation phenomenon in dredging centrifugal pumps," *Alexandria Engineering Journal*, vol. 59, no. 1, pp. 291–309, Feb. 2020, doi: 10.1016/j.aej.2019.12.041.
- [157] F. R. Menter, "Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications," *AIAA J*, vol. 32, no. 8, pp. 1598–1605, 1994.
- [158] D. C. Wilcox, "Turbulence Modeling for CFD," *DCW industries La Canadá, CA*, 1998.
- [159] Ansys, "Ansys CFX-Solver Theory Guide," 2022. [Online]. Available: <http://www.ansys.com>
- [160] M. Rakibuzzaman, K. Y. Jung, and S. H. Suh, "A study on the use of existing pump as turbine," in *E3S Web of Conferences*, EDP Sciences, Nov. 2019. doi: 10.1051/e3sconf/201912806004.
- [161] ANSYS, "2.3.1 The Multiple Reference Frame Model." Accessed: Apr. 19, 2023. [Online]. Available: <https://www.afs.enea.it/project/neptunius/docs/fluent/html/th/node33.htm>