

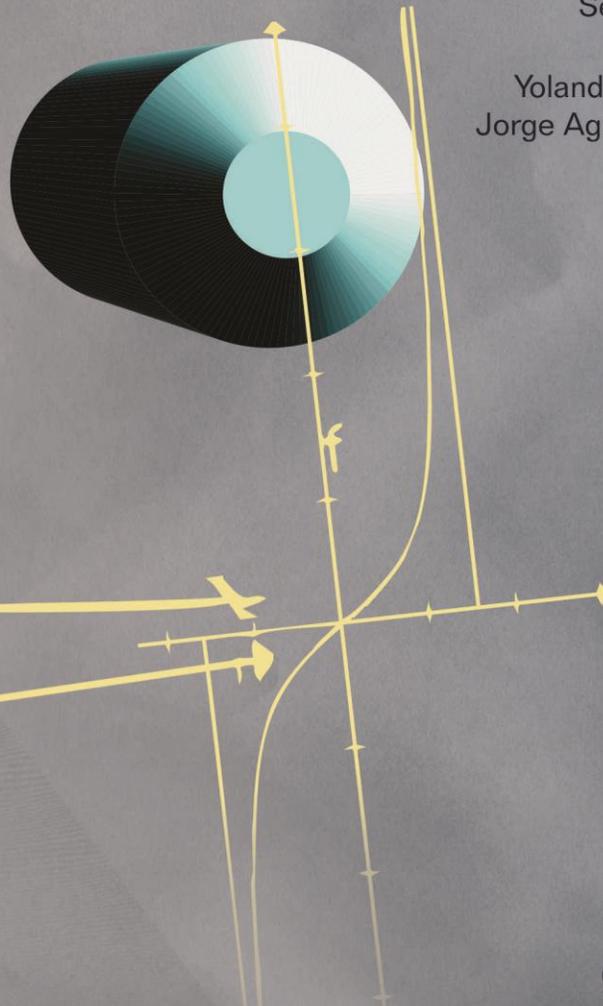


Cálculo integral con sucesiones y series

Guía de trabajo independiente

Segunda Edición

Yolanda Álvarez Ríos
Jorge Agudelo Quiceno



Fondo Editorial ITM, registrado en COLCIENCIAS Res. 01599 de 2012

CÁLCULO INTEGRAL CON SUCESIONES Y SERIES

Guía de trabajo independiente



Cálculo Integral con Sucesiones y Series

Se terminó de imprimir en Litografía Dinámica, en el mes de diciembre de 2012

Para su elaboración se utilizó bond alta blancura 75 gramos
en páginas interiores, y propalcote 300 gramos en la carátula.

Fuente tipográfica: Garamond para texto corrido,
en 11 puntos, títulos 15 puntos.

Jorge Eliécer Agudelo Quiceno

Ingeniero Civil de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín. Magíster en Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín. Profesor Asistente del INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO - ITM.

Yolanda Álvarez Ríos

Matemática de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín. Especialista en Evaluación Socioeconómica de Proyectos de la Universidad de Antioquia. Magíster en Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín. Profesora Asistente del INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO - ITM.

CÁLCULO INTEGRAL CON SUCESIONES Y SERIES
Guía de trabajo independiente

JORGE ELIÉCER AGUDELO QUICENO
YOLANDA ÁLVAREZ RÍOS



Álvarez Ríos, Yolanda

Cálculo integral con sucesiones y series: guía de trabajo independiente / Yolanda Álvarez Ríos, Jorge Eliécer Agudelo Quiceno. – 2a ed. -- Medellín: Fondo Editorial ITM, 2012.

182p. -- (Colección Textos Académicos)

ISBN 978-958-8743-21-9

1. Cálculo Integral 2. Integrales (Matemáticas) I. Agudelo Quiceno, Jorge II. Título (serie)

515.43 SCDD Ed.21

Catalogación en la publicación - Biblioteca ITM

Serie Textos Académicos

Fondo Editorial ITM

Cálculo Integral con sucesiones y series: guía de trabajo independiente

© Jorge Eliécer Agudelo Quiceno

© Yolanda Álvarez Ríos

© Fondo Editorial ITM

2a. edición: diciembre de 2012

ISBN: 978-958-8743-21-9

Hechos todos los depósitos legales

Rectora

Luz Mariela Sorza Zapata

Editora

Silvia Inés Jiménez Gómez

Comité Editorial

Olga María Rodríguez Bolufé, Phd., México

José R. Galo Sánchez, Phd., España

Liliana Saidon, Phd., Argentina

Monserrat Vallverdú Ferrer, Phd., España

Gianni Pezzoti, Phd., Italia

Corrección de Estilo

Lila María Cortés Fonnegra

Secretaría Técnica

Lina Yanet Álvarez Estrada

Diagramación

Jorge Eliécer Agudelo Quiceno

Yolanda Álvarez Ríos

Diseño de carátula

Alfonso Tobón

Impresión

Litografía Dinámica

Hecho en Medellín, Colombia

INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO

Calle 73 No. 76 A 354 (vía El Volador)

Tel: (574) 440 5289 - 440 5197

<http://fondoeditorial.itm.edu.co/>

www.itm.edu.co • Medellín - Colombia

Las opiniones, originales y citas del texto son de la responsabilidad de los autores.

El Instituto salva cualquier obligación derivada del libro que se publica. Por lo tanto, ella recaerá únicamente y exclusivamente sobre los autores.

Bibliografía

- [1] Stewart, James (2008). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*. Sexta edición. México. CENGAGE learning.
- [2] Zill, Dennis G y Warren S. Wright (2011). *Cálculo Trascendentes tempranas*. Cuarta edición. México. McGrawHill.
- [3] Agudelo, Jorge y Álvarez, Yolanda (2009). *Cálculo Integral. Guía de trabajo independiente*. Medellín. Fondo Editorial ITM.
- [4] Puerta Ortiz, Fernando, Quiroz Arango Francisco y Montes Montes Rodrigo (1999). *Cálculo diferencial e introducción al Cálculo integral*. Medellín. Gráficas Montoya.
- [5] Purcell, Edwin J., Varberg Dale y Rigdon, Steven (2007). *Cálculo diferencial e integral*. Novena Edición. México. Prentice Hall.

Índice general

Introducción

I INTEGRAL INDEFINIDA	15
1. Antiderivadas	17
1.1. Concepto de antiderivada	17
1.2. Análisis gráfico	18
1.3. Fórmulas básicas de integración	20
1.4. Linealidad y Homogeneidad	22
2. Aplicaciones de la Integral Indefinida	27
2.1. Razones de cambio	27
2.2. Movimiento rectilíneo y caída libre	29
3. Técnicas de Integración	35
3.1. Cambio de variable o sustitución	36
3.2. Integración por partes	38
3.3. Integración de potencias de funciones trigonométricas	42
3.3.1. Integración de potencias de seno y coseno	42
3.3.2. Integración de potencias de tangentes y secantes	44
3.3.3. Integración de productos de seno y coseno	47
3.4. Integración por sustitución trigonométrica	47
3.5. Integración por descomposición en fracciones parciales	50
3.6. Ejercicios complementarios	53
II INTEGRAL DEFINIDA	57
4. Concepto de Integral Definida	59
4.1. Concepto de integral definida	59

4.2. Interpretación geométrica de la integral definida	62
4.3. Propiedades de la integral definida	64
4.4. Teorema de evaluación de integrales definidas	65
5. Área entre Curvas	69
5.1. Cálculo del área	69
5.2. Selección del diferencial de área	70
6. Sólidos de revolución	77
6.1. Disco	78
6.2. Arandela	80
6.3. Envoltorio ó capa cilíndrica	84
7. Otras aplicaciones de la integral definida	91
7.1. Trabajo realizado por una fuerza variable	91
7.2. Centroides de una región plana	96
8. Integrales Impropias	103
8.1. Integrales impropias tipo I	103
8.2. Integrales impropias tipo II	105
8.3. Ejercicios complementarios	112
III SUCESIONES Y SERIES	115
9. Sucesiones	117
9.1. Definición y propiedades	117
9.2. Monotonía y acotamiento de sucesiones	120
10.Series. Definición y convergencia	125
10.1. Introducción	125
10.2. Propiedades de las series convergentes	128
10.3. Otros criterios para convergencia y divergencia de series . .	132
10.3.1. Criterio de la integral	132
10.3.2. Criterio de las p-series o de las series hiperarmónicas	133
10.3.3. Criterios de comparación	134
10.3.4. Convergencia absoluta y condicional	138
10.3.5. Criterio de la razón o del cociente (CCoc)	139
10.3.6. Criterio de la raíz (CR)	141
10.3.7. Criterio de convergencia para series alternas	143

Actividad 10.5

- 1.Conv 2.Conv 3.Div 4. Div 5. Conv 6. Div 7. Conv 8. Div 9. Div

Actividad 10.6

1. AConv 2. CConv 3. Div 4. CConv 5. AConv 6. CConv

Actividad 10.7

- | | | |
|--|--|------------------------------|
| 1. Cociente; 0 | 2. $f(x) = \tan^{-1} x$ no es decreciente. | 3. Divergencia; Div |
| 4. $\frac{e^n}{n^2} > \frac{1}{n^2}$ | 5. el límite es infinito | 6. $\sum_{n=1}^{\infty} e^n$ |
| 7. CCD: $\frac{e^n}{n^2} < e^n$; CCL: el límite es 0 | 8. Diverg y cociente; Div | 9. Comparación; Div |
| 10. $f(x) = xe^{-x^2}$ es positiva, decrec y continua. | 11. Cociente | 12. Div |

Actividad 10.8

1. Conv 2. Div 3. Conv 4. Conv 5. Conv 6. Div 7. Conv 8. Conv 9. Div
10. Conv 11. Div 12. Div

Actividad 11.1

1. a. V b. F 2. a. F b. V 3. V 4. F 5. a. V b. F c. V d. V 6. F

Actividad 11.2

- I.
1. IC= $(-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}]$; $R = \frac{3}{4}$ 2. IC= \mathbb{R} ; $R = \infty$ 3. IC= $[1, 5)$; $R = 2$
4. IC= $(-1, 1]$; $R = 1$ 5. IC= $\{0\}$; $R = 0$ 6. IC= $[-2, 0]$; $R = 1$
7. IC= $\{0\}$; $R = 0$ 8. IC= $[-1, -\frac{1}{3})$; $R = \frac{1}{3}$ 7. IC= $[-1, 1]$; $R = 1$
- II.
1. c 2. a 3. c

Actividad 11.3

1a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e(x-1)^n}{n!}$	1b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^n}{(2n-1)!}$	1c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^n}{(n-1)!}$
2a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n(2n)!}$	2b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{4n-2}}{(4n-2)(2n-1)!}$	2c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{n!(2n-1)}$

Actividad 9.2

- | | | |
|-----------------|-------------------|-----------------------------------|
| 1.1. Diverge | 1.2. Converge a 1 | 1.3. Converge a 0 |
| 1.4. Diverge | 1.5. Converge a 0 | 1.6. Converge a 1 |
| 2. Converge a 1 | 3. Converge a 0 | 4. Converge a $2^{\frac{\pi}{2}}$ |
| 5. Diverge | 6. Diverge | 7. Diverge |
| 8. Diverge | 9. Diverge | 10. Converge a 0 |

Actividad 9.3

1. V 2. V 3. F 4. F 5. V 6. V 7. F 8. F($\{\text{senn}\}$) 9. V 10. F
 $(\left\{2 + \frac{1}{n}\right\})$.

CAPÍTULO 10

Actividad 10.1

1. G; Conv; $S = 3$ 2. T; Conv; $S = \frac{1}{6}$ 3. N; Div 4. T; Div 5. G; Div 6.
 N; Div 7. T; Conv; $S = \frac{\pi}{2}$ 8. N; Div 9. N; Div 10. G; Conv; $S = -\frac{4}{285}$
 11. N; Div 12. N; Div 13. N; Conv; $S = \frac{3}{2} + \frac{1}{e^2 - e}$ 14. T; Conv; $S = 1$

Actividad 10.2

1. $(-3, 3)$; $S = \frac{x}{3-x}$ 2. \mathbb{R} ; $S = x^2$ 3. $0 < x < 1$; $S = \frac{2x-1}{2-2x}$

Actividad 10.3

1. V 2. F 3. V 4. F 5. V

Actividad 10.4

1. Div 2. Conv 3. Conv 4. Conv 5. Conv 6. Div 7. Conv 8. Conv
 9. Conv

10.3.8. Resumen de criterios para la convergencia o divergencia de series 145
 10.4. Ejercicios complementarios 148

11. Series de potencias 151

11.1. Definición. 151
 11.2. Representación de funciones mediante series de potencias . . 156
 11.2.1. Derivación e integración de series de potencias . . . 156
 11.2.2. Series de Taylor y de Maclaurin 157

IV Respuestas a las actividades propuestas 163

6. a) $64\gamma J$ b) $1.902 m$ 7. $\left(\frac{4+3\pi}{6}\right)\gamma HR^3J$.

Actividad 7.2

3. a) $\left(\frac{2}{5}, 1\right)$ b) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ c) $\left(\frac{4r}{3\pi}, \frac{4r}{3\pi}\right)$ d) $\left(\frac{17}{5}, 1\right)$ e) $\left(\frac{(1+\sqrt{2})(\pi\sqrt{2}-4)}{4}, \frac{1+\sqrt{2}}{4}\right)$

4. a) $(2, 0)$ b) $(4, 0)$

CAPÍTULO 8

Actividad 8.3.2

- | | | |
|---|---|--|
| 1. \mathbb{R} ; impropia | 2. $\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$; impropia | 3. \mathbb{R} ; impropia |
| 4. \mathbb{R} ; no impropia | 5. \mathbb{R} ; impropia | 6. $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$; impropia |
| 7. $(0, \infty)$; impropia | 8. $\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$; impropia | 9. $\mathbb{R} - \{0\}$; no impropia |
| 10. \mathbb{R} ; impropia | 11. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ | 12. $\mathbb{R} - \{0\}$; impropia |
| 13. $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$; impropia | 14. $(0, 1) \cup (1, \infty)$; impropia | 15. \mathbb{R} ; no impropia |

Actividad 8.3.3

1. π 2. D 3. D 5. $\frac{1}{2}$ 6. D 7. 1 8. D 10. D 12. D 13. $-\frac{3}{4}$ 14. D

Actividad 8.3.4

1. 1 2. e 3. ∞ 4. $\frac{3\sqrt[3]{25}}{2}$ 5. ∞

Actividad 8.3.5

1. F 2. V 3. F 4. V 5. V

CAPÍTULO 9

Actividad 9.1

1. n^2 2. $(-1)^n \frac{n}{n+1}$ 3. $\frac{n}{2^n}$ 4. $(-1)^n$ 5. $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 6. $\frac{\ln n}{\ln(2n)}$

Actividad 6.3

1. $\frac{162\pi}{5}$ 2. $\frac{27\pi}{2}$

Actividad 6.4

1. $\frac{23\pi}{6}; \frac{13\pi}{30}$ 2. $\frac{34\pi}{5}; \frac{3\pi}{2}$ 3. $\frac{80\pi}{3}; 16\pi$ 4. $\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}$ 5. $\frac{\pi}{2}; \frac{\pi(\sqrt{2}-4)}{2}$
 6. $\frac{45\pi}{2}; \frac{108\pi}{5}$ 7. $\frac{2\pi}{35}; \frac{\pi}{10}$ 8. $\frac{\pi}{2}(e^4 + e^{-4} - 2); 2\pi(e^2 + 3e^{-2})$

Actividad 6.5

1. a) $\frac{625\pi}{3}$ b) $\frac{1625\pi}{3}$ c) $\frac{875\pi}{3}$ d) 625π
 2. a) $\pi\left(\frac{32e^2 - e^4 - 31}{2}\right)$ b) $2\pi(3e^2 - 5)$ c) $\pi\left(\frac{e^4 + 4e^2 - 5}{2}\right)$ d) $4\pi e^2$

Actividad 6.6

1. a) $2\pi \int_0^3 (3-x)(3x-x^2) dx; \pi \int_0^9 \left[\left(3-\frac{y}{3}\right)^2 - (3-\sqrt{y})^2\right] dy$
 b) $\pi \int_0^3 \left[(9-x^2)^2 - (9-3x)^2\right] dx; 2\pi \int_0^9 (9-y)\left(\sqrt{y}-\frac{y}{3}\right) dy$
 c) $2\pi \int_0^3 (x+1)(3x-x^2) dx; \pi \int_0^9 \left[(1+\sqrt{y})^2 - \left(1+\frac{y}{3}\right)^2\right] dy$
 d) $\pi \int_0^3 \left[(1+3x)^2 - (1+x^2)^2\right] dx; 2\pi \int_0^9 (y+1)\left(\sqrt{y}-\frac{y}{3}\right) dy$
 2. a) $2\pi \int_0^2 (2-x)(e^x-1) dx; \pi \int_1^{e^2} (2-\ln y)^2 dy$
 b) $\pi \int_0^2 (e^x-1)^2 dx; 2\pi \int_1^{e^2} (y-1)(2-\ln y) dy$
 c) $2\pi \int_0^2 (x+1)(e^x-1) dx; \pi \int_1^{e^2} [9-(1+\ln y)^2] dy$
 d) $\pi \int_0^2 [64-(9-e^x)^2] dx; 2\pi \int_1^{e^2} (9-y)(2-\ln y) dy$

CAPÍTULO 7

Actividad 7.1

1. a) $Gm_1m_2\left(\frac{b-a}{ab}\right)$ b) $9,83 \times 10^5 J$ 2. $2727,3 \frac{N}{m}$ 3. $0.47J$

Índice de figuras

1.1. Familia uniparamétrica de curvas	19
1.2. Rectas tangentes a la familia de curvas	20
1.3. Antiderivada lineal	24
2.1. Velocidad de una partícula	31
2.2. Aceleración de una partícula	32
3.1. Sustitución seno	48
3.2. Sustitución tangente	49
3.3. Sustitución secante	49
4.1. Integral definida. Sumas de Riemann	59
4.2. Interpretación geométrica de la integral definida	62
5.1. Área entre curvas	69
5.2. Diferencial de área vertical	71
5.3. Diferencial de área horizontal	71
5.4. Región entre cuatro curvas	72
6.1. Sólido de revolución	77
6.2. Disco vertical	78
6.3. Disco horizontal	79
6.4. Gráfica función del ejemplo 6.1	80
6.5. Arandela vertical	81
6.6. Arandela horizontal	81
6.7. Gráfica de la región del ejemplo 6.2	82
6.8. Gráfica de la región del ejemplo 6.3	83
6.9. Envoltente vertical	84
6.10. Detalle envoltente de la figura 6.9	82
6.11. Gráfico de la región del ejemplo 6.4	85
6.12. Gráfica de la región del ejemplo 6.5	86
7.1. Fuerza Variable.	92

7.2. Tanque Cónico	93
7.3. Tanque piramidal.	95
7.4. Tanque cilíndrico	96
7.5. Región del ejemplo 7.1	98
7.6. Región del ejemplo 7.2	99
7.7. Región entre eje x y la elipse	100
8.1. Función continua en $[a, \infty)$	104
8.2. Función continua en $(-\infty, b]$	104
8.3. Función continua en \mathbb{R}	105
8.4. Función continua en $(a, b]$	106
8.5. Función continua en $[a, b)$	107
8.6. Función continua en (a, b)	108
8.7. Función continua en $[a, b] - \{c\}$	109

CAPÍTULO 5

Actividad 5.1

$$1. \int_c^d [g(y) - h(y)] dy + \int_c^b [j(y) - h(y)] dy + \int_b^d [j(y) - f(y)] dy$$

$$2. \int_0^a dx \quad 3. \int_a^b [f(x) - g(x)] dx + \int_b^c [g(x) - f(x)] dx$$

$$4. \int_d^e [g(y) - h(y)] dy + \int_e^f [f(y) - h(y)] dy$$

Actividad 5.2

1d, 2b, 3c, 4a

Actividad 5.3

a. $4 \ln 2 - 2$ b. 8 c. $\frac{7}{12}$ d. 1

Actividad 5.4

1. $\frac{25}{3}$ 2. 9 3. $\frac{32}{3}$ 4. $\frac{64}{3}$ 5. $\frac{9}{2}$ 6. $\frac{131}{4}$

Actividad 5.5

1. $6 \ln 3 - 6$ 2. $e^3 - e - e^{-1} + e^{-3}$ 3. $2(\sqrt{2} - 1)$ 4. $\frac{2\sqrt{3}\pi - 3 \ln 4}{3}$

CAPÍTULO 6

Actividad 6.1

1. eje x : disco, $dV = \pi \text{sen}^2 x dx$; eje y : envolvente, $dV = 2\pi x \text{sen} x dx$

2. eje x : envolvente, $dV = 2\pi y (e - e^y) dy$; eje y : arandela, $dV = \pi (e^2 - e^{2y}) dy$

3. eje x : arandela, $dV = \pi (16 - x^4) dx$; eje y : envolvente, $dV = 2\pi x (4 - x^2) dx$

4. eje x : envolvente, $dV = 2\pi y \sqrt{4 - y^2} dy$; eje y : disco, $dV = \pi (4 - y^2) dy$

Actividad 6.2

4a, 1b, 2c, 3d

Actividad 4.1.2

$$1. \int_1^e x \ln x \, dx \quad 2. \int_{-3}^3 \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} \quad 3. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad 4. \int_0^1 \cos \pi x \, dx$$

Actividad 4.1.3

1. F 2. V 3. V 4. F

Actividad 4.2.1

$$1. \int_0^\pi \sin x \, dx - \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \sin x \, dx \quad 2. \int_{-3}^{-2} (x^2 - 1) \, dx - \int_{-2}^2 (x^2 - 1) \, dx$$

$$3. \int_{-1}^1 e^x \, dx \quad 4. \int_{-4}^1 (x + 5) \, dx$$

Actividad 4.2.2

1. 30 2. 56 3. 15 4. $\frac{9}{4}$ 5. 2π 6. $\frac{5}{2} + \frac{25\pi}{16}$

Actividad 4.3.1

1. a) $-\frac{7}{4}$ b) $-\frac{11}{2}$ c) $\frac{35}{4}$ d) $\frac{17}{2}$

2. a) 7 b) 49 c) 1 d) 0

Actividad 4.4.1

1. $-5 \ln 2 - \frac{9}{2}$ 2. $\frac{1}{6}$ 3. 9 4. 1 5. $\frac{\pi - 4\sqrt{3} - 12}{12}$ 6. 0 7. $\ln 3 - \frac{1}{2} \ln 5$ 8. $2 - \sqrt{2}$ 9. -1 10. -3

Actividad 4.4.2

1. F 2. V 3. F 4. F 5. F 6. V 7. V

Actividad 4.4.3

1. $-\int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx$ 2. $\sqrt{2}$ 3. $F(d) - F(c)$ 4. 0 5. impar, 0 6. $2 \int_0^a f(x) \, dx$ 7. Par, $2 \int_0^\pi x \sin x \, dx$

Introducción

El tiempo de trabajo académico necesario para el logro de una competencia incluye el tiempo de trabajo presencial y el tiempo de trabajo independiente. Es a este último al que pretende aportar e impactar este texto, poniendo a disposición del lector elementos de fundamentación teórica, desarrollo de ejemplos paso a paso y gran variedad de ejercicios que permitan con un trabajo juicioso, un dominio operacional y una claridad conceptual que conduzcan a no memorizar sino a ejercitar, decantar, apropiarse, consultar, ampliar, practicar y descubrir otras relaciones, en pocas palabras pensar la clase para afianzar los conceptos trabajados en el aula y para adquirir destrezas para usar y aplicar los mismos.

Se han incluido en este texto dos nuevos capítulos, el de Sucesiones y Series y el de Series de Potencias, este último de gran importancia para calcular aquellas integrales que no se pueden resolver usando las técnicas de integración tradicionales. Además se han enriquecido las aplicaciones de la integral definida con ejercicios de centros de masa y trabajo mecánico.

Finalmente, un aporte de gran utilidad lo constituye la inclusión de las respuestas de todas las actividades propuestas, pues es un factor dinamizador del proceso de aprendizaje, ya que con ellas el lector puede corroborar el punto de llegada para afianzar lo realizado o para una obligada revisión de los conceptos, métodos y resultados.

Actividad 3.6.1

1. F 2. V 3. F 4. V 5. V 6. F 7. F 8. V 9. F 10. F

Actividad 3.6.2

a. 1,3,10,7 b. 8, 11 c. 2,9,6 d. 4,12

Actividad 3.6.3

1. $\frac{2}{3}e^{x\sqrt{x}} + C$
2. $2\sqrt{\cos x} + \frac{2}{3}\sec^{3/2}x + C$
3. $-\frac{1}{2}\ln(x^2 + 4) + \ln|x + 3| + C$
4. $\tan^{-1}\sin x + C$
5. $(x^2 + x)\ln|x| - \frac{x^2}{2} - x + C$
6. $\frac{1}{3}\ln^3 \sec x + C$
7. $\ln|\sec x + \tan x| - x + C$
8. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 4x + 5) - 2\tan^{-1}(x + 2) + C$
9. $\frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C$
10. $\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x + C$
11. $-\frac{x}{12\sqrt{x^2 - 4}} - \frac{x}{3(x^2 - 4)^{3/2}} + C$
12. $\frac{1}{2}\ln(x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 5}) + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 4x + 5} - \sqrt{x^2 - 4x + 5} + C$

CAPÍTULO 4

Actividad 4.1.1

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{e^{i/n}}{n}$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{2}{n} \sqrt{1 + \left(-1 + \frac{2i}{n}\right)^2}$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{2n} \sin \frac{i\pi}{2n}$
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{i}{n}\right)$
5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{i + n}$
6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{5}{n} \left(\frac{1}{-2 + \frac{5i}{n} + e^{-2 + \frac{5i}{n}}} \right)$