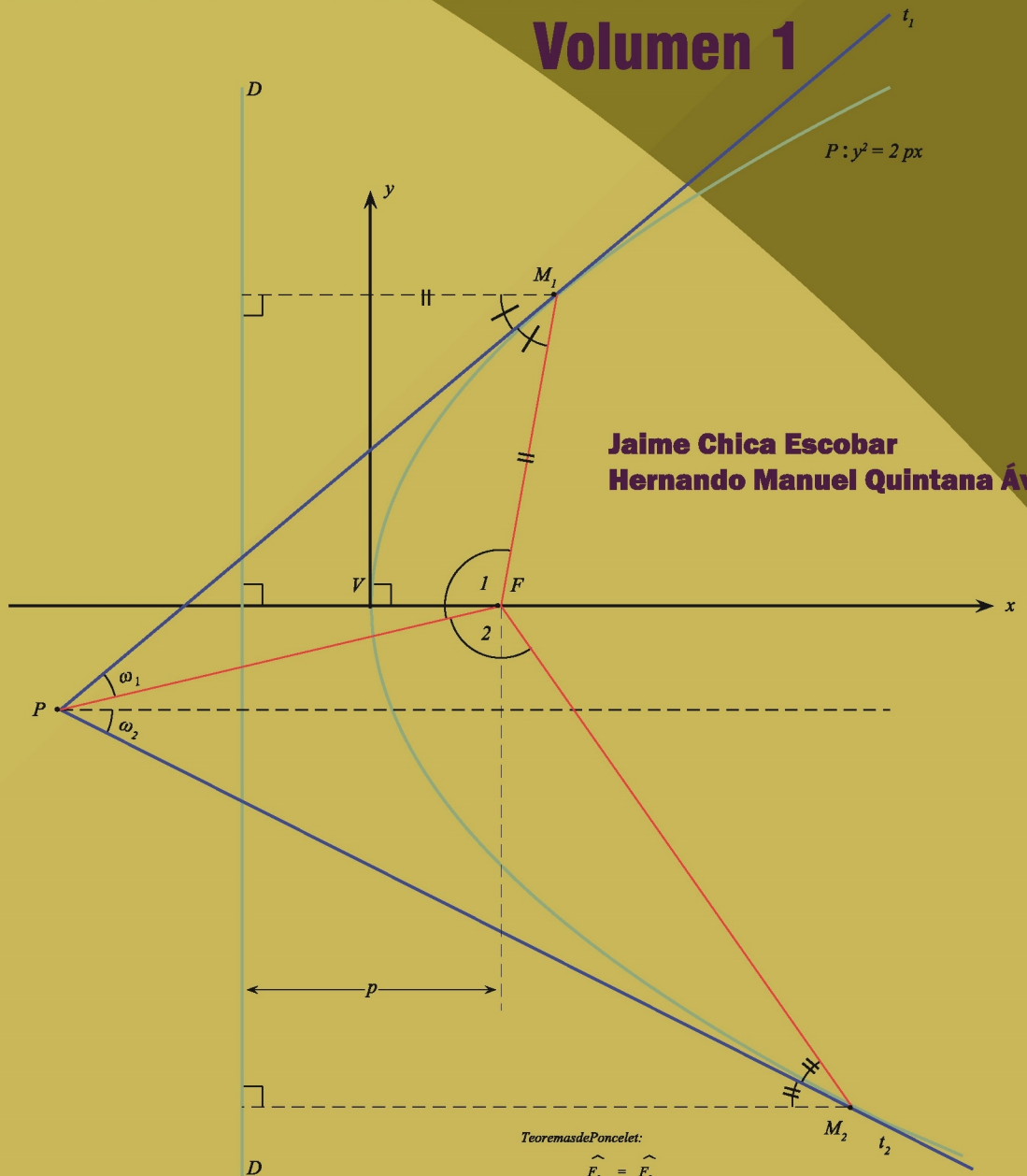


# Tratado de las Secciones Cónicas

# La Parábola

## Volumen 1



Tratado de las Secciones Cónicas

# La Parábola

JAIME CHICA ESCOBAR  
HERNANDO MANUEL QUINTANA ÁVILA



Chica Escobar, Jaime

Tratado de las secciones cónicas : La parábola / Jaime Chica Escobar, Hernando Manuel Quintana Ávila. —1a ed.— Medellín : Fondo Editorial ITM, 2014.

187 p. —(Colección Textos Académicos)

Incluye referencias bibliográficas

ISBN 978-958-8743-46-2

1. Secciones cónicas. 2. Parábola. I. Quintana Ávila, Hernando Manuel II. Tít. III. Serie

516.15 SCDD Ed. 21

Catalogación en la publicación – Biblioteca ITM

Tratado de las secciones cónicas: La parábola

© JAIME CHICA ESCOBAR

© HERNANDO MANUEL QUINTANA

© Fondo Editorial ITM

Edición: julio 2014

ISBN: 978-958-8743-46-2

Hechos todos los depósitos legales

**Rectora**

LUZ MARIELA SORZA ZAPATA

**Editora**

SILVIA INÉS JIMÉNEZ GÓMEZ

**Secretaria Técnica**

VIVIANA DÍAZ

**Correctora de Estilo**

LILA MARÍA CORTÉS FONNEGRA

**Diagramador**

GIOVANNY ATEHORTÚA GUTIÉRREZ

**Impresión**

EDICIONES DIARIO ACTUAL

**Editado en Medellín, Colombia**

**Fondo Editorial ITM**

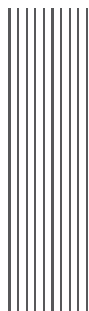
Instituto Tecnológico Metropolitano

Calle 73 No. 76A 354

Tel.: (574) 440 5197

www.itm.edu.co

Las opiniones, originales y citas del texto son de la responsabilidad de los autores. El ITM salva cualquier obligación derivada del libro que se publica. Por tanto, ella recaerá única y exclusivamente sobre los autores.

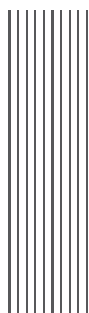


# Contenido

|   |     |
|---|-----|
| <b>Prólogo</b>  | 11  |
| <b>Presentación</b>   | 15  |
| <b>1 La parábola</b>  | 1   |
| 1.1 Definición . . . . .  | 1   |
| 1.2 Ecuaciones analíticas de la parábola $\mathcal{P}_{\mathcal{D}\mathcal{D}-F}$ . . . . .                                 | 8   |
| 1.3 Construcción de la parábola por puntos . . . . .  | 16  |
| 1.3.1 Se conoce la directriz $\mathcal{D}\mathcal{D}$ y el foco $F$ . . . . .   | 17  |
| 1.3.2 Se conoce el vértice, el eje y el parámetro $2p$ . . . . .  | 17  |
| 1.3.3 Otra construcción, conociendo la directriz y el foco . . . . .  | 18  |
| 1.3.4 Se conoce el eje de simetría (eje $y$ ), el vértice y un punto $B(a, b)$ . . . . .                                    | 18  |
| 1.3.5 Se conoce el eje de simetría (eje $x$ ), el vértice y un punto $B(a, b)$ . . . . .                                    | 19  |
| 1.3.6 Otra construcción para el mismo arco de parábola del caso 1.3.5 . . . . .   | 20  |
| 1.3.7 Construcción de la parábola por un método continuo . . . . .  | 22  |
| 1.4 Ecuación de la tangente a la parábola por uno de sus puntos . . . . .   | 22  |
| 1.5 Normal a la parábola en un punto de la curva . . . . .  | 24  |
| 1.6 Normal a la parábola paralela a la recta $y = mx$ . . . . .   | 24  |
| 1.7 Rectas tangente, normal, subtangente y subnormal en la parábola . . . . .   | 25  |
| 1.8 Diámetros de una parábola . . . . .   | 29  |
| 1.9 Propiedad óptica (o focal) de la parábola . . . . .   | 43  |
| 1.10 Puntos de encuentro de una recta y la parábola. Ecuación de la recta tangente a la curva y de pendiente dada . . . . . | 45  |
| 1.11 Signo de la función $g(x, y) = y^2 - 2px$ . . . . .  | 47  |
| 1.12 Polo y polar . . . . .   | 48  |
| 1.12.1 Polar de un punto respecto a dos rectas que se cortan . . . . .  | 50  |
| 1.13 Polar de un punto respecto a dos rectas paralelas . . . . .  | 53  |
| 1.14 La polar de un punto respecto a una circunferencia . . . . .   | 56  |
| 1.15 Tangentes a la parábola desde un punto exterior a la curva $\mathcal{P}: y^2 = 2px$ . . . . .                          | 61  |
| 1.16 El polo y la polar en la parábola . . . . .  | 63  |
| 1.17 Propiedades de las tangentes trazadas desde un punto. Teoremas de Poncelet . . . . .                                   | 70  |
| 1.18 Algunas construcciones adicionales de la parábola . . . . .  | 74  |
| 1.19 Sección de un cono circular recto con un plano. Teorema de Dandelin . . . . .  | 88  |
| 1.20 Transformación de coordenadas en el plano . . . . .  | 93  |
| 1.21 Transformación de coordenadas en el plano. Caso general . . . . .  | 97  |
| 1.22 Aplicación . . . . .   | 108 |
| 1.23 Aplicaciones . . . . .   | 125 |

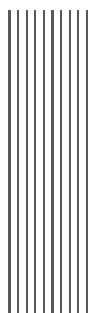
|        |  |     |
|--------|--|-----|
| 1.23.1 | Ecuación de la parábola respecto a un diámetro y a la tangente por el extremo del diámetro . . . . . | 125 |
| 1.23.2 | Forma de un cable flexible . . . . .   | 128 |
| 1.23.3 | Ecuación de una parábola con eje de simetría paralelo al eje $y$ . . . . .                           | 130 |
| 1.24   | Parábolas homofocales. Coordenadas curvilíneas parabólicas . . . . .                                 | 135 |
| 1.25   | Ecuación de la parábola en coordenadas polares . . . . .   | 141 |
| 1.26   | La cuadratura de la parábola . . . . .   | 144 |
| 1.27   | El radio de curvatura. Construcción del centro de curvatura . . . . .                                | 155 |
| 1.28   | Evoluta de la parábola . . . . .   | 157 |
| 1.29   | Longitud de arco de la parábola . . . . .  | 160 |

**Bibliografía**



## Agradecimientos

Esta obra esta dedicada al Dr. Darío Valencia R. quien por muchos años fue profesor de la Facultad de Minas de la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín, y a través de lecciones maravillosas e inolvidables nos introdujo en el mundo de la Geometría Analítica, a transformar los problemas de geometría en problemas de álgebra, utilizando el instrumento de las coordenadas, como ya lo había enseñado René Descartes (1596 - 1650) matemático y filósofo francés del siglo XVII. También al profesor Giovanny Atehortúa Gutiérrez por su entusiasmo, esmero y dedicación en la escritura del texto, aportes, diagramación y construcción de las gráficas en el software computacional LaTeX.



## Prólogo

El tercer gigante matemático de la antigüedad griega al lado de Euclides (325 a.C - 265 a.C) y Arquímedes (287 a.C - 212 a.C) fue Apolonio (262 a.C - 200 a.C), quien nació en Perga al sur de Asia Menor. Siendo joven fue a Alejandría donde estudió con los sucesores de Euclides y luego pasó la mayor parte de su vida en la universidad de esa ciudad.

Debe su fama a la extraordinaria y monumental obra: *Secciones Cónicas*, trabajo con el que ganó el título entre sus contemporáneos de «El mejor geómetra».

*Las Secciones Cónicas* de Apolonio son 8 libros que contienen aproximadamente 400 proposiciones. Son una investigación profunda de estas curvas: parábola, elipse e hipérbola, que substituyó a trabajos anteriores sobre el mismo tema. Los antiguos griegos las obtenían como secciones de un cono circular recto en un plano que corte al eje del cono. Como se comprende, Apolonio dedujo la mayor parte de las propiedades de las cónicas sin utilizar coordenadas ni ecuaciones de las curvas como lo hacemos ahora, ya que dicho estudio solo empezó a hacerse después de la creación de la Geometría Analítica por parte de los matemáticos franceses Rene Descartes (1596 - 1650) y Pierre de Fermat (1601 - 1665).

Estas tres monografías que presentamos: la parábola, la elipse y la hipérbola, recogen cada una por separado, un estudio de las propiedades geométricas básicas de estas curvas, empezando por la construcción de ellas, todas obtenidas utilizando Geometría Analítica, es decir, las ecuaciones analíticas de las curvas.

Existe un mecanismo que veremos aplicado a todo lo largo de esta obra. El primer paso, consiste en traducir toda propiedad geométrica que define a una figura, en una relación analítica equivalente a aquella. Cuando esto se hace, se dice que se ha puesto en una *ecuación* (o *ecuaciones*) el primitivo enunciado geométrico. Transformar y resolver la ecuación, constituye el siguiente paso, tarea esta, que corresponde al análisis, esto es, al Álgebra y el Cálculo infinitesimal. El tercer paso, consiste en interpretar geoméricamente sobre la figura primitiva, las consecuencias derivadas del proceso analítico.

Hay un punto de vista común que utilizamos en las tres monografías para definir las cónicas: dada una recta  $\mathcal{DD}$  llamada *directriz*, un punto  $F$  no contenido en  $\mathcal{DD}$  que llamaremos *foco* y un número real  $\varepsilon > 0$ , denominado *excentricidad*, la cónica de directriz  $\mathcal{DD}$ , foco  $F$  y excentricidad  $\varepsilon$  es el conjunto de los puntos  $P$  del plano (el plano  $\mathcal{DD}$  y  $F$ ) en los que se cumple que:

$$\frac{PF}{PD} = \varepsilon$$

— Cuando  $\varepsilon = 1$ , la cónica se llama *parábola*

- Cuando  $\varepsilon < 1$ , la cónica se llama *elipse*
- Cuando  $\varepsilon > 1$ , la cónica se llama *hipérbola*

Hay que señalar que estas curvas tienen gran importancia en la técnica: en muchos diseños de ingeniería se aplican las parábolas, en óptica se utilizan en la construcción de telescopios, en la ingeniería de los radares, en telecomunicaciones, etc.

Pero el lugar donde juegan un papel esencial es en la *Ley de Gravitación Universal* de Newton (Isaac Newton 1642 - 1727) y en las *Leyes de Kepler* (Johannes Kepler 1571 - 1630) que rigen el movimiento de los planetas alrededor del Sol. La 3.<sup>a</sup> de ellas dice expresamente que «la órbita de todo planeta alrededor del Sol es una elipse, con el Sol en uno de sus focos».

Es posible demostrar que las leyes de Kepler son equivalentes a la Ley de Gravitación Universal. O sea, partiendo de las Leyes de Kepler se puede demostrar la Ley de Gravitación Universal y viceversa. Este es uno de los problemas más importantes que ha resuelto la mente humana y que resolvió Newton utilizando el Cálculo que acababa de inventar.

El contenido de cada una de estas monografías puede resumirse así:

- Definición de la curva
- Diferentes construcciones de ellas, bien sea por puntos o por métodos continuos
- Ecuaciones analíticas y análisis de la extensión de cada curva
- Intersección de una cónica con una recta
- Propiedades ópticas de cada curva
- Recta tangente a una cónica y de pendiente dada
- Ecuación de tangentes y normales por un punto
- Construcción de la tangente en un punto de la curva
- Subtangentes y subnormales en un punto. Propiedades
- Polo y polar de una cónica
- Diámetros y sus propiedades; diámetros conjugados
- Ecuación de la cónica referida a un par de diámetros conjugados
- Distintas ecuaciones paramétricas de las cónicas. Ecuación en coordenadas polares
- Longitud de arco y cuadratura de cada curva. Radio de curvatura y ecuación de la evoluta

Para el tratamiento del último punto es indispensable el uso de herramientas del cálculo: derivadas e integrales.

También debe señalarse que en las monografías se emplean ecuaciones de rectas, circunferencias y álgebra de vectores. El tratamiento de estos temas se supone conocido por el lector.

Finalmente quedan pendientes tres problemas:

1. Estudio analítico de las secciones obtenidas al cortar un cono con un plano.
2. Los lugares geométricos representados por la ecuación general de segundo grado en dos variables:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (1)$$



3. Los lugares geométricos representados por la ecuación general de segundo grado en tres variables:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0 \quad (2)$$

Para el estudio de los dos últimos problemas, especialmente el tercero, es indispensable el empleo de valores y vectores propios de una matriz, tema que se estudia en un curso de álgebra lineal.

La primera ecuación puede representar una cónica no centrada, o sea, trasladada y rotada en el plano que puede ser:

- Una circunferencia
- Una elipse
- Una parábola
- Una hipérbola

o una cónica degenerada:

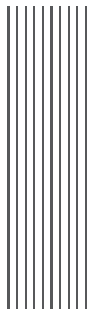
- Dos rectas paralelas
- Dos rectas concurrentes
- Una recta
- Un punto
- $\Phi$  (vacío), o sea que  $\nexists (x, y) \in \mathbb{R}^2$  que satisfacen la ecuación 2

La ecuación puede representar una superficie cuádrica no centrada, o sea, trasladada y rotada a un punto del espacio y puede representar:

- Un cono circular recto
- Un cono elíptico
- Un cono hiperbólico
- Una esfera
- Un elipsoide
- Un hiperboloide de una hoja
- Un hiperboloide de dos hojas
- Un paraboloides hiperbólico

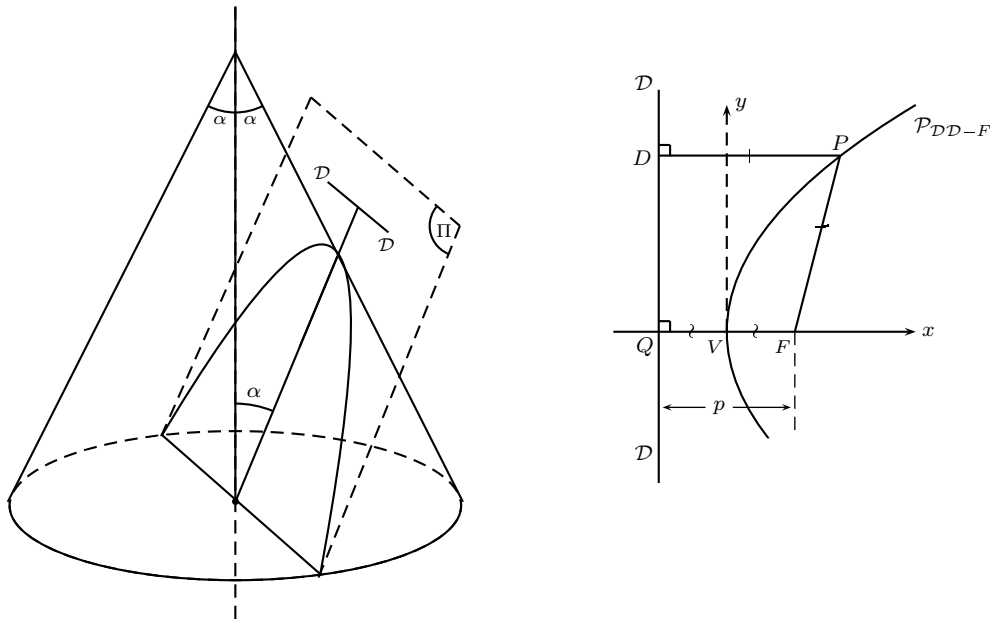
o una cuádrica degenerada:

- Dos planos paralelos
- Dos planos que se cortan
- Un plano
- Un punto
- $\Phi$ , esto es, ningún punto del espacio satisface 2



# Presentación

La parábola es la curva que se obtiene al cortar un cono circular recto con un plano II que atraviesa al eje del cono y, haciendo con dicho eje, un ángulo igual al semiángulo en el vértice del cono (véase Figura 1).



**Figura 1**

También, se la puede definir de la siguiente manera: sea  $DD$  una recta que llamaremos *directriz* y  $F$  un punto que denominamos *el foco*. La parábola de foco  $F$ , directriz  $DD$ :  $\mathcal{P}_{DD-F}$ , es el conjunto:

$$\mathcal{P}_{DD-F} = \{P / PF = PD\}$$

O sea que, un punto del plano está en la  $\mathcal{P}_{DD-F}$ , si y solo si, la distancia al foco es igual a su distancia a la directriz. Esta curva es una de las cónicas (las otras son la circunferencia, la elipse y la hipérbola) que se consiguen también cortando el cono con un plano pero el ángulo del plano y el eje del cono no es  $\alpha$ .

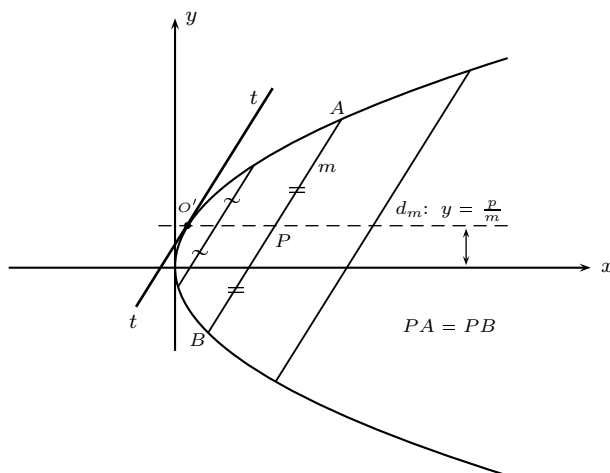
La curva consta de una rama que se abre según el eje  $x$  y que nunca se cierra. El eje  $x$ , la perpendicular por  $F$  a  $DD$ , es un *eje de simetría* de la curva. El punto  $V$  (punto medio de  $\overline{QF}$ ) se llama *el vértice* de la curva.

En el texto se explican varias construcciones por puntos de la curva o por métodos continuos. La distancia entre el foco y la directriz la denotamos por  $p$ , es decir,  $p = d(F, \mathcal{DD})$ .

La ecuación analítica de la curva cuando se la refiere al sistema  $xy$  con origen en el vértice es  $y^2 = 2px$ , y es fácil demostrar que si  $P(h, k) \in \mathcal{P}_{\mathcal{DD}-F}$ , la ecuación de la tangente a la curva por  $P$  es  $ky = p(x + h)$  que se construye así: la ecuación de la curva puede escribirse  $y \cdot y = p(x + x)$ . Para encontrar la ecuación de la tangente por  $P(h, k)$ , se reemplaza una  $y$  por  $k$  y una  $x$  por  $h$ , quedando  $ky = p(x + h)$ .

Así como en la circunferencia, se construye aquí la noción de diámetro.

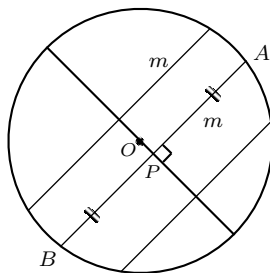
Consideremos el sistema de cuerdas paralelas de la  $\mathcal{P}_{\mathcal{DD}-F}$  y de pendiente  $m$  (véase Figura 2).



**Figura 2**

Los puntos medios de las cuerdas están sobre una paralela al eje de la curva, llamado *el diámetro de la parábola* asociado a las cuerdas de pendiente  $m$  ( $d_m$ ). La ecuación de  $d_m$  es:  $y = \frac{p}{m}$ .

(En una circunferencia, los puntos medios de las cuerdas de pendiente  $m$  se hallan sobre el diámetro de la circunferencia y perpendiculares a las cuerdas. Véase Figura 3).



**Figura 3**

El diámetro  $d_m$  de las cuerdas de pendiente  $m$  tiene propiedades geométricas interesantes. Por ejemplo,

- 1) La tangente a la parábola  $\mathcal{P}$  por el extremo de un diámetro es paralela a las cuerdas.
- 2) Las tangentes a la curva por los extremos de una cuerda de pendiente  $m$  se cortan sobre el diámetro de las cuerdas.

Así mismo, las tangentes a la curva tienen varias propiedades geométricas. Por ejemplo.

- 1) Las tangentes a la parábola por los extremos de una cuerda focal se cortan ortogonalmente sobre la directriz.
- 2) Si desde un punto de la directriz se trazan las tangentes a la curva, los puntos de contacto determinan una cuerda focal.
- 3) La tangente a la parábola por un punto de la curva es la mediatriz del segmento  $\overline{FD}$ , donde  $D$  es el punto en el cual la perpendicular por  $P$  corta a  $DD$ .
- 4) Sea  $tt$  la tangente a la parábola  $\mathcal{P}$  por un punto  $P(h, k) \in \mathcal{P}$ , de ecuación  $y^2 = 2px$ . Llamemos  $P'$  a la proyección de  $P$  sobre el eje  $x$  y  $T$  al punto donde  $tt$  corta al eje  $x$  (véase Figura 4).

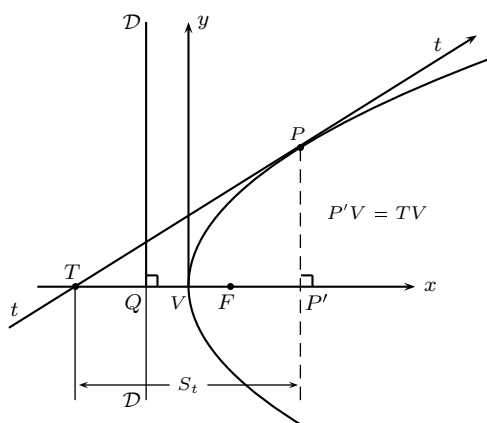


Figura 4

El segmento  $TP'$  se llama *la subtangente* a  $\mathcal{P}$  por  $P$ , y se escribe  $S_t = TP'$ . Entonces,  $TV = VP'$ , lo cual implica que el vértice de la parábola divide a la subtangente en dos segmentos iguales.

La *propiedad focal de la parábola*, es ampliamente usada en la construcción de telescopios, radares y antenas: *todo rayo de luz que sale del foco, al tocar a la parábola, se refleja paralelamente al eje de la curva*, y viceversa, *todo rayo de luz que venga paralelamente al eje de la parábola, se refleja pasando por el foco* (véase Figura 5).

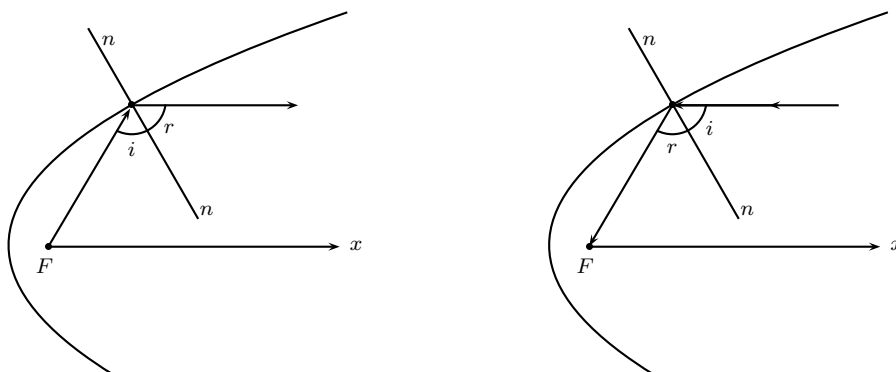


Figura 5

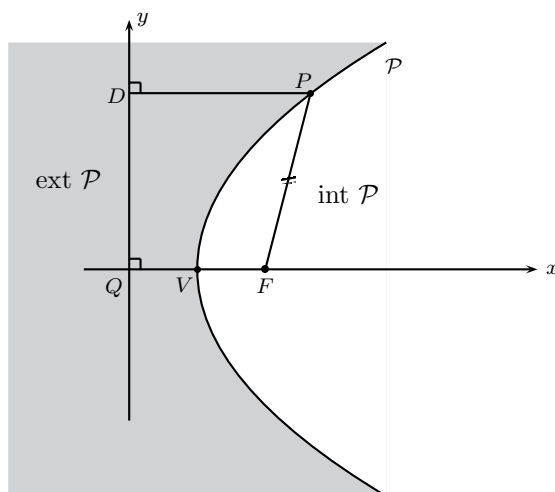
La parábola  $\mathcal{P}_{DD-F}: y^2 = 2px$  determina en el plano tres regiones (véase Figura 6):

$$\text{int } \mathcal{P} = \{P / PF < PD\} = \{(x, y) / g(x, y) = y^2 - 2px < 0\}$$

$$\mathcal{P} = \{P / PF = PD\} = \{(x, y) / g(x, y) = y^2 - 2px = 0\}$$

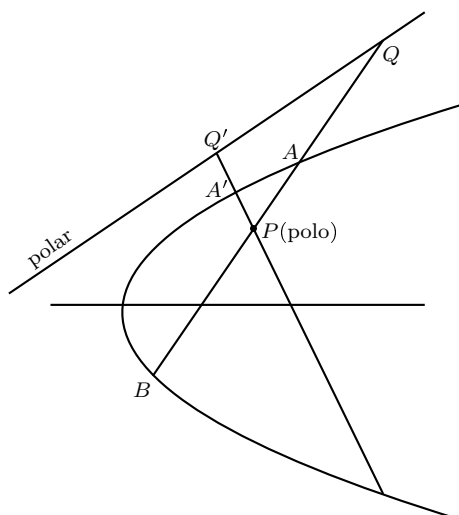
$$\text{ext } \mathcal{P} = \{P / PF > PD\} = \{(x, y) / g(x, y) = y^2 - 2px > 0\}$$

Estas tres regiones particionan el plano.



**Figura 6**

Otra noción que será establecida ampliamente en esta monografía es la de *polo y polar en la parábola*.



**Figura 7**

Tomemos un punto  $P(h, k)$ . Por ejemplo, en el interior de  $\mathcal{P}$ . Dicho punto lo llamaremos *el polo*. Consideremos ahora las cuerdas que pasan por  $P$ , los conjugados armónicos de  $P$  respecto a  $\overline{AB}$ , donde  $\overline{AB}$  es una cuerda que pasa por  $P$  se encuentran sobre una recta de ecuación  $ky = p(x + h) \subset \text{ext } \mathcal{P}$ , llamada *la polar* de  $P$  respecto a  $\mathcal{P}$  (véase Figura 7).

Entre la polar y el polo, existen propiedades geométricas bastante interesantes, por ejemplo, la polar al foco es la directriz.

Cuando el polo se toma sobre la parábola  $\mathcal{P}$ , la polar es la tangente por  $P$  a  $\mathcal{P}$ . Si desde los puntos de la polar se trazan tangentes a  $\mathcal{P}$ , los puntos de contacto determinan cuerdas que se cortan en el polo.

En el texto se presentan varias demostraciones de las tangentes a  $\mathcal{P}$  desde un punto exterior. Pero entre todas, la más simple es la siguiente: se trazan desde  $P$  dos secantes  $PAB$  y  $PA'B'$  y se considera el cuadrilátero  $PABA'B'$  (véase Figura 8); los lados opuestos  $\overline{AA'}$  y  $\overline{BB'}$  se cortan en  $M$ , se dibujan las diagonales de dicho cuadrilátero, las cuales se cortan en  $Q$ . Finalmente, unimos  $M$  con  $Q$ . La recta  $\overline{MQ}$  corta a  $\mathcal{P}$  en  $T_1$  y  $T_2$  que son los puntos de contacto de las dos tangentes a  $\mathcal{P}$  trazadas desde  $P$ .

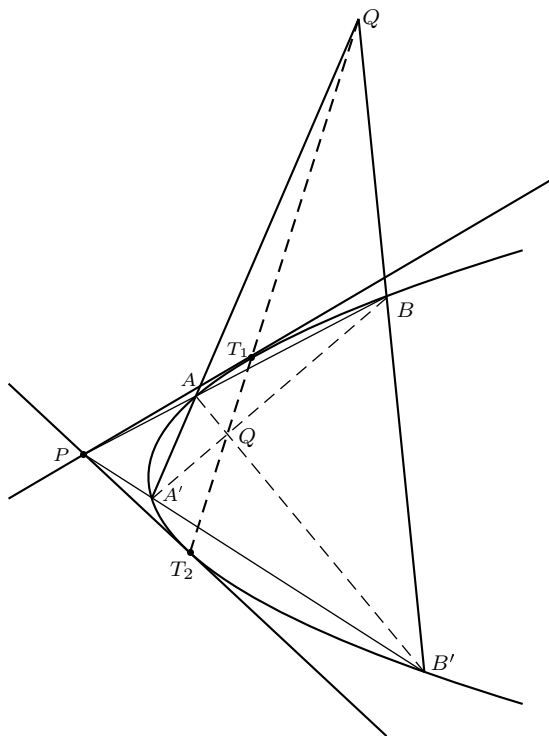


Figura 8

Asociado al problema de las tangentes desde  $P$  a  $\mathcal{P}$ , se tienen los *teoremas de Poncelet* que se ilustran en la portada del texto. Sean  $\overrightarrow{PT_1}$  y  $\overrightarrow{PT_2}$  las dos tangentes trazadas desde  $P$  a  $\mathcal{P}$  (véase Figura 9).

**Primer teorema de Poncelet:** la recta que une el foco  $F$  con el punto  $P$ , es bisectriz del ángulo que forman los dos radios vectores que van a los puntos de contacto. O sea  $\hat{F}_1 = \hat{F}_2$ .

**Segundo teorema de Poncelet:** el ángulo que hace  $\overline{PF}$  con una de las tangentes a  $\mathcal{P}$  trazada desde  $P$  es igual al ángulo que hace la otra tangente con la paralela al eje de  $\mathcal{P}$  trazada por  $P$ , es decir,  $\hat{\omega}_1 = \hat{\omega}_2$ .

Estos teoremas, permiten, tenida una tangente, construir la otra.

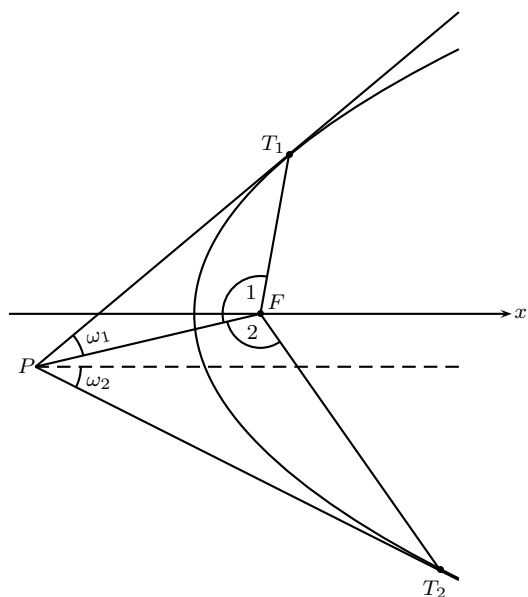


Figura 9

Entre todas las construcciones de la parábola por puntos, es bueno destacar una bastante ingeniosa: supongamos que se conocen las dos tangentes  $\overline{PT_1}$  y  $\overline{PT_2}$ , trazadas desde  $P$ , y que, se conocen el vértice y el eje ( $x$ ) de la curva (véase Figura 10).

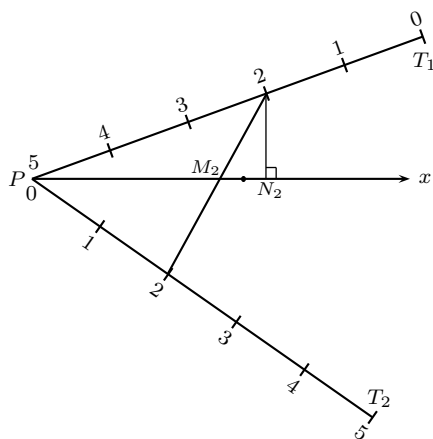


Figura 10

Se dividen  $\overline{PT_1}$  y  $\overline{PT_2}$  cada uno en 5 partes iguales, por ejemplo, y se unen los puntos de división como se señala en la Figura 10. Entonces se demuestra que las rectas 1-1, 2-2, etc. son tangentes a  $\mathcal{P}$ . El punto de contacto, por ejemplo, el de 2-2,  $t_2$ , se determina así: sea  $M_2$  el punto donde 2-2 corta al eje  $x$ ; se toma  $N_2$  de modo que  $VN_2 = M_2V$  y por  $N_2$  se traza la perpendicular al eje  $x$  hasta cortar a 2-2 en  $t_2$ . El punto  $t_2$  es el punto de contacto de la tangente 2-2 a  $\mathcal{P}$ . Al unir los puntos  $t_1, t_2, t_3$ , etc., se obtiene una construcción de  $\mathcal{P}$  por puntos.

Supongamos que tomamos un cono circular recto y lo cortamos con un plano perpendicular al eje del cono (véase Figura 11). Se obtiene así, una circunferencia de centro en  $O$  y diámetros perpendiculares,  $\overline{BC}$  y  $\overline{KG}$ .

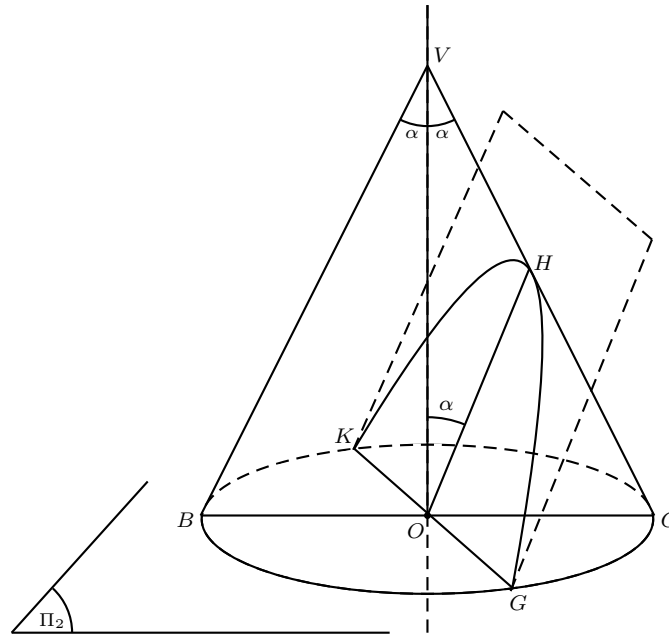


Figura 11

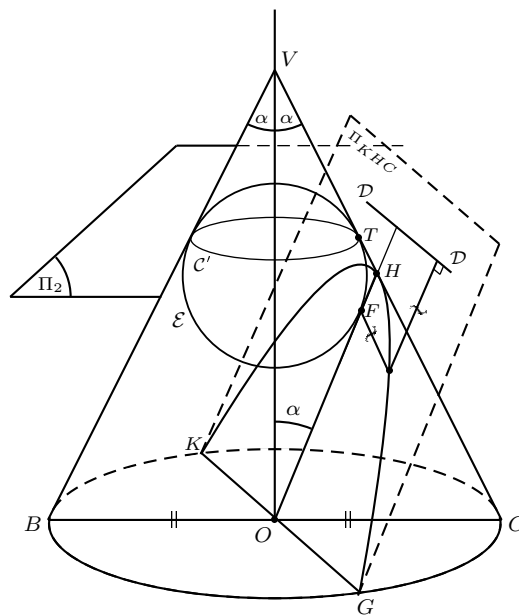


Figura 12

Consideremos un punto  $H$  de la generatriz  $\overrightarrow{VC}$  del cono. Los puntos  $K, H, G$  definen un plano y el ángulo  $\widehat{VOH}$  que hace dicho plano con el eje del cono varía a medida que el punto  $H$  se



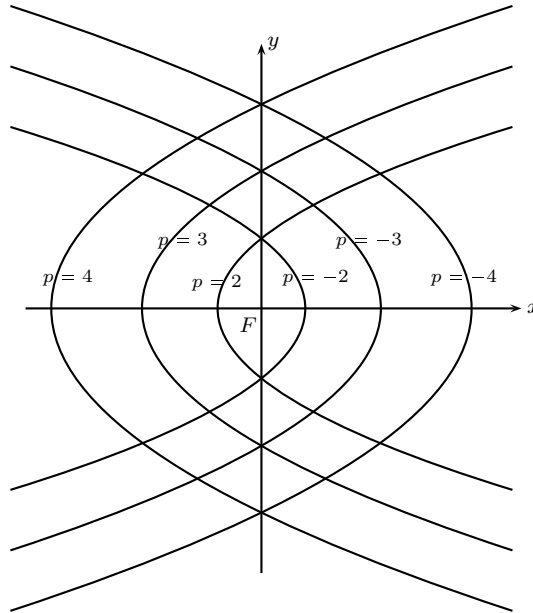
desliza sobre  $\overline{VC}$ ; llega un momento en que el ángulo se hace igual a  $\alpha$  que es el semiángulo en el vértice del cono. La sección de dicho plano con el cono es una parábola de eje  $\overline{OH}$ . Este es el famoso *Teorema Dandelin*. El foco y la directriz se determinan así: se considera el  $\triangle VBC$  y  $\overline{OH}$  la paralela media de dicho triángulo. Se traza la circunferencia tangente a  $\overline{HB}$ ,  $\overline{VH}$  y  $\overline{HO}$ ; el punto de contacto  $T$  de esta circunferencia con  $\overline{OH}$  es el foco de la parábola (véase Figura 12).

Al girar la circunferencia alrededor del eje del cono, genera una esfera tangente al cono y el punto de contacto  $T$  de la circunferencia con  $\overline{VH}$  genera otra circunferencia  $C'$  contenida en el plano  $\Pi_2$ . La intersección del plano  $\Pi_{KGH}$  con  $\Pi_2$  proporciona la directriz de la parábola. Es posible definir, a través de dos familias de parábolas homofocales, un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales que ocupa todo el plano.

La primera familia de parábolas tiene la forma

$$y^2 = 2px + p^2, \quad p > 0, \quad x \geq -\frac{p}{2}$$

Todas tienen el mismo foco  $F$ , situado sobre el origen, se abren siempre hacia la derecha. Si  $p$  aumenta, el vértice  $V$  se desplaza hacia la izquierda, lo mismo que la directriz (véase Figura 13).



**Figura 13**

La otra familia, son las parábolas de ecuación:

$$y^2 = 2px + p^2, \quad p < 0, \quad x \leq \frac{p}{2}$$

Todas las parábolas de esta familia tienen foco  $F$ , el origen, se abren hacia la izquierda y a medida que  $p$  disminuye, el vértice y la directriz se corren hacia la derecha.

Por cada punto  $P(h, k)$ , pasa una curva de cada familia y se cortan perpendicularmente suministrando de esta manera, un sistema de coordenadas curvilíneo perpendicular que se utiliza en física-matemática.

Posterior a esto, se considera el problema de la cuadratura de la parábola. O sea, el procedimiento mediante el cual (*método de exhaustión*, resumido a continuación) Arquímedes calculó el área de un segmento parabólico, esto es, el área de la región comprendida entre la parábola y una cuerda de la curva (véase Figura 14).

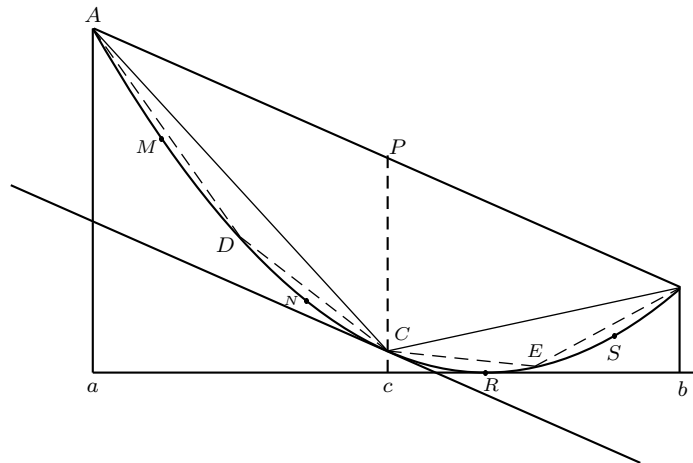


Figura 14

**Primera aproximación:** tomó un triángulo  $ABC$ , donde  $C$  es el punto de la curva en el que la tangente es paralela a la cuerda  $\overline{AB}$ . Luego, proyectó los puntos  $A$  y  $B$  sobre el eje de la parábola y llamó  $c$  al punto medio de  $ab$ ; seguidamente por  $c$ , trazó la perpendicular al eje  $x$  hasta cortar en  $C$  el arco de la curva. Entonces, demostró que la tangente por  $C$  es paralela a  $\overline{AB}$ .

Prolongó  $\overline{cC}$  hasta cortar a  $\overline{AB}$  en  $P$ . Entonces:

$$ACP = BCP = \frac{1}{2}ABC,$$

$$1.^a \text{ aproximación} = ACP + BCP = ABC$$

**Segunda aproximación:** inscribió en la curva el polígono  $ADCEB$ , donde  $D$  y  $E$  son los puntos en los cuales la tangente a la curva es paralela a  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$  respectivamente.

Arquímedes demostró (en el caso nuestro utilizamos geometría analítica) que:

$$ADC = \frac{1}{4}ACP = \frac{1}{4} \frac{ABC}{2} = \frac{ABC}{8}$$

y que:

$$BCE = \frac{1}{4}BCP = \frac{1}{4} \frac{ABC}{2} = \frac{ABC}{8}$$

Así que:

$$\begin{aligned} 2.^a \text{ aproximación} &= 1.^a \text{ aproximación} + (ADC + BCE) \\ &= ABC + \left( \frac{ABC}{8} + \frac{ABC}{8} \right) \\ &= ABC + \frac{1}{4}ABC \end{aligned}$$

**Tercera aproximación:** ahora inscribió el polígono  $AMDNCRESB$ , donde  $M, N, R, S$  son los puntos donde la tangente es paralela a  $\overline{AD}, \overline{DC}, \dots$

$$\begin{aligned} 3.^a \text{ aproximación} &= 2.^a \text{ aproximación} + (AMD + DNC) + (CRE + ESB) \\ &= \left( ABC + \frac{1}{4}ABC \right) + \frac{1}{4}ADC + \frac{1}{4}CER \\ &= ABC + \frac{1}{4}ABC + \frac{1}{4}(ADC + CEB) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ABC + \frac{1}{4}ABC + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}ABC\right) \\
&= ABC + \frac{1}{4}ABC + \frac{1}{4^2}ABC \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Continuando este proceso, se encuentra que:

$$\begin{aligned}
\text{Segmento parabólico } ABC &= ABC \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) \\
&= ABC \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}}\right) = \frac{4}{3}ABC.
\end{aligned}$$

La monografía termina con el estudio de la noción de centro de curvatura y radio de curvatura de la parábola en un punto, la evoluta de la parábola, o sea, la curva descrita por el centro de curvatura cuando se recorre un arco de la curva. Seguidamente, se calcula la longitud de arco de la parábola, comprendido por el lado recto. Para hacer esto, son necesarios conocimientos de cálculo diferencial e integral y la aplicación de técnicas que aparecen en textos referenciados en la bibliografía.

El material gráfico de línea presente en esta obra fue elaborado por el autor.

# 1 La parábola

## 1.1 Definición

Sea  $\mathcal{DD}$  una recta dada llamada *directriz* y  $F$  un punto dado del plano que no está en la directriz llamado *foco*. Se define la parábola de directriz  $\mathcal{DD}$  y foco  $F$ , denotada por  $\mathcal{P}_{\mathcal{DD}-F}$ , como el lugar de los puntos  $P$  del plano, cuya distancia al foco es igual a su distancia a la directriz (véase Figura 1.1). O sea,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{DD}-F} = \{P \text{ tales que } PF = PD\} = \left\{ P \mid \frac{PF}{PD} = 1 \right\}$$

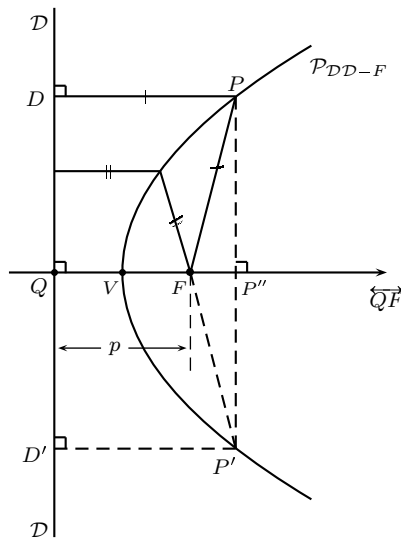


Figura 1.1 Parábola  $\mathcal{P}_{\mathcal{DD}-F}$  con  $\mathcal{DD}$ : directriz y  $F$ : foco

### Observaciones:

- 1) Al trazar por  $F$  la recta perpendicular  $\overleftrightarrow{QF}$  a la directriz, se tiene que  $p = QF = d(F, \mathcal{DD})$  es la distancia foco-directriz. Sea  $V$  el punto medio del segmento  $\overline{QF}$ . Como  $VF = VQ$ ,  $V \in \mathcal{P}_{\mathcal{DD}-F}$ , lo cual demuestra que  $\mathcal{P}_{\mathcal{DD}-F} \neq \emptyset$ . El punto  $V$  se denomina *el vértice* de la parábola  $\mathcal{P}_{\mathcal{DD}-F}$ .
- 2) El lugar es simétrico respecto a la recta  $\overleftrightarrow{QF}$ . En efecto, sea  $P'$  el simétrico de  $P$  respecto a  $\overleftrightarrow{QF}$  (véase Figura 1.1). Entonces  $\overline{PP''} = \overline{P''P'}$  y, por tanto,  $\triangle PP''F \cong \triangle P'P''F$ . Luego,

$$P'F = PF$$

y como

$$P'D' = PD,$$

$$\frac{P'F}{P'D'} = \frac{PF}{PD} = 1$$

lo cual demuestra que  $P' \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}\mathcal{D}-F}$ .

- 3) Llamemos  $\alpha$  al plano de la hoja. Fijada la directriz  $\mathcal{D}\mathcal{D}$  y el foco  $F$ , se analiza a continuación los valores que toma la función:

$$f : \alpha - \mathcal{D}\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$P \longrightarrow f(P) = \frac{PF}{PD} = \lambda$$

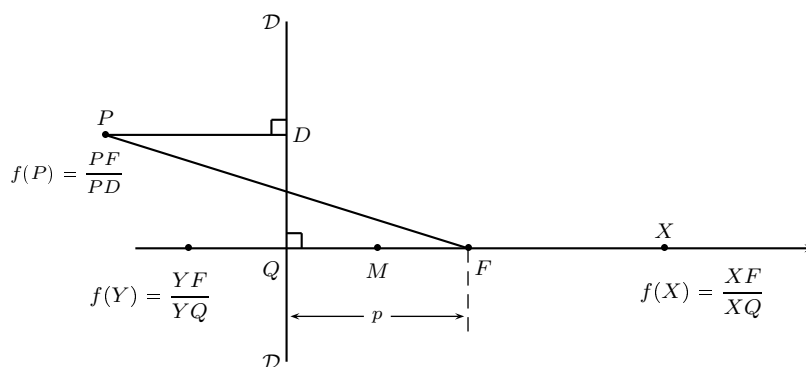


Figura 1.2 Definición de la función  $f(P) = \frac{PF}{PD}$

Se analiza primero cómo varía  $\lambda$  cuando  $P$  se desplaza sobre la recta  $\overleftrightarrow{FQ} - \{Q\}$ . Sea  $M$  el punto medio de  $\overline{QF}$ .

- i) Es claro que  $f(M) = 1$  y que  $f(F) = 0$ .
- ii) Para  $P$  a la derecha de  $F$  (véase Figura 1.3):

$$\lambda = \frac{PF}{PQ} = \frac{PF}{PF + p} = \frac{1}{1 + \frac{p}{PF}} < 1$$

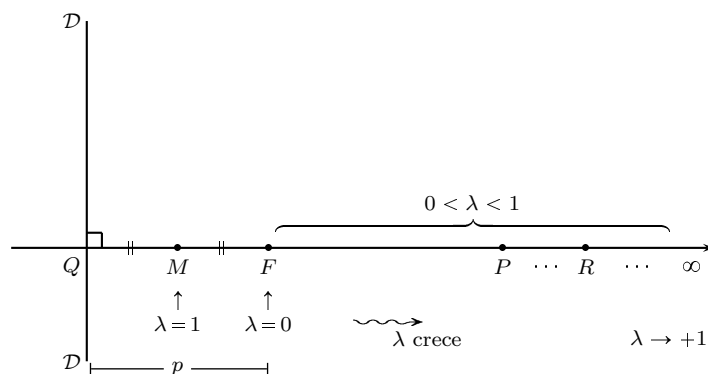


Figura 1.3 Variación de  $f(P) = \lambda$ , si  $P \rightarrow \infty$

y

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \lambda = \lim_{PF \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{p}{PF}} = 1$$

$$\lim_{P \rightarrow F^+} \lambda = \lim_{PF \rightarrow 0} \frac{PF}{PF + p} = 0$$

La función  $f$  es estrictamente creciente cuando  $P$  se aleja hacia la derecha.

En efecto, sean  $P$  y  $R$  tales que  $PF < RF$  (véase Figura 1.3). Entonces:

$$\frac{p}{RF} < \frac{p}{PF}$$

Luego,

$$1 + \frac{p}{RF} < 1 + \frac{p}{PF}$$

y, por tanto,

$$f(P) = \frac{1}{1 + \frac{p}{PF}} < \frac{1}{1 + \frac{p}{RF}} = f(R)$$

iii) Considerando el caso en que  $P$  está entre  $M$  y  $F$  (véase Figura 1.4).

En este caso,  $PF < PQ$  y, por tanto,  $\lambda = \frac{PF}{PQ} < 1$ .

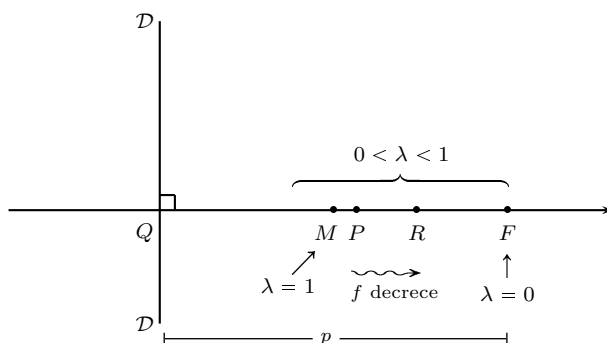


Figura 1.4 Variación de  $f(P) = \lambda$ , si  $P$  está entre  $M$  y  $F$

$$\lambda = \frac{PF}{PQ} = \frac{p - PQ}{PQ} = \frac{p}{PQ} - 1,$$

$$\lim_{P \rightarrow F^-} \lambda = \lim_{\substack{P \rightarrow F^- \\ PQ \rightarrow p}} \left( \frac{p}{PQ} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{P \rightarrow M^+} \lambda = \lim_{\substack{P \rightarrow M^+ \\ PQ \rightarrow p/2}} \left( \frac{p}{PQ} - 1 \right) = \frac{p}{p/2} - 1 = 1$$

La función decrece cuando  $P$  se mueve de  $M \rightarrow F$ .

En efecto, sean  $P, R \in \overline{MF} - \{M, F\}$  y con  $P$  entre  $M$  y  $R$  (véase Figura 1.4). Es claro que  $PQ < RQ$ . Luego,

$$\frac{p}{PQ} > \frac{p}{RQ}$$

$$\lim_{P \rightarrow Q^-} \lambda = \lim_{\substack{P \rightarrow Q^- \\ PQ \rightarrow 0}} \left( \frac{p}{PQ} + 1 \right) = \infty$$

La función es estrictamente creciente cuando  $P \rightarrow Q$ .

En efecto, sean  $P$  y  $R$  (véase Figura 1.6). Es claro que  $PQ > RQ$ . Luego,

$$\frac{p}{PQ} < \frac{p}{RQ}$$

y, por tanto,

$$f(P) = \frac{p}{PQ} + 1 < \frac{p}{RQ} + 1 = f(R),$$

esto es:

$$f(R) > f(P)$$

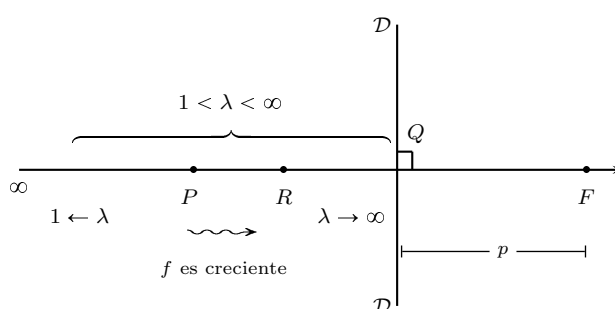


Figura 1.6 Variación de  $f(P) = \lambda$ , si  $P$  está a la izquierda de  $Q$

En resumen,

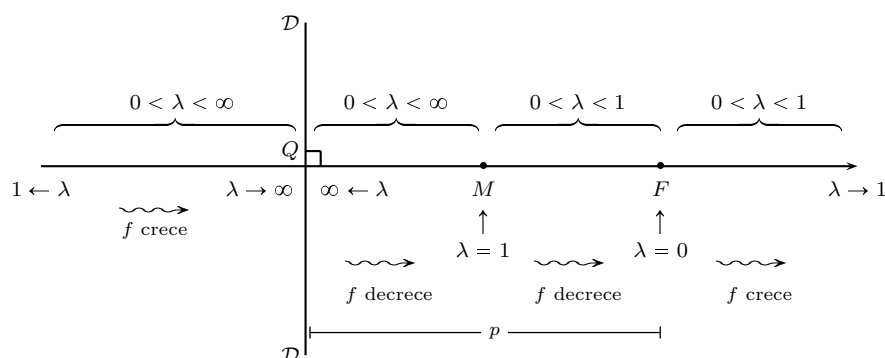


Figura 1.7 Resumen de la variación de la función  $f(P) = \lambda$ , con  $P$  sobre la recta  $\overleftrightarrow{FQ} - Q$

El comportamiento de la función  $f$  cuando  $P$  se mueve sobre la recta  $\overleftrightarrow{FQ}$  también puede verse en la Figura 1.8.

- vi) Un hecho importante de todo este análisis, es que, dado un número real  $0 < \varepsilon < 1$ , existen dos puntos únicos  $P$  y  $R$  en la recta  $\overleftrightarrow{FQ}$  (véase Figura 1.9),  $P$  entre  $M$  y  $F$  y  $R$  a la derecha de  $F$  tales que:

$$\frac{PF}{PQ} = \frac{RF}{RQ} = \varepsilon$$

Esos dos puntos  $P$  y  $R$  se llaman los *conjugados armónicos* de  $Q$  y  $F$  para  $\varepsilon$  ( $\varepsilon < 1$ ).







Supongamos que  $\varepsilon = \frac{3}{5}$ .

Se traza por  $Q$  una semirecta auxiliar  $y$ . Con una abertura de compás fija se determinan 5 puntos sobre  $y$ , y entre ellos se señalan  $a$  y  $b$  como se muestra en la Figura 1.10. Se une  $b$  con  $F$  y por  $a$  se traza la paralela a  $\overline{bF}$ , la cual corta a la recta  $\overleftrightarrow{QF}$  en  $P$ . Por el teorema de Thales,  $\frac{PF}{PQ} = \frac{3}{5}$ .

Para determinar  $R$  se traza por  $Q$  otra semirecta  $z$  y se determinan con ayuda del compás 5 puntos igualmente distanciados entre los cuales se marcan  $c$  y  $d$  como se señala en la Figura 1.10. Luego, se une  $c$  con  $F$  y por  $d$  se traza  $\overline{dR}$  paralela a  $\overline{cF}$  ( $\overline{dR} \parallel \overline{cF}$ ),  $R \in \overleftrightarrow{QF}$ . De nuevo, por el teorema de Thales,  $\frac{RF}{RQ} = \frac{3}{5}$ .

Igualmente, dado un  $1 < \varepsilon < \infty$ , existen dos puntos únicos  $X, Y$  en la recta  $\overleftrightarrow{QF}$ ,  $X$  entre  $Q$  y  $M$  y  $Y$  a la izquierda de  $Q$  de modo que:

$$\frac{XF}{XQ} = \frac{YF}{YQ} = \varepsilon$$

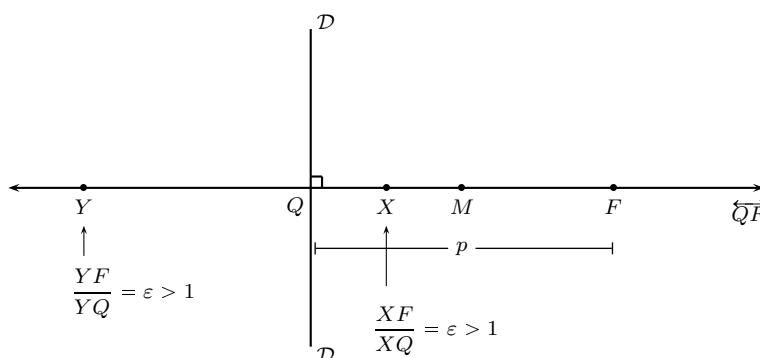


Figura 1.11  $X$  e  $Y$  conjugados armónicos de  $Q$  y  $F$  para  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 1$ )

$X$  e  $Y$  se llaman los *conjugados armónicos* de  $Q$  y  $F$  para  $\varepsilon$ , ( $\varepsilon > 1$ ).

Supongamos que  $\varepsilon = \frac{5}{3}$ . Los correspondientes puntos  $X$  e  $Y$  se construyen como lo indica la Figura 1.12.

- vii) Una última observación sobre la función  $f$ . Si estando en un punto cualquiera  $P \in \overleftrightarrow{QF}$ , se avanza sobre la recta paralela a  $DD$  trazada por  $P$ , el valor de  $\lambda = \frac{PF}{PD}$  empieza a crecer (véase Figura 1.13).

Esto resulta claro ya que:

$$f(P_1) = \frac{P_1F}{P_1D_1}$$

y

$$f(P_2) = \frac{P_2F}{P_2D_2}$$

Como,

$$P_1D_1 = P_2D_2$$

además,

$$P_1F < P_2F$$

se tiene que:

$$f(P_1) < f(P_2)$$



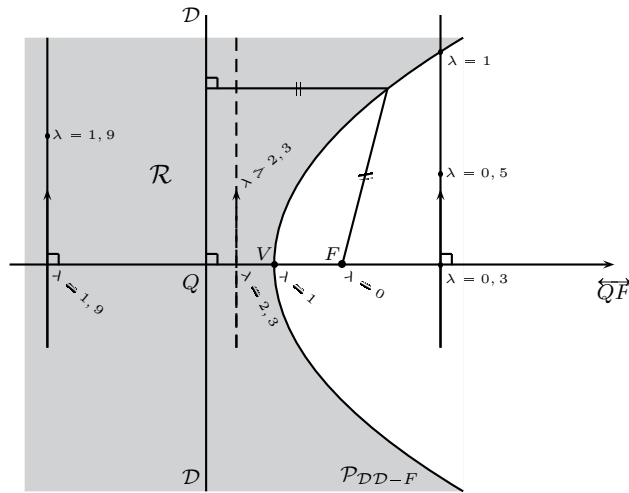


Figura 1.14 En la región sombreada  $\mathcal{R}$ , no existen puntos de la curva

Luego,

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

Por tanto,

$$x^2 + \frac{p^2}{4} + px = x^2 + \frac{p^2}{4} - px + y^2$$

O sea que:

$$y^2 = 2px \tag{1.1}$$

Se demuestra así que si  $P(x, y) \in \mathcal{P}_{DD-F}$ , sus coordenadas satisfacen la ecuación (1.1).

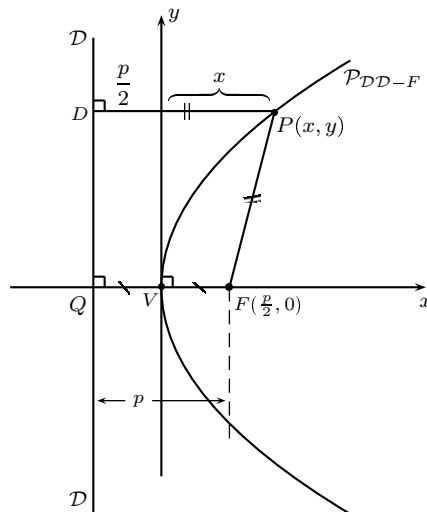


Figura 1.15 Ecuación de la parábola respecto al sistema  $xy$ , con foco sobre el eje  $x$

Recíprocamente, se puede demostrar que si  $P(X, Y)$  es un punto del plano cuyas coordenadas  $(X, Y)$  satisfacen (1.1), entonces  $P \in \mathcal{P}_{DD-F}$ .

En efecto, si  $P(X, Y)$  satisfacen la ecuación (1.1). Entonces:

$$Y^2 = 2pX \tag{1.2}$$

Ahora,  $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}\mathcal{D}-F}$  si  $PF = PD$ .

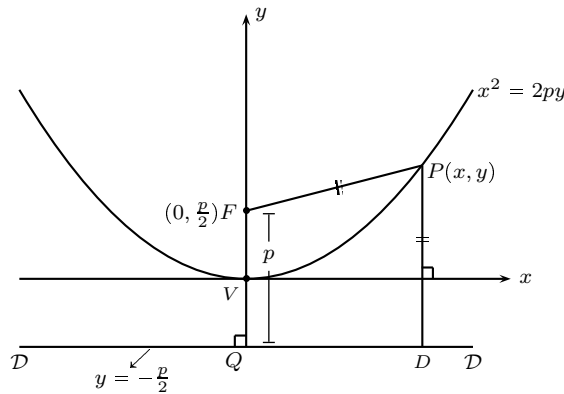
$$\begin{aligned} PF &= \sqrt{\left(X - \frac{p}{2}\right)^2 + Y^2} \\ &= \sqrt{X^2 + \frac{p^2}{4} - pX + Y^2} \stackrel{(1.2)}{=} \sqrt{X^2 + \frac{p^2}{4} - pX + 2pX} \\ &= \sqrt{X^2 + \frac{p^2}{4} + pX} = \sqrt{\left(X + \frac{p}{2}\right)^2} = X + \frac{p}{2} = PD \end{aligned}$$

Se concluye entonces que:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{D}\mathcal{D}-F} = \left\{ P \mid \frac{PF}{PD} = 1 \right\} = \{(x, y) \mid y^2 = 2px\}$$

**Ejercicio 1.1** Demostrar que dado un punto  $B(a, b)$  con  $a > 0$  y  $b > 0$ , por el punto  $B$  pasa una parábola cuyo eje de simetría es el eje  $y$ , y de ecuación  $x^2 = \frac{a^2}{b^2}y$ , con foco  $F\left(0, \frac{a^2}{4b}\right)$  y directriz  $\mathcal{D}\mathcal{D}$  la recta  $y = -\frac{a^2}{4b}$ .

**Ejercicio 1.2** Demostrar que la ecuación de la parábola, de foco  $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$  y de directriz la ecuación  $y = -\frac{p}{2}$  es  $x^2 = 2py$  (véase Figura 1.16).

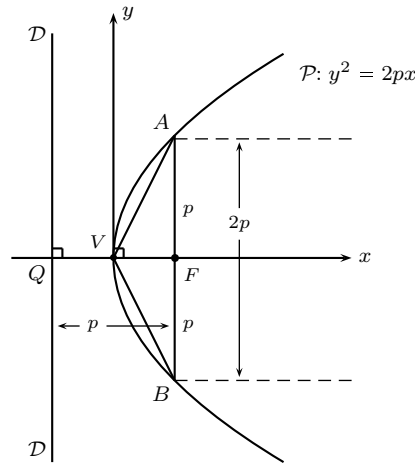


**Figura 1.16** Parábola de foco en  $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ , y directriz  $\mathcal{D}\mathcal{D}: y = -\frac{p}{2}$

**Ejercicio 1.3** En cada uno de los siguientes ejercicios, hallar las coordenadas del foco de la parábola, la ecuación de la directriz y dibujar la curva con todos sus elementos.

- a)  $y^2 = 6x$ .
- b)  $y^2 + 8x = 0$ .
- c)  $x^2 = 8y$ .
- d)  $x^2 + 10y = 0$ .

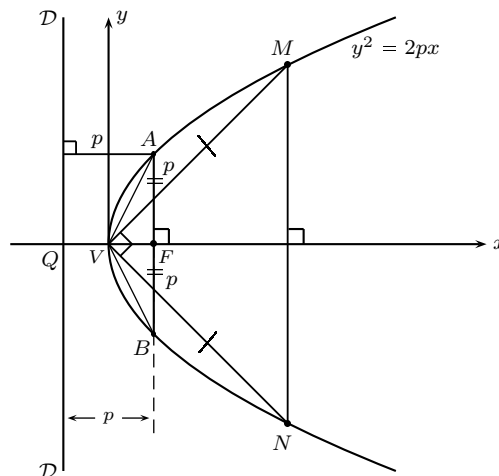
**Ejercicio 1.4** Se tiene la parábola  $\mathcal{P}$  de ecuación  $y^2 = 2px$ . La cuerda focal  $\overline{AB}$  que es perpendicular por  $F$  al eje de la parábola se llama el lado recto (lado recto) de la curva. Demostrar que  $\overline{AB} = 2p$ .



**Figura 1.17** El lado recto  $\overline{AB} = 2p$

Encuentre el valor del ángulo  $\widehat{AVB}$ . Si conocemos el lado recto podemos construir rápidamente dos puntos de la curva lo que ayuda en el trazado de la misma.

**Ejercicio 1.5** Un triángulo rectángulo isósceles  $MVN$ , con  $\widehat{V} = 90^\circ$  está situado simétricamente respecto al eje de simetría de la parábola  $y^2 = 2px$ , de foco  $F$  y directriz  $DD$ . Hallar las coordenadas de  $M$  y  $N$  (véase Figura 1.18).



**Figura 1.18**  $\overline{AB}$  es el lado recto de  $\mathcal{P}: y^2 = 2px$ .  $\widehat{MVN} = 90^\circ$ ,  $M$  y  $N$  son simétricos respecto a  $O$

**Ejercicio 1.6** Determinar la ecuación de las siguientes parábolas. En cada caso dibuje la curva y señale sus elementos: foco, vértice y directriz.

- a) El vértice está en el origen y el foco es  $F(2,0)$ .

- b) El foco es  $F(-3,0)$  y el vértice está en el origen.  
 c) El vértice está en el origen y el foco es  $F(0,5)$ .  
 d) El foco es  $F(0,-5)$  y el vértice está en el origen.

**Ejercicio 1.7** La directriz de una parábola es la recta  $x = 4$ . Si el vértice está en el origen, hallar las coordenadas del foco y la ecuación de la curva. Grafíquela.

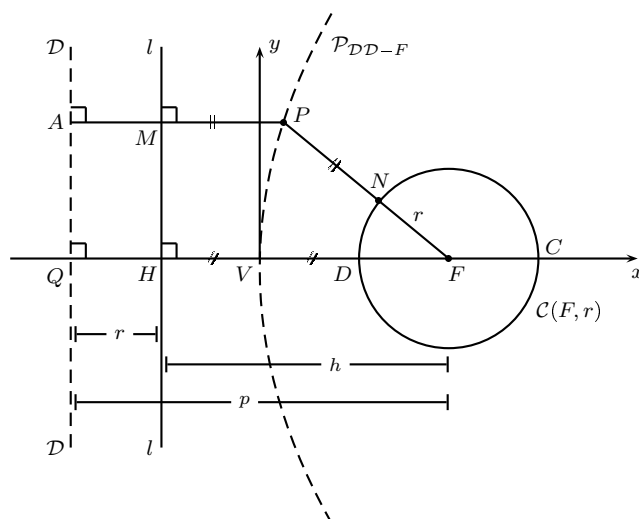
**Ejercicio 1.8** Una parábola pasa por el origen de coordenadas, su eje de simetría es el eje  $y$ , y la ecuación de la directriz es  $y + p = 0$ . Obtenga la ecuación de la curva y dibújela.

### Problema 1.1

Se tiene una circunferencia  $\mathcal{C}(F; r)$  y una recta  $ll \subset \text{ext } \mathcal{C}(F; r)$ . Determinar el lugar geométrico de los puntos  $P$  tales que:

$$d(P, \mathcal{C}(F; r)) = d(P, ll),$$

esto es, determinar  $\{P / PN = PM\}$  (véase Figura 1.19).



**Figura 1.19** Conjunto de los puntos  $P$ , tales que  $d(P, \mathcal{C}(F; r)) = d(P, ll)$ . La línea punteada contiene los puntos  $P$  tales que  $d(P, \mathcal{C}(F; r)) = d(P, l)$

### Solución:

Se baja desde  $F$  la perpendicular a  $ll$ , la cual corta a  $ll$  en  $H$  y a la circunferencia  $\mathcal{C}(F; r)$  en  $D$ . Es claro que si  $V$  es el punto medio de  $HD$ ,  $V$  está en el lugar buscado.

Sea  $P$  un punto del lugar (véase Figura 1.19). Se une  $P$  con  $F$  y desde  $P$  se baja  $PM \perp ll$ .  $\overline{PF}$  corta a la  $\mathcal{C}(F; r)$  en  $N$ . Entonces  $\overline{PM} = \overline{PN}$  y es claro que si se traza la recta  $DD$  paralela a la recta  $ll$  ( $DD \parallel ll$ ), a una distancia  $r$ ,

$$\begin{aligned} \overline{PA} &= r + d(P, ll) = r + PM, \\ \overline{PF} &= r + d(P, \mathcal{C}(F; r)) = r + \overline{PN}. \end{aligned}$$

Luego,  $PF = PA$ , lo cual demuestra que los puntos del lugar buscado están en la  $\mathcal{P}_{DD-F}$ .

Como  $HV = VD$ ,

$$VQ = r + HV$$

y

$$VF = r + VD$$

$VQ = VF$ , esto prueba que  $V \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}\mathcal{D}-F}$ .

Se traza por  $V$ , la recta paralela a  $ll$  y se toman ejes  $xy$  con origen en  $V$  (véase Figura 1.19). La ecuación del lugar es  $y^2 = 2px$ , donde:

$$p = d(F; \mathcal{D}\mathcal{D}) = r + h = r + d(F; ll)$$

Así que la ecuación del lugar es:

$$y^2 = 2[r + d(F; ll)]x$$

Cuando  $ll$  es tangente a la  $\mathcal{C}(F, r)$ , la situación a parece representada en la Figura 1.20.

Si  $P$  es un punto del lugar,  $PM = PN$ , y por tanto,

$$PM + MA = PN + NF$$

O sea que  $PF = PA$ , lo cual prueba que  $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}\mathcal{D}-F}$ . En este caso  $d(F, \mathcal{D}\mathcal{D}) = p = 2r$  y la gráfica del lugar es la parábola  $\mathcal{P}_{\mathcal{D}\mathcal{D}-F}$  de vértice  $V$  y ecuación:

$$y^2 = 2px,$$

esto es,

$$y^2 = 2(2r)x = 4rx$$

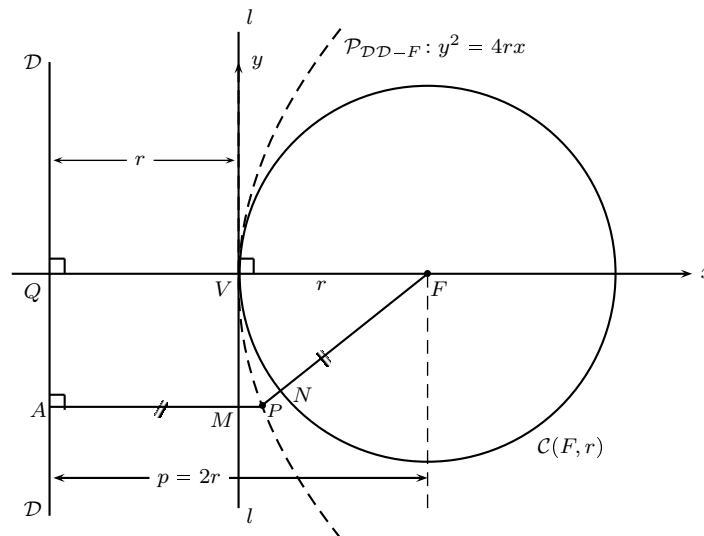
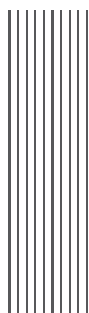


Figura 1.20 Si  $\overline{PF} = \overline{PA}$ , entonces  $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}\mathcal{D}-F}$

### Problema 1.2

Se tiene un arco de parábola  $\mathcal{P}$  donde,  $AB = l$  es la luz y  $VH = h$  es la altura del arco;  $l$  y  $h$  conocidos. Se sabe además que el vértice  $V$  es dado. Determinar la ecuación de la curva con respecto a los ejes  $xy$ .





## Bibliografía

- Bowser, Van Nostrand (S.F). *An Elementary Treatise On Analytic Geometry*. New York.
- De Greiff, L. (1968). *Geometría analítica plana y del espacio*. Bedout.
- Efimov, N. V. (1970). *Formas cuadráticas y matrices*. Moscú: Mir.
- Frere, R. y Gastam, B. (1954). *Cours de geometrie analytique*. Imprimerie de la Salle.
- H. Kindle, J. (S.F). *Teoría y problemas de geometría analítica plana y del espacio*. Serie Schaum.
- H. Lehmann, Ch. (S.F). *Geometría analítica*. París: Limvse.
- Mataix, C. (1957). *Tratado de geometría analítica*. Dossat.
- Nievenglowski, B. (1894). *Cours de géométrie*. Paris: Gauthiers-Villars.
- Par une reunión de professeurs (S.F). *Cours de geometrie*. París. Ligel.
- Smith, E. y Salkover, M. (1954). *Analytic geometry*. John Wiley.
- Smith-Sullivan. (1955). *Elementos de geometría analítica*. Estados Unidos. Nigar S.R.L.

---

JAIME CHICA ESCOBAR

Ingeniero civil (Universidad Nacional de Colombia). Matemático (Universidad de Antioquia). Profesor de Mecánica en la Universidad Nacional entre los años 1960-1972. Docente de tiempo completo en la Facultad de Ingeniería de la U de A, entre los años 1972-1975. Docente jubilado del Departamento de Matemáticas de la U de A. Asesor de tesis de pregrado de estudiantes de Matemáticas de la U de A. Ha participado en encuentros de matemáticas de carácter regional y nacional como ponente. Entre sus publicaciones se destacan: *Introducción a la Geometría del Espacio*, *Monografía sobre las Cónicas*, *Los lugares geométricos representados por la ecuación de segundo grado en dos variables*, *Veinte demostraciones del Teorema de Pitágoras* y *Álgebra de Tensores y Análisis matricial*.

HERNANDO MANUEL QUINTANA ÁVILA

Matemático, Magíster en Matemáticas Aplicadas, Especialista en Estadística. Administrador de Empresas Agropecuarias. Docente de tiempo completo de la Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas ITM. Entre sus publicaciones se destacan dos artículos en la revista *Schizophrenia Research*: *Fewer but heavier Caffeine consumers in schizophrenia: a case-control study* y *smoking initiation and schizophrenia: a replication study in a spanish sample*. Coautor de los libros: *Cálculo diferencial: Límites y derivadas*, *Aplicaciones matemáticas en ingeniería. Capítulo II: Uso de la Programación Dinámica en operaciones de embalses*. Ha escrito más de 15 artículos de divulgación matemática en el periódico institucional del ITM.

---



Este libro se terminó de imprimir en  
Ediciones Diario Actual  
en el mes de julio de 2014

La carátula se imprimió en propalcote C1S 240 gramos,  
las páginas interiores en Bond alta blancura 60 gramos.

La fuente tipográfica empleada es: Times New Roman  
11 puntos en texto corrido.