Textos Académicos

LA ECUACIÓN GENERAL

de segundo grado en dos y tres variables

Jaime Chica Escobar / Hernando Manuel Quintana Ávila

FONDO EDITORIAL ITM

LA ECUACIÓN GENERAL

de segundo grado en dos y tres variables

LA ECUACIÓN GENERAL
de segundo grado en dos y tres variables

Jaime Chica Escobar / Hernando Manuel Quintana Ávila

Chica Escobar, Jaime
La ecuación general de segundo grado en dos y tres variables: Jaime Chica Escobar, Hernando Manuel Quintana Ávila. —1^a ed.—Medellín: Instituto Tecnológico Metropolitano, 2018.
552 p. –(Colección Textos Académicos)

Incluye referencias bibliográficas
ISBN 978-958-5414-25-9

1. Geometría 2. Lugares geométricos I. Quintana Ávila, Hernando Manuel II. Tít. III. Serie

516 SCDD 21 ed.

Catalogación en la publicación – Biblioteca ITM

La ecuación general de segundo grado en dos y tres variables

Edición: marzo 2018
Hechos todos los depósitos legales

Rectora
MARÍA VICTORIA MEJÍA OROZCO

Directora Editoral
SILVIA INÉS JIMÉNEZ GÓMEZ

Asintente Editorial
VIVIANA DÍAZ

Corrector de textos
ANDRÉS VÉLEZ CUERVO

Diagramador
JONATHAN TABORDA HERNÁNDEZ

Diseño de la carátula
ALFONSO TOBÓN BOTERO

Imagen de la carátula
Frontispicio de la obra: *Turris Babel*, Athanasii Kircheri e Soc. Jesu. Amstelodami Ex Officina Janssonio-Waesbergiana, 1679.

Editado en Medellín, Colombia
Sello editorial Fondo Editorial ITM
Instituto Tecnológico Metropolitano
Calle 73 No. 76A 354
Tel.: (574) 4405100 Exts. 5197-5382
fondoeditorial.itm.edu.co

Índice general

Agradecimientos

Queremos agradecer a todos los colegas que nos han animado y ayudado, con críticas constructivas, a realizar y mejorar este trabajo. A la dirección del Fondo Editorial del ITM y a todo su equipo, por su esfuerzo y dedicación en la publicación de la obra. A todos los profesores del grupo de investigación DaVinci, por sus comentarios y aportes que nos han permitido elaborar un texto con el menor número de errores. Finalmente, los autores queremos agradecer a Jonathan Taborda Hernández por la diagramación y elaboración del índice del presente texto con el Software computacional LaTeX.

Prefacio

En la Geometría Analítica se presentan dos problemas:

(1) Definir el lugar geométrico (LG) representado por la ecuación general de segundo grado en dos variables:
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1}$$

(2) Definir el lugar geométrico (LG) representado por la ecuación general de segundo grado en tres variables:
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0 \tag{2}$$

donde $A, B, C, \cdots$ son escalares conocidos.

El LG representado por (1) puede ser:

$$\text{Una cónica}\begin{cases}\text{Circunferencia}\\ \text{Elipse}\\ \text{Hipérbola}\\ \text{Parábola}\end{cases}$$

$$\text{Una cónica degenerada}\begin{cases}\text{Dos rectas paralelas}\\ \text{Dos rectas concurrentes}\\ \text{Una recta}\\ \text{Un punto}\\ \text{Un punto}\\ \emptyset \text{ (vacío). O sea que ningún punto } P(x,y) \text{ del plano satisface (1)}\end{cases}$$

La naturaleza del LG representado por (1) dependerá de los valores propios de la matriz simétrica $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ y de los llamados *Invariantes de la cónica*.

Los invariantes de la cónica representados por (1) son ciertos escalares que se construyen a partir de la matriz
$$\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \tag{3}$$

Ellos son:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} : \text{el invariante cúbico}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = M_{33} : \text{menor principal de orden dos de la matriz (3)}$$

δ se llama el invariante cuadrático de la cónica.
$\omega = A + C$: llamado el invariante lineal.
Una noción que se necesita definir para llevar a cabo la reducción es la de *Centro de una cónica*.
Se llama *Centro de la cónica* a las raíces del sistema

$$\left.\begin{aligned} Ax + By &= -D \\ Bx + Cy &= -E \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Esta noción ya nos permite clasificar las cónicas así:

$$\begin{cases} \text{Cónicas con centro único} \\ \text{Cónicas con infinitos centros} \\ \text{Cónicas sin centro} \\ \text{Cónicas con centro único. El sistema (4) tiene solución única.} \\ \text{La cónica puede ser una circunferencia, una elipse, o una hipérbola.} \\ \text{Cónicas sin centro: la parábola} \\ \text{Cónicas con infinitos centros: las cónicas degeneradas} \end{cases}$$

Esta corta explicación contiene el procedimiento que se sigue para reducir una cónica en el caso que tenga centro único.
En otros casos se sigue un procedimiento muy similar pero teniendo en cuenta ahora que hay infinitos centros o no hay ninguno. Si no hay centro, no es posible definir una traslación que elimine la componente lineal en (1) y el paso que sigue es aplicar el Teorema Espectral.
Si hay infinitos centros, se demuestra que todos ellos están en una recta que se llama el *eje de centros* (EC) de la cónica. En este caso la cónica tiene un invariante adicional y se puede eliminar la componente lineal haciendo una traslación de ejes a un punto convenientemente elegido en el EC y continuar la reducción.
A continuación se obtiene la ecuación de la tangente a una cónica en un punto de la curva y se estudian las intersecciones de un cono al cortarlo con un plano.
En el último capítulo, se estudia los LG representados por la ecuación general de segundo grado en tres variables

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0$$

Los lugares geométricos representados por (2) son las llamadas *superficies cuádricas*:

$$\begin{cases} \text{Elipsoide} \\ \text{Hiperboloide} \\ \text{Cono} \\ \text{Cilindro} \\ \text{etc...} \end{cases}$$

y las *superficies cuádricas degeneradas*.
El estudio consiste en replicar lo que se hizo en la primera parte; solo que ahora la matriz asociada a (2) es una matriz simétrica 3×3 con valores propios reales.
La reducción de (2) se hace aplicando el Teorema Espectral, para lo cual se requieren conceptos del

álgebra lineal.
La novedad del presente tratado radica en el empleo sistemático del álgebra lineal, en especial del Teorema Espectral y de los valores y vectores propios para reducir tanto (1) y (2); acompañan también al presente estudio un conjunto de diagramas de flujo, que permiten al lector una fácil y estratégica compresión en la reducción y clasificación de los LG representados por (1).

CAPÍTULO

1 La ecuación general de segundo grado en dos variables

1.1. Introducción

Hay en la Geometría Analítica[1] dos problemas con los que se enfrenta todo el que estudie esta disciplina:

(1) Definir la naturaleza del Lugar Geométrico (LG) representado por la ecuación general de segundo grado en dos variables:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

y

(2) en tres variables:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0$$

Por ejemplo,

i) dada la ecuación $3x^2 - 2xy + y^2 - x + y + 5 = 0$, ¿que curva representa en el plano? y

ii) dada la ecuación $x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy + 3xz - 4yz + 2x + 3y - 5z + 8 = 0$, ¿que superficie representa en el espacio?

La respuesta en el primer caso es que el LG es una cónica (elipse, parábola, hipérbola)[2] o una cónica degenerada, y en el segundo caso es una superficie cuádrica (cono, cilindro, elipsoide, paraboloide, ...) o un caso degenerado de ellas.
En el primer caso es posible estudiar el problema con elementos que proporciona la Trigonometría empleando funciones del ángulo doble para definir el ángulo que deben girarse los ejes para conseguir anular el término mixto.

[1] Para un estudio muy detallado, véase el reciente análisis pormenorizado: *An algebraic approach to geometry*. Francis Borceaux. Geometry Trilogy II. Springer 2013.

[2] Véase el reciente: *Tratado de las secciones cónicas*. Jaime Chica Escobar, Hernando Manuel Quintana Ávila. Fondo Editorial ITM. Vol. 2. 2013, Vol. 1. 2014, Vol. 3. 2015.

Pero para estudiar el segundo problema es imprescindible el empleo de las matrices y los valores propios junto con el Teorema Espectral para matrices simétricas[3].
El problema que vamos a abordar es el siguiente: dada la ecuación

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1.1}$$

donde A, B, C, D, E, F son constantes reales dadas, ¿qué conjunto de puntos del plano xy la satisfacen?
La ecuación (1.1) tiene:

- Una componente cuadrática:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Una componente lineal:

$$2Dx + 2Ey = \begin{pmatrix} 2D & 2E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Un término independiente:

$$F$$

Asumiremos que no todos los coeficientes A, B, C de la componente cuadrática se anulan, ya que si así fuese, (1.1) representaría la recta del plano

$$2Dx + 2Ey + F = 0$$

y no hay nada que analizar.
Como se desprenderá del estudio que vamos a hacer, la ecuación (1.1) puede representar:

$$\text{Una cónica} \begin{cases} \text{Circunferencia} \\ \text{Elipse} \\ \text{Hipérbola} \\ \text{Parábola} \end{cases}$$

O una

$$\text{cónica degenerada} \begin{cases} \text{dos rectas paralelas} \\ \text{dos rectas concurrentes} \\ \text{una recta} \\ \text{un punto} \\ \emptyset.\ \text{O sea que } \nexists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ que satisfagan (1.1).} \end{cases}$$

Todo dependerá, en el fondo, de los invariantes de (1.1) y de los valores propios de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

Llamaremos en adelante cónica al LG representado por (1.1), o sea, el conjunto de puntos del plano que satisfacen (1.1).
Consideremos, pues, la cónica (1.1). Reducirla es definir el LG representado por la ecuación.
Asociada a (1.1) hay dos funciones:

[3] Cf. Jaime Chica Escobar. *Álgebra de tensores, análisis espectral y aplicaciones.* Cap. VI pp. 512-592. Editorial Universidad de Antioquia. 2013.

i)
$$\begin{aligned} q : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longrightarrow q(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

q es la FC (forma cuadrática) asociada a (1.1)

ii)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longrightarrow f(x,y) = q(x,y) + (2D,\ 2E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F. \end{aligned}$$

El Kernel de f (o el núcleo de f) es el conjunto

$$\ker f = f^{-1}(0) = \{(x,y) \diagup f(x,y) = 0\}.$$

La cónica (1.1) no es más que el $\ker f$. Además es claro que un punto $P(x,y)$ está en la cónica $\Longleftrightarrow$ $f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow q(x,y) + (2D\ 2E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0$.

Nótese además que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2Ax + 2By + 2D \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2Bx + 2Cy + 2E \end{aligned}$$

La naturaleza del lugar representado por (1.1) está íntimamente ligada a ciertos escalares que se construyen con los coeficientes de la matriz simétrica

$$\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}$$

Ellos son:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = ACF - AE^2 - B^2F + 2BDE - CD^2.$$

Δ es llamado el *invariante cúbico* de (1.1) o el *discriminante de la cónica*.

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = M_{33}$$

M_{33}: menor principal descendente de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

δ es llamado el *invariante cuadrático* de (1.1).

$$\omega = A + C = tr\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

ω es llamado el *invariante lineal* de (1.1).
Estos escalares se llaman los *invariantes de la cónica* porque son cantidades que, como se verá, no cambian de valor cuando sometemos (1.1) bien sea a una translación o rotación de ejes, o a una combinación de ambas. Los menores principales descendentes de orden dos de (1.2) son:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix}; \quad M_{22} = \begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix}; \quad M_{33} = \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

De los tres, solo M_{33} es invariante. Estos tres menores, sobre todo $\delta = M_{33}$, van a ser importantes en el problema de la reducción de la cónica.

Ejemplo 1.1. *1) Un caso en que el lugar es $\emptyset$.*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 24 = 0$$

Para identificar el lugar tratemos de completar trinomios cuadrados perfectos.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \left(x^2 - 4x + 4\right) + \left(y^2 - 6y + 9\right) + 24 - 13 \\ &= (x-2)^2 + (y-3)^2 + 11 = 0 \end{aligned}$$

$$\nexists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad t.q \quad f(x,y) = 0.$$

El lugar es $\emptyset$.

2) Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \left(x^2 - 4x + 4\right) + \left(y^2 - 6y + 9\right) + \cancel{13} - \cancel{13} \\ &= (x-2)^2 + (y-3)^2 = 0. \end{aligned}$$

El único punto que satisface $f(x,y) = 0$ es (2,3).
Así que el lugar es un punto.

3) Dos rectas paralelas.
Sean

$$l(x,y) = 3x - 2y + 2 = 0 \tag{1.3}$$
$$m(x,y) = 3x - 2y + 1 = 0 \tag{1.4}$$

Definamos

$$\begin{aligned} f(x,y) &= l(x,y) \cdot m(x,y) \\ &= (3x - 2y + 2)(3x - 2y + 1) \\ &= 9x^2 - 12xy + 4y^2 + 9x - 6y + 2 = 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Es claro que

$$\begin{aligned} f(x,y) = 0 &\iff l(x,y) \cdot m(x,y) = 0 \\ &\iff l(x,y) = 0 \quad o \quad m(x,y) = 0 \\ &\iff (x,y) \quad \text{está en la recta (1.3) o en la recta (1.4)} \end{aligned}$$

Luego el lugar representado por (1.5) consta de dos rectas paralelas (véase Fig. 1.1).

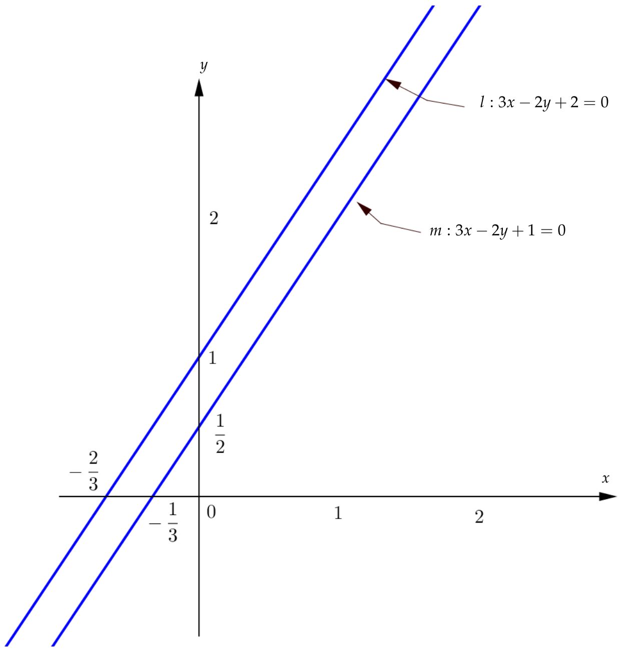


Figura 1.1

4) Dos rectas que se cortan.
Sean

$$l(x, y) = 3x - 2y + 1 = 0 \tag{1.6}$$
$$m(x, y) = x + y - 2 = 0 \tag{1.7}$$

(1.6) *y* (1.7) *representan dos rectas que se cortan.*

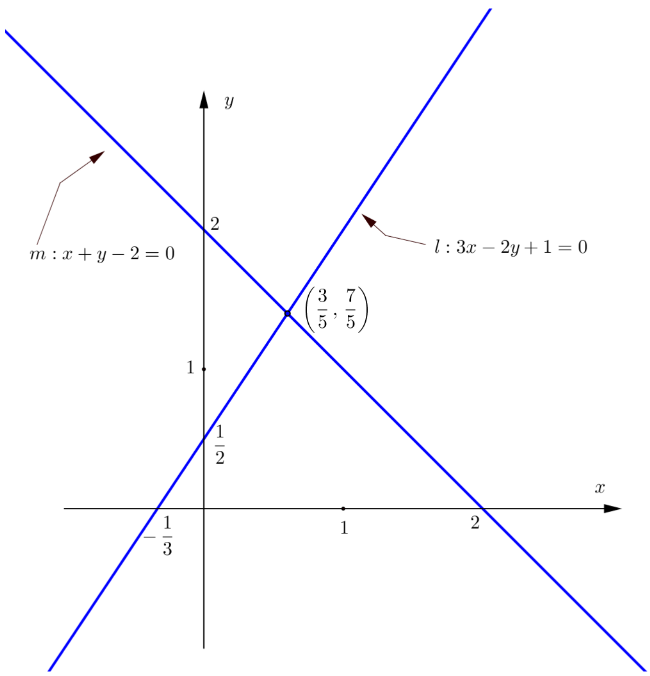


Figura 1.2

Definamos

$$\begin{aligned} f(x,y) &= l(x,y)\cdot m(x,y) \\ &= (3x-2y+1)\,(x+y-2) \\ &= 3x^2+xy-2y^2-5x+5y-2=0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Es claro que

$$\begin{aligned} f(x,y)=0 &\Longleftrightarrow l(x,y)\cdot m(x,y)=0 \\ &\Longleftrightarrow l(x,y)=0 \quad o \quad m(x,y)=0 \\ &\Longleftrightarrow (x,y) \quad \text{está en la recta (1.6) ó en la recta (1.7)} \end{aligned}$$

El lugar representado por (1.8) *consta de dos rectas l y m que se cortan en* $(3/5,7/5)$, *(véase Fig. 1.2).*

5) *Una recta.*
Sea

$$l(x,y)=x+y-2=0$$

Definamos

$$\begin{aligned} f(x,y) &= l(x,y)\cdot l(x,y)=(x+y-2)\,(x+y-2) \\ &= x^2+2xy+y^2-4x-4y+4=0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Es claro que

$$f(x,y)=0 \Longleftrightarrow l(x,y)=x+y-2=0$$

El lugar representado por (1.9) *es la recta:* $x+y-z=0$.

6) *Regresemos a la ecuación* (1.1)

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

Si hacemos en (1.1) $A=\frac{1}{a^2}, C=\frac{1}{b^2}, F=-1, B=D=E=0$, *obtenemos* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. *O sea que para estos valores de los parámetros* $A,B,C,\ldots$ *el lugar representado por* (1.1) *es **una elipse**.*

7) *Colocando en* (1.1) $A=\frac{1}{a^2}, C=-\frac{1}{b^2}, F=-1, B=D=E=0$, *se obtiene* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, *o sea una **hipérbola**.*

8) *Si hacemos* $C=1, A=B=E=F=0$ *y* $D=-p, p>0$ (1.1) *se convierte en* $y^2=2px$: ***parábola**.*

9) *Si tomamos* $A=a^2, C=-b^2, B=D=E=F=0$, (1.1) *se convierte en* $a^2x^2-b^2y^2=0$, *i.e,* $(ax+by)(ax-by)=0$ *y el lugar se compone de dos **rectas concurrentes en el origen**.*

10) *Al tomar* $C=1, F=-a^2, A=B=D=E=0$, (1.1) *se corviente en* $y^2=a^2$ *y el **lugar son dos rectas** $y=\pm a$ **paralelas al eje x**.*

11) *Si hacemos* $C=1, A=B=D=E=F=0$, (1.1) *se convierte en* $y^2=0$ ***que representa una recta: el eje x**.*

12) *Si hacemos* $A=a^2, C=b^2, B=D=E=F=0$, (1.1) *se convierte en* $a^2x^2+b^2y^2=0$. *Hay un único punto que satisface la ecuación:* $(0,0)$. ***Así que el lugar es un punto**.*

13) *Finalmente hagamos en* (1.1) $A=\frac{1}{a^2}, C=\frac{1}{b^2}, F=1, B=D=E=0$. *Se obtiene* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$. *No hay ningún punto del plano que la satisfaga. **El lugar es el conjunto vacío**.*

1.2. Invariantes de una cónica

Proposición 1.1. *Consideremos la cónica de ecuación* $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$. *Los números reales*

$$\omega = A + C$$
$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$
$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = ACF - AE^2 - B^2F + 2BDE - CD^2$$

no cambian al realizar una traslación, una rotación de los ejes xy, *o una combinación de ambas transformaciones.*

(1) Supongamos que realizamos una traslación de los ejes xy al punto $O'(h,k)$ (véase Fig. 1.3). Entonces se definen ejes XY con origen en O' y paralelos a xy teniendose que

$$x = X + h$$
$$y = Y + k$$

(x,y) son las coordenadas de un punto P cualquiera con respecto al sistema xy.
(X,Y) son las coordenadas de un punto P cualquiera con respecto al sistema XY.
Al llevar estas ecuaciones a (1.1) obtenemos

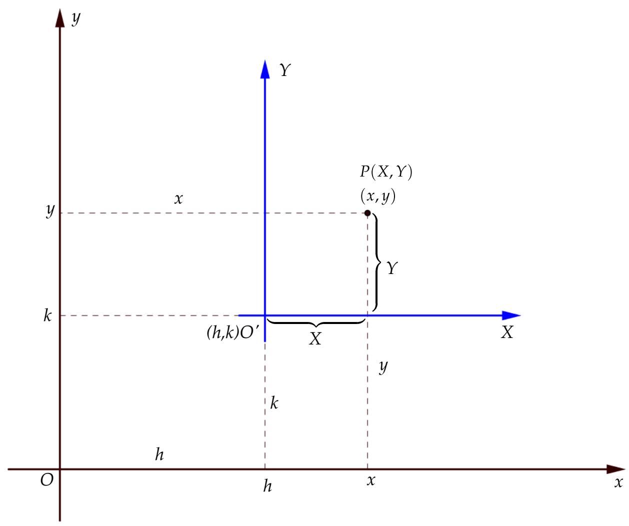


Figura 1.3. *La traslación de los ejes xy al punto* $O'(h,k)$.

$$A(X+h)^2 + 2B(X+h)(Y+k) + C(Y+k)^2 + 2D(X+h) + 2E(Y+k) + F = 0$$

o sea que

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2(Ah + Bk + D)X + 2(Bh + Ck + E)Y +$$
$$+ \left(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 + 2Dh + 2Ek + F\right) = 0$$

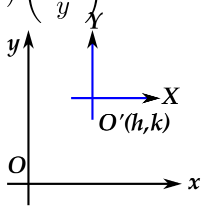
ecuación que podemos escribir en la forma

$$
\begin{aligned}
&A'X^2+2B'XY+C'Y^2+2D'X+2E'Y+F'=0 \qquad \text{siendo}\\
&A'=A\\
&B'=B\\
&C'=C\\
&D'=Ah+Bk+D=\frac{1}{2}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{h,k}\\
&E'=Bh+Ck+E=\frac{1}{2}\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{h,k}\\
&F'=Ah^2+2Bhk+Ck^2+2Dh+2Ek+F=f(h,k)
\end{aligned}
$$

Nótese que cuando se hace una traslación de ejes al punto (h,k) los coeficientes de la componente cuadrática de la ecuación no se transaforman.
Sí lo hacen los coeficientes de la parte lineal y el término independiente que ahora es $f(h,k)$.
O sea:

$$
\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B\\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2D & , & 2E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y \end{pmatrix}+F=0
$$

$$\Big\downarrow \ \textit{traslac. al punto O'(h,k)}$$



$$
\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B\\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X\\ Y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2\,(Ah+Ak+D) & , & 2\,(Bh+Ck+E) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X\\ Y \end{pmatrix}+
$$

$$
+\underbrace{\begin{pmatrix} h, & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B\\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h\\ C \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2D & 2E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h\\ k \end{pmatrix}+F}_{\substack{\|\\ f(h,k)}}=0
$$

La nueva componente lineal es:

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 2\,(Ah+Bk+D) & 2\,(Bh+Ck+E) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X\\ Y \end{pmatrix}\\
&=\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{h,k},\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{h,k}\right)\begin{pmatrix} X\\ Y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Esto demuestra que la matriz $M=\begin{pmatrix} A & B\\ B & C \end{pmatrix}$ es invariante por una traslación de ejes. El nuevo término independiente es $f(h,k)$.
Así que la ecuación de la cónica respecto al sistema XY es:

$$
\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B\\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X\\ Y \end{pmatrix}+\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{h,k},\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{h,k}\right)\begin{pmatrix} X\\ Y \end{pmatrix}+f(h,k)=0
$$

Calculemos los nuevos valores de $\omega,\delta,$ y Δ.

$$\omega' = A' + C' = A + C = \omega$$
$$\delta' = \begin{vmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = \delta.$$

Esto demuestra que ω y δ son invariantes por traslación.
Veamos ahora que Δ también se conserva.

$$\begin{aligned}\Delta' &= \begin{vmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A & B & Ah+Bk+D \\ B & C & Bh+Ck+E \\ Ah+Bk+D & Bh+Ck+E & Ah^2+2Bhk+Ck^2+2Dh+2Ek+F \end{vmatrix} \\ &\underset{f_3\to f_3-hf_1-kf_2}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{vmatrix} A & B & Ah+Bk+D \\ B & C & Bh+Ck+E \\ D & E & Dh+Ek+F \end{vmatrix} \underset{c_3\to c_3-hc_1-kc_2}{\underset{\uparrow}{=}} \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \Delta\end{aligned}$$

lo que nos demuestra que Δ también es invariante por traslación.

(2) Supongamos ahora que rotamos los ejes xy un ángulo θ en sentido antihorario ($0 < \theta < \pi/2$) respecto a O (véase Fig. 1.4).

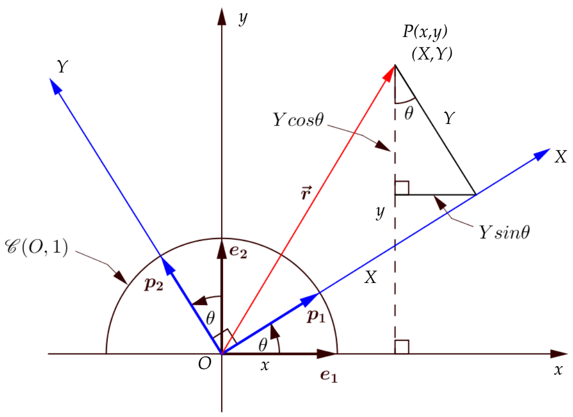


Figura 1.4. *$\mathscr{C}(0,1)$ es el círculo trigonométrico de centro en 0 y radio 1. Los ejes XY se obtienen al rotar xy un ángulo θ en sentido antihorario.*

Se obtiene así un nuevo sistema XY con origen en O.
Llamemos $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$ a los vectores unitarios que señalan las direciones de los nuevos ejes. Sea P un punto cualquiera del plano de vector de posición $\vec{r}$ respecto a O.

$$[\vec{r}]_{e_\alpha} = [I]_{e_\alpha}^{p_\alpha} [\vec{r}]_{p_\alpha}$$

O sea

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

con

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : \text{ortogonal}$$

La cónica referida a los ejes xy tiene por ecuación:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2D & , & 2E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0$$

Pero

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

y al transponer,

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} P^t.$$

Luego

$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \left(P^t \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} P \right) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2D, & 2E \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + F = 0$$

es la ecuación de cónica respecto a XY.
Nótese que

$$P^t \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} P$$

es simétrica ya que

$$\left(P^t \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} P \right)^t = P^t \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} P$$

Si llamamos

$$\left.\begin{array}{rl} & \begin{pmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} P \\ \text{y} & \begin{pmatrix} 2D' & , & 2E' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2D & , & 2E \end{pmatrix} P \end{array}\right\} \tag{1.10}$$

se tiene que

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{pmatrix}$$

es simétrica y la ecuación de la cónica con respecto al sistema XY es:

$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2D & 2E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + F = 0,$$

o también,

$$A'X^2 + 2B'XY + C'Y^2 + 2D'X + 2E'Y + F = 0$$

donde A', B', C', D', E' se calculan utilizando (1.10).
Observese que cuando realizamos una rotación de ejes, tanto la parte cuadrática como la parte lineal se transforman. El término independiente no se afecta (véase Fig. 1.5).

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2D & 2E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0$$

$$\Big\downarrow \quad R_0^{\widehat{\theta}} = [I]_{e_\alpha}^{p_\alpha} = P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \left(P^t \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} P \right) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2D & 2E \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + F = 0$$

o también

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \left(R_0^{\theta\, t} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} R_0^{\theta} \right) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}}_{\textit{nueva componente cuadrática}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2D & 2E \end{pmatrix} R_0^{\theta} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}}_{\textit{nueva componente lineal}} + F = 0$$

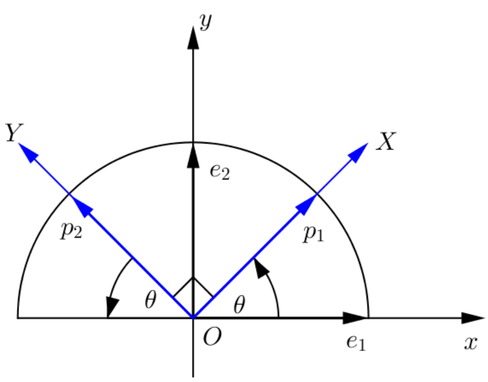


Figura 1.5

Esto demuestra que F es un invariante por una rotación de ejes.
Los nuevos valores de ω, δ y Δ son ahora:

$$\begin{aligned}
\omega' &= A' + C' \\
\delta' &= \begin{vmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{vmatrix} = A'C' - B'^2 \\
\Delta' &= \begin{vmatrix} A' & B' & C' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Como P es ortogonal,

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} P \sim \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

Luego el polinomio característico de

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{pmatrix}$$

es el mismo polinomio característico de

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

O sea que

$$\lambda^2 - (A' + C')\,\lambda + \left(A'C' - B'^2\right) = \lambda^2 - (A + C) + \left(AC - B^2\right)$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \omega' &= A' + C' = A + C = \omega \\
\delta' &= A'C' - B'^2 = AC - B^2 = \delta
\end{aligned}$$

Esto demuestra que ω y δ son invariantes por una rotación de ejes.
Finalmente veremos que Δ también lo es.
Bastará con demostrar que

$$\begin{pmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}$$

Una vez establecido esto se tendrá que

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \Delta$$

ya que si dos matrices son semejantes tienen el mismo determinante.
Para demostrar que

$$\begin{pmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}$$

bastará con demostrar $\exists Q$: no singular tal que

$$\begin{pmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} Q$$

o también que $\exists Q$: ortogonal tal que

$$\begin{pmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{pmatrix} = Q^t \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} Q$$

ya que si Q es ortogonal, $Q^t = Q^{-1}$.
Definamos

$$\widetilde{P} = \left(\begin{array}{cc|c} & & 0 \\ & P & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad \text{donde P} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Como P es ortogonal, $\widetilde{P}$ también lo es. En efecto

$$\begin{aligned} \widetilde{P}^{-1} &= \left(\begin{array}{cc|c} & & 0 \\ & P & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} \\ &= \left(\begin{array}{cc|c} & & 0 \\ & P^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{cc|c} & & 0 \\ & P^t & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{cc|c} & & 0 \\ & P & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^t = \widetilde{P} \end{aligned}$$

lo que nos demuestra que $\widetilde{P}$ es ortogonal.

Ya teníamos que

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} P$$

y que

$$\begin{pmatrix} D' & E' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} P \quad \therefore \quad \begin{pmatrix} D' \\ E' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}.$$

Así que podemos escribir:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ \hline D' & E' & F \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{c|c} P^t \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} P & P^t \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} P & F \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{cc|c} & & 0 \\ & P & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} A & B & D \\ B & C & E \\ \hline D & E & F \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} & & 0 \\ & P & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &= \widetilde{P}^t \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \widetilde{P}, \quad \text{con } \widetilde{P} \text{ ortogonal} \end{aligned}$$

lo que nos demuestra que

$$\begin{pmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}$$

Observación 1.1. *Existen otros dos invariantes:*

$$D^2+E^2 \quad y \quad M_{11}+M_{22}+M_{33}.$$

Pero solo lo son por una rotación. Veamos por que.
Como se trata de una rotación,

$$\begin{pmatrix} D' & E' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} P, \quad \begin{pmatrix} D' \\ E' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix} \quad donde\ P = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Siendo θ el ángulo que giran los ejes en sentido antihorario, $0 < \theta < \pi/2$. Luego

$$D'^2+E'^2 = \begin{pmatrix} D' & , & E' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D' \\ E' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & , & E \end{pmatrix} PP^t \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} I_2 \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix} = D^2+E^2$$

lo que nos demuestra que D^2+E^2 es invariante por rotación.

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} M_{11}+M_{22}+M_{33} &= \begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \\ &= CF - E^2 + AF - D^2 + \delta \\ &= F\,(A+C) - \left(D^2+E^2\right) + \delta \\ &= F\omega - \left(D^2+E^2\right) + \delta \end{aligned} \tag{1.11}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} M'_{11}+M'_{22}+M'_{33} &= \begin{vmatrix} C' & E' \\ E' & F' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A' & D' \\ D' & F' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{vmatrix} \\ &= C'F' - E'^2 + A'F' - D'^2 + \delta' \\ &= F'\,(A'+C') - \left(D'^2+E^2\right) + \delta' \\ &\underset{\uparrow}{=} F\omega - \left(D^2+E^2\right) - \delta \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{cases} F' = F \\ D'^2+E'^2 = D^2+E^2 \\ \omega' = A'+C' = A+C = \omega \\ \delta' = \delta \end{cases}$$

En virtud de (1.11) y (1.12), $M'_{11}+M'_{22}+M'_{33} = M_{11}+M_{22}+M_{33}$, lo que nos demuestra que $M_{11}+M_{22}+M_{33}$ es un invariante por una rotación.

1.3. Ecuación de incrementos de una cónica

Sea (X,Y) un punto cualquiera del plano x,y (véase Fig. 1.6) (X,Y) no necesariamente un punto de la cónica. Entonces

$$f(X,Y) = q(X,Y) + \begin{pmatrix} 2D & , & 2E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + F.$$

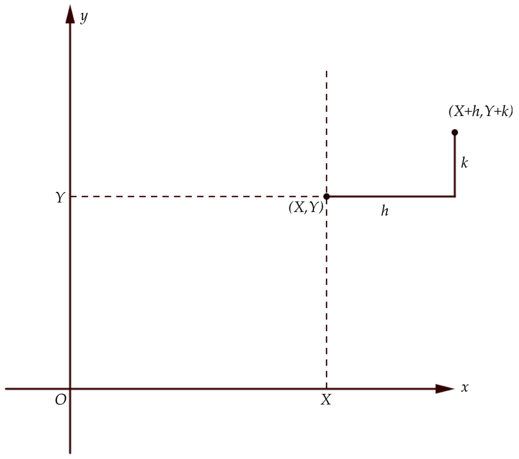


Figura 1.6. *(X, Y) es un punto cualquiera del plano.*

Se trata de demostrar que $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$:

$$f\left(X+h, Y+k\right) = q(X,Y) + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{h,k}, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{h,k} \right) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + f(h,k)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} f\left(X+h, Y+k\right) &= A(X+h)^2 + 2B\left(X+h\right)\left(Y+k\right) + C(Y+k)^2 + \\ &+ 2D\left(X+h\right) + 2E\left(Y+k\right) + F \\ &= AX^2 + CY^2 + 2AhX + 2CkY + Ah^2 + Ck^2 + \\ &+ 2BXY + 2BXk + 2BYh + 2Bhk + 2DX + \\ &+ 2Dh + 2EY + 2Ek + F \\ &= \left(AX^2 + 2BXY + CY^2\right) + \left(2Ah + 2Bk + 2D\right)X + \\ &+ \left(2Bh + 2Ck + 2E\right)Y + \left(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 + 2Dh + 2Ek + F\right). \end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2Ax + 2By + 2D$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2Bx + 2Cy + 2E,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{h,k} = 2Ah + 2Bk + 2D$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{h,k} = 2Bh + 2Ck + 2E$$

y regresando a la ecuación anterior,

$$f\left(X+h, Y+k\right) = q(X,Y) + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{h,k}, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{h,k} \right) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + f(h,k) \tag{1.13}$$

Hemos demostrado así que $\forall (X,Y)$ y $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$ se cumple (1.13). La ecuación (1.13) se llama la *ecuación de incrementos de la cónica* y será utilizada en la sección 1.4 que sigue y más adelante (sección 1.8) para hallar la ecuación de rectas tangentes y normales a la cónica en uno de sus puntos.

1.4. Reducción de una cónica

Reducir la cónica (1.1) es definir el lugar geométrico que representa.
Nuestro primer problema en la reducción de (1.1) es definir (si se puede) una transformación que elimine los términos lineales en la ecuación. Es obvio que debemos entonces considerar una cónica (1.1) en la que como ya se dijo, no todos los coefientes A, B, C de la forma cuadrática se anulan a la vez, ya que si eso sucede, (1.1) tiene la forma

$$2Dx + 2Ey + F = 0$$

que representa una recta y no hay nada más que decir.
Antes de comenzar la discusión sobre la reducción de la cónica con toda su generalidad es necesario considerar tres casos particulares que ilustran de manera anticipada lo que se persigue en la reducción.

(1) Supongamos que la ecuación de la cónica no tiene término mixto ($B = 0$). La ecuación es entonces

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1.14}$$

El paso que sigue es agrupar términos y completar trinomios cuadrados perfectos.
Supongamos que $A, C > 0$. La ecuación (1.14) puede escribirse como:

$$\left(Ax^2 + 2Dx + \frac{D^2}{A}\right) + \left(Cy^2 + 2Ey + \frac{E^2}{C}\right) + F - \frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{C} = 0$$

O sea

$$\left(\sqrt{A}x + \frac{D}{\sqrt{A}}\right)^2 + \left(\sqrt{C}y + \frac{E}{\sqrt{C}}\right)^2 = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F \tag{1.15}$$

A continuación realizamos una traslación al punto $O'\left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{C}\right)$.
Las ecuaciones de la transformación son (véase Fig. 1.7).

$$x = X - \frac{D}{A}$$
$$y = Y - \frac{E}{C}$$

que llevamos a (1.15):

$$\left(\sqrt{A}\left(X - \frac{D}{A}\right) + \frac{D}{\sqrt{A}}\right)^2 + \left(\sqrt{C}\left(Y - \frac{E}{C}\right) + \frac{E}{\sqrt{C}}\right)^2 = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F$$

$$AX^2 + CY^2 = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F. \tag{1.16}$$

La ecuación conseguida es la ecuación de la cónica con respecto al sistema XY con origen en O' y representa una elipse, una circunferencia, una hipérbola, o puede ser el conjunto vacío dependiendo de los valores de los coeficientes.
Por ejemplo, si $A = C > 0$ y $\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F > 0$, (1.16) puede escribirse como:

$$X^2 + Y^2 = \frac{1}{A}\left(\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F\right)$$

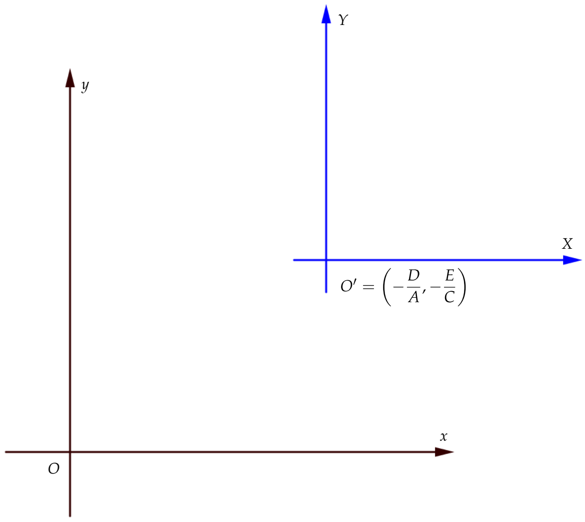


Figura 1.7. *Traslación del origen O al punto* $O' = \left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{C}\right)$

lo que nos demuestra que (1.14) representa la circunferencia de centro en $O'\left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{C}\right)$ y radio

$$r = \sqrt{\frac{1}{A}\left(\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F\right)}\text{(véase Fig. 1.8).}$$

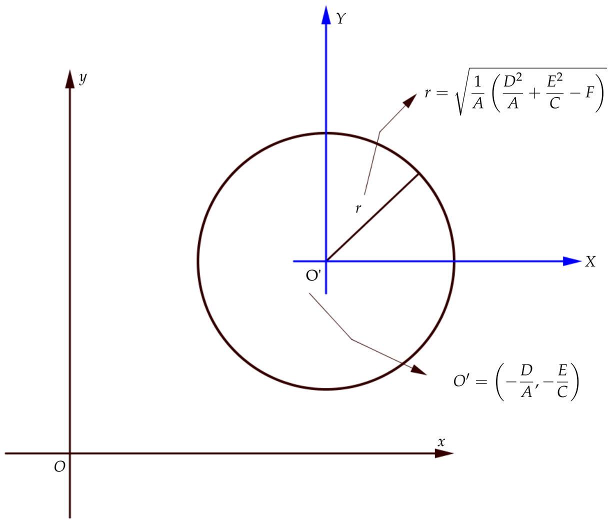


Figura 1.8. *Circunferencia con centro en* O' *y radio* r.

Nótese que a través de (1.14) no podemos identificar el lugar representado por la ecuación, cosa que sí podemos hacer a través de (1.16).

(2) La ecuación de la cónica no tiene componente lineal, o sea, $D = E = 0$.
La ecuación es entonces:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0 \tag{1.17}$$

Asumamos $B \neq 0$.
(Si $B = 0$, se tendría $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$ que es muy fácil de analizar.
Si $A = B = 0$, la ecuación es $Cy^2 + F = 0$ que es todavía más fácil de analizar.)
La ecuación (1.17) puede escribirse de la forma

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0 \tag{1.18}$$

El paso que sigue es realizar una rotación de ejes que elimine el término mixto.
Sea $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $[\vec{r}]_{ij} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ el vector de posición de un punto $P(x, y)$ de la cónica (véase Fig. 1.9). Entonces (1.18) se puede escribir así:

$$[\vec{r}]_{ij}^t M [\vec{r}]_{ij} + F = 0 \tag{1.19}$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

Apliquemos ahora el Teorema Espectral a la cónica.

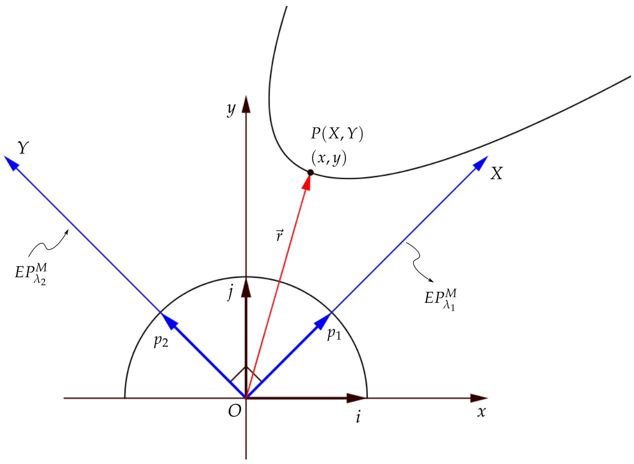


Figura 1.9. *Rotación de los ejes x, y que permite eliminar el término mixto xy.*

Como M es simétrica, por el teorema de los Ejes Principales[4], ∃P: ortogonal, i.e.,

$$P^{-1} = P^t, P = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 \\ p_1^2 & p_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ p_1 & p_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ [p_1]_{ij} & [p_2]_{ij} \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = [I]_{ij}^{p_1 p_2}$$

tal que

$$P^{-1}MP = P^t MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ son los valores propios de M. La matriz P lleva en sus columnas una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ con respecto al producto interno usual en $\mathbb{R}^2$ formado por vectores propios de M.
O sea que

$$Mp_1 = \lambda_1 p_1, Mp_2 = \lambda_2 p_2$$

[4] Para un estudio detallado, véase el reciente: *Álgebra de tensores, análisis espectral y aplicaciones*. Jaime Chica Escobar. Editorial Universidad de Antioquia. 2013. Cap. 7. Teoremas espectrales. pp. 602-715.

La base $\{p_1, p_2\}$ define unos ejes XY ortogonales con origen en O (véase Fig. 1.9) girados respecto a xy y se tiene que:

$$[\vec{r}]_{ij} = [I]_{ij}^{p_1p_2}[\vec{r}]_{p_1p_2} = P[\vec{r}]_{ij} \qquad \text{que llevamos a (1.19):}$$

$$\left(P[\vec{r}]_{p_1p_2}\right)^t M \left(P[\vec{r}]_{p_1p_2}\right) + F = 0$$

$$[\vec{r}]_{p_1p_2}^t \left(P^tMP\right)[\vec{r}]_{p_1p_2} + F = 0$$

Pero

$$P^tMP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Luego

$$[\vec{r}]_{p_1p_2}^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} [\vec{r}]_{p_1p_2} + F = 0 \tag{1.20}$$

y si llamamos

$$[\vec{r}]_{p_1p_2} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

se tiene

$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + F = 0.$$

y podemos escribir:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + F = 0$$

que sería la ecuación de la cónicarespecto al sistema XY.
La identificación del lugar ya es fácil de hacer conociendo λ_1 y λ_2, algo que no podríamos hacer a partir de (1.17).

(3) Si en la ecuación de la cónica está ausente el término mixto y los términos lineales, la ecuación es

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0$$

que es todavía más fácil de identificar.

Estos ejemplos señalan que es lo que se persigue al reducir la cónica: el objetivo es transformar la ecuación hasta llevarla a una forma que haga fácil identificar el lugar que representa.

1.5. Centro de una cónica

Supongamos que realizamos una traslación de ejes al punto O' de coordenadas (h, k) respecto al sistema xy, (véase Fig. 1.10).
El punto (h, k) no tiene que estar en la cónica. Quedan definidos dos ejes XY con origen en O, y paralelos a xy.
Sea $P(x, y), P(X, Y)$ un punto de la cónica.
Como $P(x, y)$ está en la curva, $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

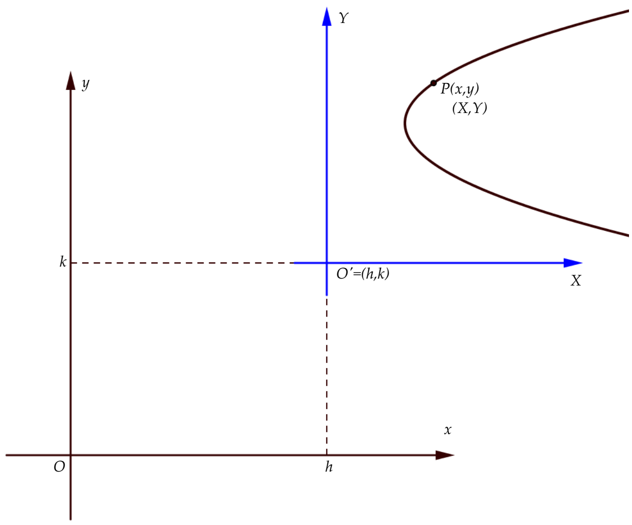


Figura 1.10. *La traslación de los ejes al punto $O'(h,k)$. Los nuevos ejes son $X \parallel x$ y $Y \parallel y$.*

El mismo punto P toma coordenadas (X,Y) respecto al sistema XY.
Las ecuaciones de la transformación son:

$$\begin{aligned} x &= X + h \\ y &= Y + k \end{aligned}$$

y la ecuación de la cónica respecto a XY es

$$A(X+h)^2 + 2B\,(X+h)\,(Y+k) + C(Y+k)^2 + 2D\,(X+h) + 2E\,(Y+k) + F = 0$$

que según se acaba de demostrar en la ecuación de incrementos puede escribirse así:

$$q(X,Y) + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{h,k}, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{h,k} \right) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + f(h,k) = 0.$$

Esta sería la ecuación de la cónica respecto al sistema XY, o también

$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{h,k} \; \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{h,k} \right) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + f(h,k) = 0 \tag{1.21}$$

Si queremos que se anulen los términos lineales en (1.21) debemos escoger (h,k) de modo que

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{h,k} = 0 \quad \text{y} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{h,k} = 0 \tag{1.22}$$

O sea debemos resolver para (h,k) el sistema

$$\begin{aligned} Ah + Bk + D &= 0 \\ Bh + Ck + E &= 0 \end{aligned}$$

o

$$\begin{cases} Ah + Bk = -D \\ Bh + Ck = -E \end{cases} \tag{1.23}$$

lo que equivale a decir que debemos hallar los $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ tal que

$$h\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D \\ -E \end{pmatrix}.$$

Es claro que $\forall(\tilde{h}, \tilde{k})$ que sea solución a (1.23), la ecuación del lugar (1.21) tiene la forma

$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + f\left(\tilde{h}, \tilde{k}\right) = 0$$

y se ha conseguido eliminar los términos lineales en (1.1).

Definición 1.1. *Se llama centro de la cónica* (1.1) *a todo* (h,k) *que sean solución de* (1.23).

Si en una cónica la componente lineal es nula, i.e., si $D = E = 0$, la cónica es

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0$$

y como los términos lineales están ausentes, no hay que hacer estudio de centros.
Una vez hallados los centros de la cónica y hecha la traslación a un centro el paso que sigue en la reducción será eliminar mediante una rotación de ejes el término mixto (si es que $B \neq 0$). Si $B = 0$, la ecuación es $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$ y la identificación del lugar es muy fácil de hacer.

Proposición 1.2. *Todo centro de una cónica es centro de simetría de la curva.*

Sea O' un punto de coordenadas (h,k) respecto al sistema xy, O' : centro de la cónica $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.
Entonces

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{h,k} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{h,k} = 0 \tag{1.24}$$

Luego si los ejes XY tienen origen en O' y son paralelos respecto al sistema xy, la ecuación de la cónica respecto al sistema XY es

$$q(X,Y) + f(h,k) = 0 \tag{1.25}$$

Tomemos $P(X,Y)$ en la cónica, (véase Fig. 1.11) y llamemos $Q(X',Y')$ a su simétrico respecto a O'.
Se debe demostrar que $Q(X',Y')$ está en la cónica, o lo que es lo mismo, que

$$q(X',Y') + f(h,k) = 0$$

Como $Q(X',Y')$ es simétrico de $P(X,Y)$ respecto a $0'$, $X' = -X$ y $Y' = -Y$.
Luego

$$\begin{aligned}
q(X',Y') + f(h,k) &= (X',Y')\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} + f(h,k) \\
&= (-X,-Y)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -X \\ -Y \end{pmatrix} + f(h,k) \\
&= (X,Y)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} + f(h,k) \\
&= q(X,Y) + f(h,k) \underset{\underset{(1.25)}{\uparrow}}{=} 0
\end{aligned}$$

Proposición 1.3. *Si* (h,k) *es un centro de simetría de la cónica,* (h,k) *es un centro de ella.*

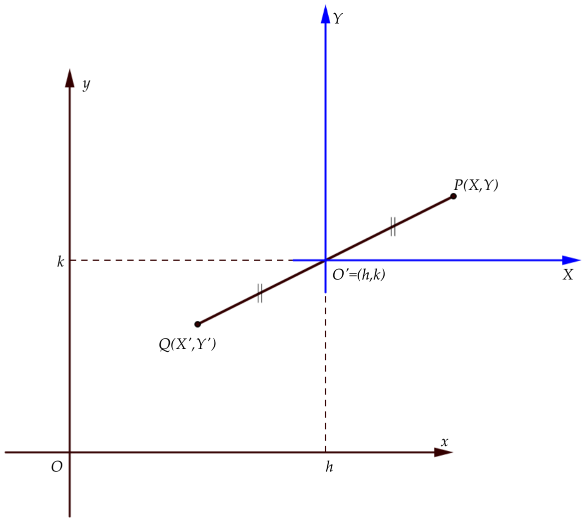


Figura 1.11. *$O'(h,k)$ es un centro de la cónica. $P(X,Y)$ es un punto de la cónica. $Q(X',Y')$ es el simétrico de P respecto a O'.*

Supongamos que (h,k) es centro de simetría de la curva.
La ecuación de la cónica referida a los ejes XY paralelos a xy y con origen en $O'(h,k)$ es:

$$\begin{pmatrix} X & , & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{h,k} & , & \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{h,k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + f(h,k) = 0$$

Sea $P(X,Y)$ un punto de la cónica y $Q(X',Y')$ el simétrico de P respecto a O', o sea que

$$X' = -X;\;\; Y' = Y \quad \text{(véase Fig. 1.11)}$$

Como $P(X,Y)$ está en la curva,

$$\begin{pmatrix} X & , & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{h,k} & , & \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{h,k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + f(h,k) = 0 \tag{1.26}$$

Como $Q(-X,-Y)$ también está en la curva,

$$\begin{pmatrix} -X & , & -Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -X \\ -Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{h,k} & , & \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{h,k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -X \\ -Y \end{pmatrix} + f(h,k) = 0$$

i.e.,

$$\begin{pmatrix} X & , & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{h,k} & , & \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{h,k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + f(h,k) = 0 \tag{1.27}$$

De (1.26) y (1.27):

$$2\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{h,k}, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{h,k}\right)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0,$$

cualquiera sea el punto (X,Y) en la cónica.
Luego el vector

$$\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{h,k}, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{h,k}\right)$$

es perpendicular a $\overrightarrow{O'P}$ cualquiera sea P en la cónica y esto solo es posible si

$$\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{h,k}, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{h,k}\right) = (0,0),$$

i.e.,

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{h,k} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{h,k} = 0 \end{cases}$$

lo que significa que (h,k) es un centro de la cónica.

1.6. Ejemplos

(1) Si la cónica consta de dos rectas paralelas, todo punto de la paralela media m de ellas es centro de simetría de la cónica, (véase Fig. 1.12).
Luego la cónica tiene infinitos centros:

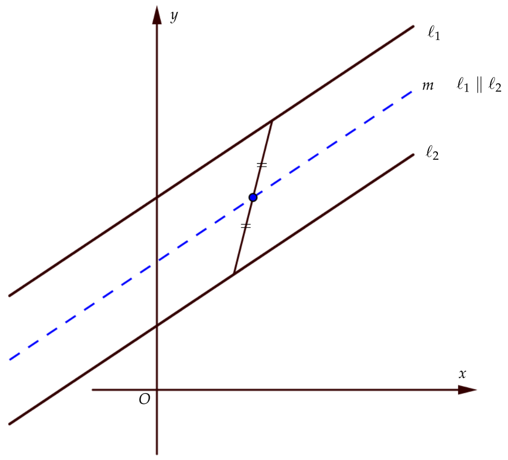


Figura 1.12

(2) Si la cónica es una recta (una recta doble se dice a veces), la cónica tiene infinitos centros ya que todo punto de la recta es centro de simetría de ella.

(3) Si la cónica no tiene centro de simetría, no tiene centro.
Por ejemplo, la parábola no tiene centro de simetría y por lo tanto, la parábola no tiene centro, pero sí tiene un vértice.

(4) Un vértice de una cónica es un punto que está en la cónica, y por el que pasa exactamente un eje de simetría de la curva.
El vértice no alcanza a ser un centro de la cónica porque para que lo fuese debería ser centro de simetría de la curva y debería haber dos ejes perpendiculares de simetría para la curva pasando

por el punto.[5]
En la parábola $\mathscr{P}$:
$V \in \mathscr{P}$, V es el vértice, (véase Fig. 1.13).

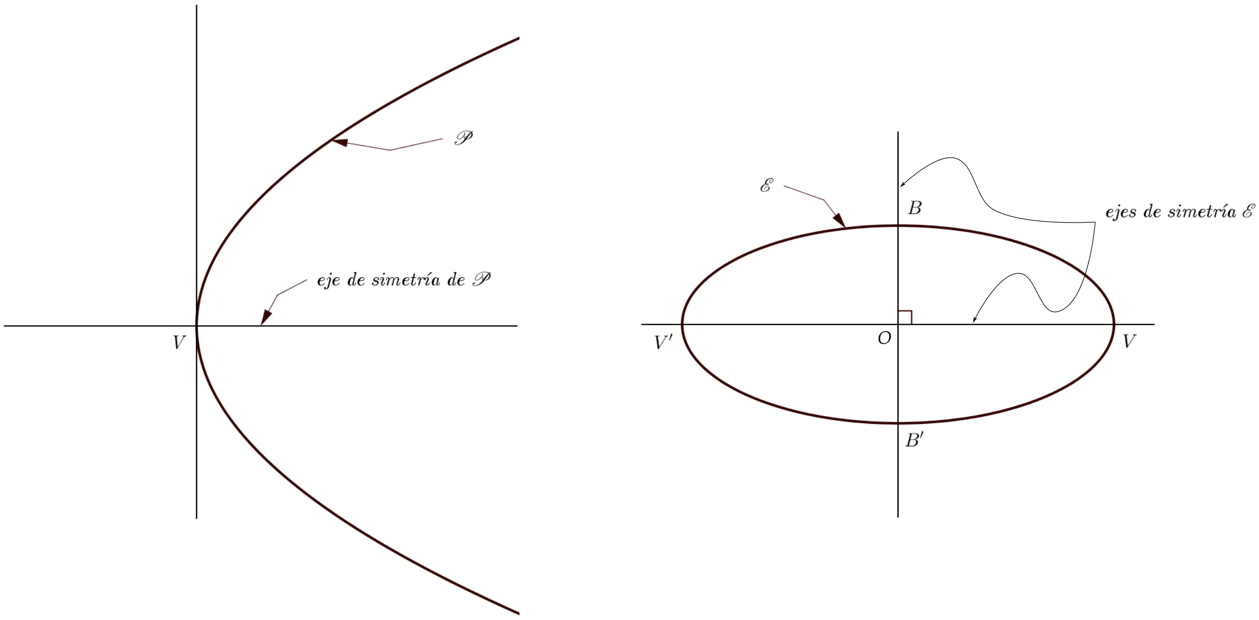


Figura 1.13

En la elipse $\mathscr{E}$:
V', V, B' y $B \in \mathscr{E}$ y son vértices de $\mathscr{E}$. O es el centro de $\mathscr{E}$, (véase Fig. 1.13).
En la hipérbola $\mathscr{H}$, (véase Fig. 1.14).
V' y $V \in \mathscr{H}$ y son vértices de $\mathscr{H}$. O es el centro de $\mathscr{H}$.

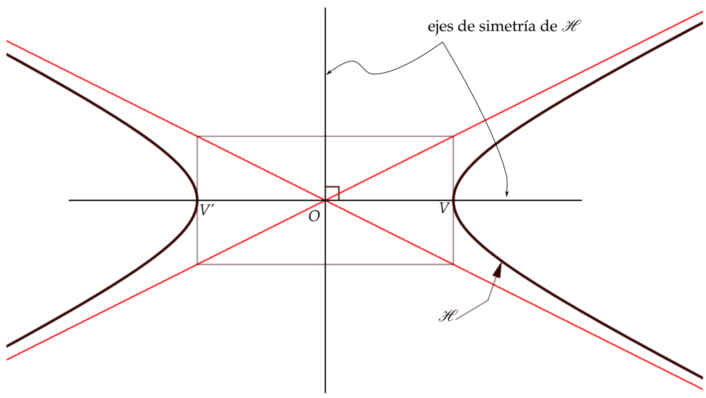


Figura 1.14

Como se comprende, la noción de centro permite clasificar las cónicas en tres categorías:

[5] Para un estudio muy detallado sobre las secciones cónicas, veáse al respecto: Jaime Chica Escobar, Hernando Manuel Quintana Ávila. *Tratado de las Secciones Cónicas*, Vols. 1, 2. Fondo Editorial ITM. 2013, 2014.

$$\begin{cases} \text{Cónicas con centro único: la circunferencia, la elipse, la hipérbola.} \\ \text{Cónicas sin centro: la parábola.} \\ \text{Cónicas con infinitos centros: las cónicas degeneradas.} \end{cases}$$

Consideremos una cónica con $(D,E) \neq (0,0)$ y en la que $\left\{ \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} \right\}$ es Base de $\mathbb{R}^2$, (véase Fig. 1.15). Esto equivale a decir que el área del paralelogramo de $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ es diferente de 0, o que

$$AC - B^2 = \delta \neq 0$$

La cónica *tiene centro único* ya que en ese caso $\begin{pmatrix} -D \\ -E \end{pmatrix}$ es CL de $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ de manera única, lo que

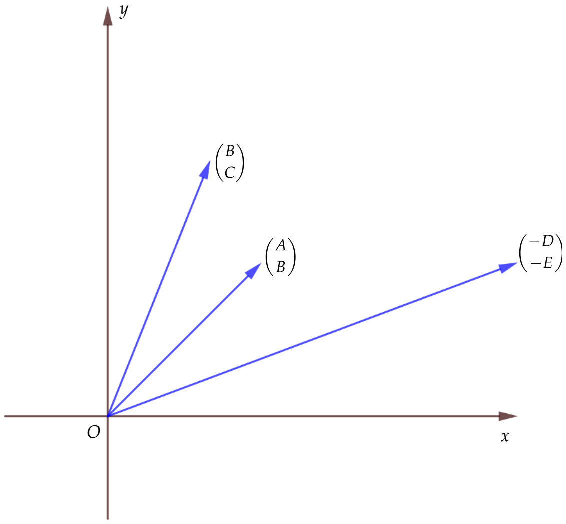


Figura 1.15

equivale a decir que el sistema

$$\begin{aligned} Ah + Bk &= -D \\ Bh + Ck &= -E \end{aligned}$$

tiene solución única $\begin{pmatrix} \widehat{h} \\ \widehat{k} \end{pmatrix}$ dada por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widetilde{h} \\ \widetilde{k} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -D \\ -E \end{pmatrix} = \frac{1}{AC - B^2} \begin{pmatrix} C & -B \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -D \\ -E \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} -CD + BE \\ BD - AE \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

O sea que

$$\widetilde{h} = \frac{-CD + BE}{\delta} \quad \text{y} \quad \widetilde{k} = \frac{BD - AE}{\delta} \tag{1.28}$$

son las coordenadas del centro de la cónica.
Como ya hemos dicho, si trasladamos los ejes xy al punto O' de coordenadas $(\widetilde{h},\widetilde{k})$, obtenemos otro sistema de coordenadas XY (véase Fig. 1.16), respecto al cual la ecuación de la cónica es:

$$\begin{pmatrix} X & , & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + f(\widetilde{h},\widetilde{k}) = 0 \tag{1.29}$$

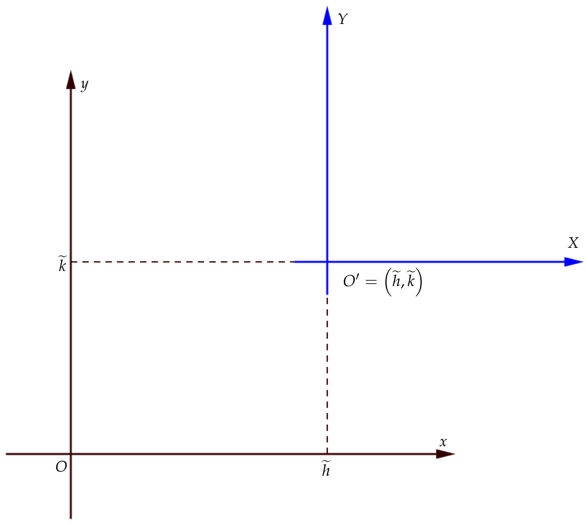


Figura 1.16. *Traslación del sistema xy al punto* $O'(\widetilde{h},\widetilde{k})$.

La ecuación (1.29) no tiene términos en X ni en Y. O sea que hemos conseguido eliminar la parte lineal de la ecuación (1.1).
Hallados $(\widetilde{h},\widetilde{k})$, para tener definida (1.29) debemos calcular

$$f(\widetilde{h},\widetilde{k}) = A\widetilde{h}^2 + 2B\widetilde{h}\widetilde{k} + C\widetilde{k}^2 + 2D\widetilde{h} + 2E\widetilde{k} + F \tag{1.30}$$

Esto podríamos hacerlo simplemete reemplazando en la expresión para $f(x,y)$, x por $\widetilde{h}$ y y por $\widetilde{k}$.
Sin embargo, podemos obtener $f(\widetilde{h},\widetilde{k})$ de una manera más simple.

$$f(\widetilde{h},\widetilde{k}) = \left(A\widetilde{h} + B\widetilde{k}\right)\widetilde{h} + \left(C\widetilde{k} + B\widetilde{h}\right)\widetilde{k} + 2D\widetilde{h} + 2E\widetilde{k} + F \tag{1.31}$$

Pero

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{h} \\ \widetilde{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D \\ -E \end{pmatrix}$$

Luego

$$\left.\begin{aligned} A\widetilde{h} + B\widetilde{K} &= -D \\ B\widetilde{h} + C\widetilde{k} &= -E \end{aligned}\right\} \quad \text{que llevamos a (1.31) obteniendo} \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned} f(\widetilde{h},\widetilde{k}) &= -D\widetilde{h} - E\widetilde{k} + 2D\widetilde{h} + 2E\widetilde{k} + F \\ &= D\widetilde{h} + E\widetilde{k} + F \end{aligned} \tag{1.33}$$

Así que una vez hallados $\widetilde{h}$ y $\widetilde{k}$ obtenemos $f(\widetilde{h},\widetilde{h})$ a través de (1.33) y no a través de (1.31) que resulta más tedioso.

Existe otra forma de obtener $f(\widetilde{h},\widetilde{k})$ más conveniente para nuestros propósitos y sin pasar por la obtención de $(\widetilde{h},\widetilde{k})$. No olvidemos que estamos analizando el caso de una cónica con centro único $(\delta \neq 0)$.
Según (1.32):

$$\begin{aligned} A\widetilde{h} + B\widetilde{k} + D &= 0 \\ B\widetilde{h} + C\widetilde{k} + E &= 0 \end{aligned}$$

Segun (1.33):

$$D\widetilde{h} + E\widetilde{k} + F - f(\widetilde{h},\widetilde{k}) = 0$$

O sea que

$$\widetilde{h}\begin{pmatrix} A \\ B \\ D \end{pmatrix} + \widetilde{k}\begin{pmatrix} B \\ C \\ E \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} D \\ E \\ F - f(\widetilde{h},\widetilde{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

lo que nos demuestra que el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} A \\ B \\ D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \\ E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \\ F - f(\widetilde{h},\widetilde{k}) \end{pmatrix} \right\}$$

es linealmente dependientes y por lo tanto,

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F - f(\widetilde{h},\widetilde{k}) \end{vmatrix} = 0$$

Este determinante se puede descomponer como la suma de dos determinantes.

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} A & B & 0 \\ B & C & 0 \\ D & E & -f(\widetilde{h},\widetilde{k}) \end{vmatrix}}_{\displaystyle \| } = 0$$

$$-f(\widetilde{h},\widetilde{k})\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = -f(\widetilde{h},\widetilde{k})\delta$$

Como hemos llamado

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

y se tendrá que

$$\begin{aligned} \Delta - f(\widetilde{h},\widetilde{k}) \cdot \delta &= 0 \\ \therefore \quad f(\widetilde{h},\widetilde{k}) &\underset{\substack{\uparrow \\ (\delta \neq 0)}}{=} \frac{\Delta}{\delta} \end{aligned}$$

La ecuación (1.29) de la cónica se escribe ahora así:

$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \quad \text{ó}$$

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{1.34}$$

Bibliografía

[1] Ostermann Alexander and Wanner Gerhard, *Geometry by its history*, 1 ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.

[2] Holme Audun, *Geometry our cultural heritage*, 2 ed., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

[3] Nievenglowski B., *Cours de geométrie*, Gauthiers-Villars, 1894.

[4] Mataix. C, *Tratado de geometría analítica*, Dossat, 1957.

[5] Mugler Charles, *Dictionaire historique terminologie géométriques des grecs*, Librairie C. Klincksieck, 1958.

[6] Smith. E. and Salkover. M, *Analytic geometry*, John Wiley, 1954.

[7] Borceaux Francis, *Geometry trilogy*, 1 ed., vol. 2, Springer, 2013.

[8] Toomer G. J., *Apollonius conics books v to vii*, Springer-Verlag, 1990.

[9] Chica Jaime, *Álgebra de tensores, análisis espectral y aplicaciones*, Universidad de Antioquia, 2013.

[10] Chica Jaime and Quintana Hernando Manuel, *Tratado de las secciones cónicas: La elipse*, 1 ed., vol. 2, Fondo Editorial ITM, 2013.

[11] ______, *Tratado de las secciones cónicas: La parábola*, vol. 1, Fondo Editorial ITM, 2014.

[12] De Greiff. L, *Geometría analítica plana y del espacio*, Bedout, 1968.

[13] Heath T L., *Treatise on conic sections*, Cambridge University Press, 1896.

[14] Heiberg I. L., *Apollonii pergaei quae graece exstant*, B. G. Teubneri, 1891.

[15] Fried Michael N., *Edmund halley reconstruction of the lost book of apollonius conics*, Springer-Verlag, 2011.

[16] Nezt R., *The shaping of deduction in greek mathematics*, Cambridge University Press, 1999.

[17] Shafarevich Igor R. and Remizov Alexey O., *Linear algebra and geometry*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013, Translated by David Kramer and Lena Nekludova.

[18] Géza Schay, *A concise introduction to linear algebra*, Springer Science+ Business Media, LLC, 2012.

[19] H. Kindle. J. (S.F), *Teoría y problemas de geometría analítica plana y del espacio*, Serie Schaum.

[20] H. Lehmann. Ch. (S.F), *Geometría analítica*, Limvse.

[21] Van Nostrand Bowser. (S.F), *An elementary treatise on analytic geometry*.

[22] Smith-Sullivan, *Elementos de geometría analítica*, Nigar S.R.L, 1955.

[23] Par une reunión de professeurs (S.F), *Cours de geometrie*.

[24] Akopyan A. V. and Zaslavsky A A., *Geometry of conic*, Mathematical World, vol. 26, American Mathematical Society, 2007, Translated by Alex Martsinkovsky.

[25] Efimov. N. V, *Formas cuadráticas y matrices*, Moscú: Mir, 1970.

[26] Frere. R. y Gastam. B, *Cours de geometrie analytique*, Imprimerie de la Salle, 1954.

[27] Wan Zhe-Xian, *Geometry of matrices*, World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 1996.

Índice alfabético

JAIME CHICA ESCOBAR

Ingeniero Civil (Universidad Nacional de Colombia). Matemático (Universidad de Antioquia). Profesor de Mecánica en la Universidad Nacional entre los años 1960-1972. Docente de tiempo completo en la Facultad de Ingeniería de la U de A, entre los años 1972-1975. Docente jubilado del Departamento de Matemáticas de la U de A. Asesor de tesis de pregrado de estudiantes de Matemáticas de la U de A. Ha participado en encuentros de matemáticas de carácter regional y nacional como ponente. Entre sus publicaciones se destacan: *Álgebra de Tensores, análisis espectral y aplicaciones, ed. UdeA, 2013*, *Introducción a la Geometría del Espacio*, *Tratado sobre las Secciones Cónicas: La Parábola, Vol. I., ed. ITM. 2014*, *Tratado sobre las Secciones Cónicas: La Elipse, Vol. II., ed. ITM. 2013*.

HERNANDO MANUEL QUINTANA ÁVILA

Matemático, Magíster en Matemáticas Aplicadas, Especialista en Estadística, Administrador de Empresas Agropecuarias. Docente de tiempo completo de la Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas ITM. Entre sus publicaciones se destacan dos artículos en la revista *Schizophrenia Research*: *Fewer but heavier Caffeine consumers in schizophrenia*: *a case-control study* y *smoking initiation and schizophrenia*: *a replication study in a spanish sample*. Coautor de los libros: *Cálculo diferencial*: *Límites y derivadas*, *Aplicaciones matemáticas en ingeniería. Capítulo II*: *Uso de la Programación Dinámica en operaciones de embalses*, *Tratado sobre las Secciones Cónicas: La Parábola, Vol. I., ed. ITM. 2014*, *Tratado sobre las Secciones Cónicas: La Elipse, Vol. II., ed. ITM. 2013*. Ha escrito más de 30 artículos de divulgación matemática en el periódico institucional del ITM. Ha participado como ponente en varios encuentros internacionales de matemáticas.

Las fuentes tipográficas empleadas son: Palatino Font
10 puntos en texto corrido.

Esta obra presenta un estudio detallado y riguroso, en el que se hace uso de herramientas del álgebra lineal (matrices, valores y vectores propios, el teorema espectral, para matrices simétricas) que permiten identificar y reducir los lugares geométricos representados por la ecuación general de segundo grado en dos variables (las cónicas) y en tres variables (las superficies cuádricas). En la obra también se construyen diagramas de flujos que permiten la sistematización en la identificación y reducción de los lugares geométricos.

This volume thoroughly examines linear algebra tools (matrices, eigenvalues and eigenvectors, and the spectral theorem for symmetric matrices) that enable to identify and reduce loci represented by the quadratic equation in two (conic) and three variables (quadric surfaces). It also includes flowcharts that systematize focus identification and reduction.

ITM
Institución Universitaria
Acreditada en Alta Calidad

ISBN 978-958-5414-25-9