

ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS PARCIALES EN MALLAS ELÉCTRICAS

GABRIEL POVEDA RAMOS¹

Resumen

Este artículo presenta un método de análisis de una malla triangular de impedancias eléctricas iguales, compuesto por bucles triangulares formados por esas impedancias; y muestra cómo se obtiene una ecuación en diferencias finitas, parcial, que relacione la intensidad de la corriente de Maxwell en cada bucle (n,m) con las corrientes de los bucles vecinos. Se resuelve esta ecuación por el método de Lagrange y se aplican las condiciones de frontera para obtener explícitamente la impedancia total equivalente de la malla y la distribución de las corrientes de Maxwell en toda la malla. Este método se puede usar en numerosos tipos de mallas eléctricas distintas a la presente, con varias ventajas sobre el método usual de descomponerlas en bucles y nodos, aplicar las dos leyes de Kirchhoff a las corrientes de cada rama y a los voltajes alrededor de cada bucle, formar un gran sistema de ecuaciones algebraicas de primer grado, y finalmente obtener cada una de éstas resolviendo el sistema numérica o algebraicamente. En muchos años como Ingeniero Electricista, el autor no ha visto que se use esta metodología, por lo cual piensa que es un aporte original y útil a la teoría de los circuitos eléctricos.

¹ Ingeniero Químico, Ingeniero Electricista. Doctor en Ingeniería, Honoris Causa Profesor Emérito, Escuela de Formación Avanzada, Universidad Pontificia Bolivariana
Correo electrónico: gapora@une.net.co

Palabras clave

Redes eléctricas, Ecuaciones en Diferencias Finitas Parciales, Raíces de ecuaciones.

Abstract

This paper presents a method to analyze a triangular network of equal electrical impedances, and composed by triangular meshes constituted themselves by these impedances; and shows how to obtain a partial, finite differences equation, relating the Maxwell current in each mesh (n, m) with those currents in the currents in the neighboring meshes. The differences equation is solved by the method of Lagrange, and boundary conditions are applied in order to obtain explicitly the total, equivalent impedance of the network and the distribution of the Maxwell currents across the whole network. This treatment surpasses the usual one of isolating meshes and nodes, applying the two laws of Kirchhoff to currents and voltages and finally solving a large system of linear algebraic equations by numerical or algebraic methods. During many years as an electrical engineer, the author has not seen used this methodology, so that he considers this is an original and useful addition to the theory of electric circuits.

Key words

Electric networks, Partial Finite Differences Equations, Complex roots of equations.

INTRODUCCIÓN

En los cursos universitarios para estudiantes de ingeniería eléctrica se les instruye sobre la manera de calcular las corrientes por cada rama de una malla eléctrica de elementos lineales, pasivos y bilaterales, y las diferencias de potencial entre cada par de nodos, aplicando a unas y otras incógnitas las conocidas dos leyes de Kirchhoff. Esto da lugar a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales que se resuelve por alguno de los muchos métodos bien conocidos, y se obtienen las corrientes de cada rama y los potenciales de cada nodo. Este es un problema de ocurrencia muy frecuente en la práctica de la ingeniería eléctrica y de la electrónica. Pero los currículos de estas profesiones no incluyen, por lo regular, el estudio de las Ecuaciones en Diferencias Finitas, ni con una variable independiente y, menos aún, con varias variables. Aquí se presenta, con un ejemplo específico, el método de resolver una malla de circuitos eléctricos lineales, usando la teoría de las EE. en DD. FF. Parciales. El autor cree hacer un aporte original y aún no conocido al análisis de circuitos eléctricos. En consecuencia, éste es un resultado original y es un caso didáctico para mostrar la eficacia de las Ecuaciones en Diferencias Finitas Parciales en el análisis de redes eléctricas repetitivas, es decir, que están constituidas por un cierto bucle-unidad (en inglés, *mesh*; en francés, *boucle*; en alemán *stromlocke*) que se repite en su mismo plano, formando una malla bidimensional. En este caso, se trata de una malla triangular, formado por bucles triangulares, constituido cada uno por tres resistencias (o resistores) R . La malla es alimentada por una fuente de corriente (en el dibujo representada por una batería de pilas, cuya fuerza electromotriz es E , conectada a dos esquinas de la malla triangular, como lo muestra el dibujo anexo).

La Ecuación en DD.FF.PP.

Es necesario establecer un sistema de numeración para indicar la ubicación de cada bucle triangular unitario, en la malla completa. Adoptaremos el siguiente:

1. Los bucles que son tocados por la corriente I que viene de la fuente de voltaje E forma la fila 1ª (por definición). También están en esta 1ª fila los bucles que separan a los anteriores, uno de otro.

2. En esta 1ª fila, el bucle N° 1 es el que está conectado a un polo de la batería.

El bucle N° 2 de la misma fila es que el comparte una resistencia R con el primero. El N° 3 es que comparte una resistencia R con el N° 2. Y así, sucesivamente. El último bucle triangular de esta 1ª fila tiene el número ordinal N y un momento de reflexión muestra que N es un número natural impar.

Por estar en la fila $m=1$, estos bucles, se pueden numerar así: $(1,1), (2,1), (3,1), \dots, ((N-1),1), (N,1)$.

3. En la fila 2ª ($m=2$) están los bucles tales que, cada uno de ellos, comparte una resistencia con algún bucle de la 1ª fila, o con alguno de estos últimos. Se les numera: $(1,2), (2,2), (3,2), \dots$ hasta $((N-2),2)$, porque esta fila solo tiene $(N-2)$ bucles.

4. Por un procedimiento semejante se forma la fila 3ª, que tiene $(N-4)$ bucles triangulares. Sus bucles se numeran: $(1,3), (2,3), (3,3), \dots, ((N-4),3)$.

5. Así se numeran todas las filas desde la fila 1ª ($m=1$) hasta la fila del vértice de la malla (donde $m = (N+1)/2$) que tiene un solo bucle, cuyo número es $(1, (N+1)/2)$.

6. Cada bucle queda así marcado por el par de números (n,m) , donde n va desde 1 hasta $N-2m+2$. Nótese que siendo N impar, el número $N-2m+2$ también es impar. Cada línea (definida por un valor de m) tiene un bucle triangular en su centro, marcado por los números $((N-2m+3)/2, m)$.

7. El bucle que está en el vértice del triángulo queda indicado con el par de números $(1, (N+1)/2)$.

8. Cada fila de bucles, con un mismo valor de m , tiene un número impar de bucles, y ese número es $N-2m+2$. El bucle que está en la mitad de esa fila está señalado por el par de números $((N-2m+3)/2, m)$.

El método llamado de “bucles de Maxwell”, para analizar corrientes en circuitos, consiste aquí en aceptar que existe en cada bucle una “corriente de Maxwell”, circular y cerrada, en el sentido de las agujas del reloj, que se designará como $i(n, m)$, y una corriente de Maxwell para el circuito exterior de la batería y las N resistencias en serie de la fila $m=1$ de bucles. Esta última corriente se designa como I .

Considérese el bucle (n, m) y se le aplica la 2ª Ley de Kirchhoff, del equilibrio de voltajes, que se expresa así:

$$R \cdot i(n-1, m) + R \cdot i(n+1, m-1) - R \cdot 3i(n, m) + R \cdot i(n+1, m) = 0 \quad (01)$$

Simplificado por R , aumentando una unidad a n y una unidad a m y reordenando los términos de la ecuación, resulta

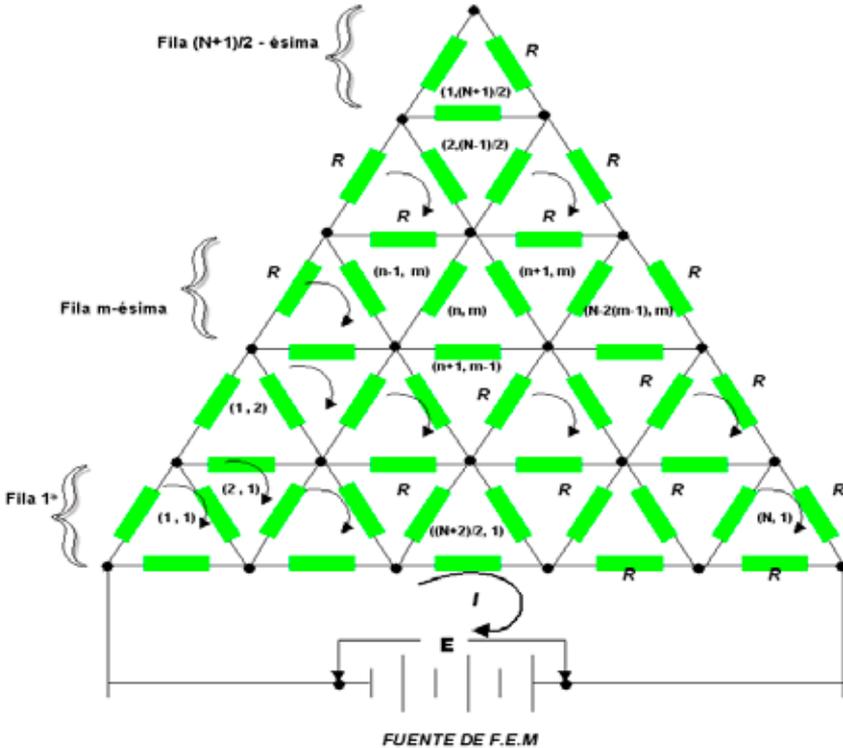
$$i(n, m+1) + i(n+2, m+1) + i(n+2, m) - 3 \cdot i(n+1, m+1) = 0 \quad (02)$$

Esta es una ecuación en diferencias finitas parciales, con dos variables, lineal, con coeficientes constantes, de segundo orden.

Malla eléctrica triangular repetitiva (corrientes de Maxwell)

Ecuación en diferencias finitas parciales:

$$R^*i(n+2,m+1) + R^*i(n+2,m) + R^*i(n,m+1) - 3^*R^*i(n+1,m+1) = 0$$



La solución de la ecuación

Para este tipo de ecuaciones de DD.FF. y parciales, es particularmente apropiado el método de solución de Lagrange, que comienza por admitir soluciones de la forma

$$C\lambda^n \mu^m \quad (03)$$

en donde λ y μ son dos valores numéricos constantes, pero aún por conocer, y C es un coeficiente constante y arbitrario.

Sustituyendo esta presunta solución en la ecuación, se encuentra que

$$C\lambda^n \mu^m (\lambda^2 \mu + \lambda + \mu - 3\lambda\mu) = 0 \quad (04)$$

y de aquí se deduce que

$$\mu\lambda^2 - (3\mu - 1)\lambda + \mu = 0$$

y por lo tanto hay dos valores posibles para λ que se pueden escribir como

$$\lambda = \frac{3\mu - 1 \pm \sqrt{(3\mu - 1)^2 - 4\mu^2}}{2\mu} \quad (05)$$

es decir que

$$\lambda_1 = \left[(3\mu - 1) + \sqrt{(3\mu - 1)^2 - 4\mu^2} \right] / 2\mu$$

$$\lambda_2 = \left[(3\mu - 1) - \sqrt{(3\mu - 1)^2 - 4\mu^2} \right] / 2\mu$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación en DD.FF.PP. tendrá la forma

$$i(n, m) = \mu^m (C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n) \quad (06)$$

siendo C_1, C_2 , dos constantes arbitrarias e independientes, que están por determinar.

Al pensar en la forma como se distribuyen las corrientes en el espacio de la red, y en la manera como se han numerado los bucles, se aprecia que, si la numeración de n se hubiera hecho de derecha a izquierda, los valores de las corrientes de Maxwell no hubieran cambiado. Es decir, que las intensidades de estas corrientes son bilateralmente simétricas alrededor de la “altura” máxima del triángulo. Por lo tanto, el parámetro λ debe ser tal que para todo valor de n , desde 1 hasta N , se debe tener que

$$\lambda^n = \lambda^{N+1-n} \Rightarrow$$

o sea que

$$\lambda^{2n} = \lambda^{(N+1)} \quad (\text{para } n=1,2,\dots,N)$$

Un ejercicio de álgebra elemental muestra que los únicos valores que puede tener el parámetro λ son $\sqrt{-1} = j$, $-j$, $+1$ y -1

Si fuera $\lambda_1 = +1$, un ejercicio sencillo de álgebra muestra que μ tendría que ser $\mu = 1$. Y si fuera $\lambda_2 = +1$, el ejercicio muestra que μ tendría que ser $\mu = 1/5$.

Los casos de $\mu = 1$ y de $\mu = 1/5$ son incompatibles con una condición eléctrica en el bucle $(1, (N+1)/2)$ que se mostrará más abajo. El posible caso de que el discriminante $(3\mu - 1)^2 - 4\mu^2$ fuera cero, exige que μ fuera $\mu = 1$ o bien $\mu = 0.2$, lo que choca con la misma objeción eléctrica. Pero los valores j y $-j$ para λ corresponden a $\mu = 1/3$, que es compatible con todas las condiciones eléctricas de la malla.

Las raíces complejas

De lo anterior se deduce que el discriminante $(3\mu - 1)^2 - 4\mu^2$ debe ser negativo, y, por lo tanto, λ_1 y λ_2 son dos números complejos y distintos:

$$\lambda_1 = \alpha + j\beta = re^{j\phi} \quad \lambda_2 = \alpha + j\beta = re^{-j\phi} \quad (07)$$

siendo

$$\alpha = (3\mu - 1)/(2\mu) = 0 \quad , \quad \beta = \sqrt{6\mu - 5\mu^2 - 1}/2\mu$$

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1 \quad \phi = \text{tg}^{-1}(\beta/\alpha) = \text{tg}^{-1}\left[\sqrt{6\mu - 5\mu^2 - 1}/(3\mu - 1)\right] = \pi/2$$

Ya se vio que la simetría de la red exige que el parámetro λ sea 1 , -1 , j , ó $-j$, que tiene que tener discriminante negativo y que sus posibles valores son

$$\lambda_1 = j = e^{j\pi/2} \Rightarrow \lambda_1^n = e^{jn\pi/2} \Rightarrow \mu = 1/3 \quad (08.a)$$

$$\lambda_2 = -j = e^{-j\pi/2} \Rightarrow \lambda_2^n = e^{-nj\pi/2} \Rightarrow \mu = 1/3 \quad (08.b)$$

y la solución general de la E. en DD.FF. (02) es

$$i(n,m) = \mu^m (C_1 e^{-j\pi/2} + C_2 e^{-nj\pi/2}) \quad (09)$$

que puede escribirse también

$$\begin{aligned} i(n,m) &= \mu^m [(C_1 + C_2) \cos(n\pi/2) + j(C_1 - C_2) \operatorname{sen}(n\pi/2)] \\ &= \mu^m [B_1 \cos(n\pi/2) + B_2 \operatorname{sen}(n\pi/2)] \\ &= D \cos\left\{ \left[n - (N+3-2m)/2 \right] (\pi/2) \right\} \mu^m \end{aligned} \quad (10)$$

en donde B_1 y B_2 son constantes arbitrarias: $B_1 = C_1 + C_2$, $B_2 = j(C_1 - C_2)$ y D está explícitamente definida por

$$D \cos\left[(N+3-2m/2) \pi/2 \right] = B_1$$

$$D \operatorname{sen}\left[(N+3-2m/2) \pi/2 \right] = B_2$$

Para el bucle $(1, (N+1)/2)$, el valor del argumento del coseno $([n - N + 3 - 2m/2] \pi/2)$ es $[1 - (N+3 - N - 1)/2] \pi/2 = 0$

y para el bucle $(2, (N-1)/2)$ el argumento del coseno es

$$([n - N + 3 - 2m/2] \pi/2) = [2 - N/2 - 3/2 + (N-1)/2] \pi/2 = 0$$

Por lo tanto

$$i(1, (N+1)/2) = D \mu^{(N+1)/2} \cdot \cos 0 = D \mu^{(N+1)/2}$$

$$i(2, (N-1)/2) = D \mu^{(N-1)/2} \cdot \cos 0 = D \mu^{(N-1)/2}$$

Además, la segunda ley de Kirchoff para el bucle $(1, (N+1)/2)$ del vértice de la malla, da:

$$3 \cdot i(1, (N+1)/2) - i(2, (N-1)/2)$$

y sustituyendo y simplificando:

$$3D\mu^{N/2+1/2} = D\mu^{N/2-1/2} \Rightarrow \mu = 1/3$$

tal como ya se había advertido.

Las condiciones de frontera

Para calcular la constante D y relacionarla con la corriente I del circuito externo, se escriben las ecuaciones eléctricas para los bucles de la fila $m=1$, y se suman:

$$-3i_{11} + i_{21} + I = 0^2$$

$$i_{11} - 3i_{21} + i_{31} + I = 0$$

$$i_{21} - 3i_{31} + i_{41} + I = 0$$

.....

$$i_{N-2,1} - 3i_{N-1,1} + i_{N,1} + I = 0$$

$$i_{N-1,1} - 3i_{N,1} + I = 0$$

$$-2i_n - i_{21} - i_{31} - \dots - i_{N-2,1} - i_{N-1,1} - 2i_{N,1} + NI = 0$$

De donde:

$$NI - i_{11} - i_{21} - i_{31} - \dots - i_{N-1,1} - i_{N,1} = i_{11} + i_{N,1}$$

Pero: el argumento de coseno en la función (10).

$$(n - (N + 3 - 2m)/2)\pi/2$$

cuando $m=1$, se convierte en

$$[n - (N + 1)/2]\pi/2$$

² En esta parte indicamos, por abreviar, con i_{hk} las corrientes de Maxwell $i(h,k)$.

La distribución de las corrientes

Sobre la paridad de esta expresión se puede deducir de inmediato que, dado que N necesariamente es impar, $(N+1)/2$ es un número entero (par o impar).

Entonces se dan las siguientes posibilidades respecto a la paridad del número $n-(N+1)/2$:

a) Si $(N+1)/2$ es impar y n es par, entonces $n-(N+1)/2$ es impar y negativo (-1,-3,-5, etc.)

b) Si $(N+1)/2$ es impar y n es impar, $n-(N+1)/2$ es par y negativo (-2,-4,etc-)

c) Si $(N+1)/2$ es par y n es par, $n-(N+1)/2$ es par y negativo (-2,-4,etc.)

d) Si $(N+1)/2$ es par y n es impar, $n-(N+1)/2$ es impar y negativo (-1,-3,etc.)

En el triángulo del dibujo que acompaña a este artículo, el número N es $N=9$ y $(N+1)/2=5$. Por eso, para $n=2, n=4, n=6$ (y en general, para n para y $m=1$), $n-(N+1)/2$ vale -3,-1, 1,3. Entonces, en estos bucles ($n=2, 4, 6, 8$) el coseno es $\cos\{[n-(N+1)/2](\pi/2)\}=0$. Por lo tanto

$$i(2,1)=0=i(4,1)=0=i(6,1)$$

en nuestro dibujo.

En cambio, en el mismo dibujo anexo ($N=9$), los bucles que tienen $n=1, n=3, n=5, n=7, n=9$ (con $m=1$), hacen que $(N+1)/2=5$ y que

$$n-(N+1)/2$$

sea un número par. Por lo tanto el coseno es

$$\cos\{[n-(N+1)/2](+\pi/2)\}=\cos(\pm 2k\cdot\pi/2=-1)$$

Entonces, en el dibujo anexo se tiene que

$$i(2,1)=0=i(4,1)=0=i(6,1)=0=i(8,1)$$

y, para cualquier valor de N (que es impar), se tiene:

$$i(2h,1)=0 \quad (\text{para } h = 1,2,3,\dots,N-1)$$

Y, en general, de la suma de ecuaciones anteriores

$$NI - i(1,1) - i(3,1) - \dots - i(N-2,1) - i(N-1) = i(1,1) + i(N,1)$$

La resistencia ohmica de la malla

Para el circuito exterior, la segunda ley de Kirchhoff se escribe:

$$E - [IN - i(1,1) - i(3,1) - \dots - i(N,1)]R = 0$$

es decir

$$E - [i(1,1) + i(N,1)]R = 0$$

Pero $i(1,1) = i(N,1)$ por la simetría bilateral de la red, y la resistencia ohmica de la red resulta ser

$$Z = \frac{E}{I} = \frac{2i(1,1)}{I}R$$

En el bucle central de la 1ª fila ($m=1$), se tiene $i((N+1)/2,1) = i^*$ (por designación), y además, dentro de ese bucle:

$$+3Ri^* = IR \Rightarrow i^* = I/3$$

Pero según la solución general (10):

$$i^* = i((N+1)/2,1) = D \cdot \cos\left\{\left[\frac{(N+1)}{2}\right]\pi/2\right\} \mu$$

de donde

$$I/3 = D \cos^{\circ} \mu \Rightarrow D = I\mu/3 = I/9$$

La solución completa

La solución de la E. en DD.FF.PP. es, pues:

$$i(n,m) = (I/9)\mu^m \cdot \cos\left\{\left[n - (N+3-2m)/2\right]\pi/2\right\}$$

y en el triángulo del dibujo anexo

$$(N=9): i(n,m)=I(1/3)^{m+2} \cdot \cos\{(n+m-6)\pi/2\}.$$

Ya se pueden calcular todas las corrientes de bucles del dibujo anexo:

En la fila $m=1$

$$i(1,1)=(I/9)(1/3) \cos(-4) \cdot \pi/2=I/27$$

$$i(2,1)=0=i(4,1)=\dots=i(8,1)=0$$

$$i(3,1)=(I/9)(1/3) \cos(-2\pi/2)=-I/27$$

$$i(5,1)=(I/9)(1/3) \cos 0=I/27$$

$$i(7,1)=(I/9)(1/3) \cos(2\pi/2)=-I/27$$

$$i(9,1)=(I/9)(1/3) \cos(4\pi/2)=I/27$$

De estos resultados se deduce que la impedancia de la red es:
 $Z=(2/27)R$.

En la fila $m=2$

$$i(1,2)=(I/9)(1/3)^2 \cos(-3\pi/2)=0=i(3,2)=i(5,2)=i(7,2)$$

$$i(2,2)=(I/9)(1/3)^2 \cos(-2\pi/2)=-I/81$$

$$i(4,2)=(I/9)(1/3)^2 \cos 0=I/81$$

$$i(6,2)=(I/9)(1/3)^2 \cos(2\pi/2)=-I/81$$

$$i(8,2)=(I/9)(1/3)^2 \cos(4\pi/2)=I/81$$

En la fila $m=3$

$$i(1,3)=(I/9)(1/3)^3 \cos[-2\pi/2]=-(I/3^5)$$

$$i(2,3)=0=i(4,3)$$

$$i(3,3)=(I/9)(1/3)^3 \cos 0^\circ=I/3^5$$

$$i(5,3)=(I/9)(1/3)^3 \cos(2\pi/2)=-I/3^5$$

En la fila $m=4$

$$i(1,4)=(I/9)(1/3)^4 \cos[-\pi/2]=0=i(3,4)$$

$$i(2,4) = (I/9)(1/3)^4 \cos 0 = I/3^6$$

En la fila $m=5$ (vértice de la malla triangular) la corriente $i(1,5)$ del único bucle, es, como ya se vio:

$$i(1,5) = D \cdot \cos 0^\circ \cdot \mu^5 = (I/9)(1/3)^5 = I/3^7$$

Una vez conocidas así todas las corrientes de Maxwell, en todos los $(N+1)^2/4$ bucles de la malla triangular, se podrán calcular las corrientes reales en cada resistencia R sumando algebraicamente las dos corrientes de Maxwell que la recorren. La malla triangular tiene $(N+3)(N+5)/8$ nodos, y $3(N+1)(N+3)/8$ ramas. En nuestro dibujo N es $N = 9$ y nuestra malla tiene 25 bucles, 21 nodos y 45 ramas.

El método de las corrientes de Maxwell y la ecuación en diferencias finitas parciales pueden darle una solución completa y elegante.

Uno y muchos ejercicios análogos se pueden resolver con mallas cuadradas, rectangulares, hexagonales, octogonales y de otras formas.

CONCLUSIONES

1. El método de las ecuaciones en diferencias finitas con varias variables tiene un amplio campo de aplicación en el análisis de mallas eléctricas con elementos lineales, ya se trate de circuitos de corriente continua como de circuitos de corriente directa.
2. Esto muestra que es por lo menos muy recomendable dar en los programas docentes de ingeniería eléctrica siquiera un curso de un semestre de esta signatura, así sea como materia optativa.

BIBLIOGRAFÍA

- Harnwell, Gaylord P. *Principles of Electricity and Electromagnetism*. New York. Mc. Graw Hill Book Company. 1949. 669 p.
- Mickens, Ronald E. *Difference Equations. Theory and Practice*. New York. Van Nostrand-Reinhold. 1990. 448 p.
- Jordan, Charles. *Calculus of Finite Differences*. New York. Chelsea Publishing Company. 1965. 654 p.

