La mecánica newtoniana en contra de Zenón (y de Glazebrook)

Luis Carlos Medina[1]

Resumen

Este artículo presenta la solución que bajo la mecánica newtoniana se obtiene de las cuatro paradojas del movimiento de Zenón. Con ello se defiende que la matematización de algunos fenómenos físicos no resulta contradictoria. A su vez, se hace una crítica a Glazebrook (2001), quien sostiene la tesis contraria valiéndose de las paradojas de Zenón: la matematización del mundo físico genera absurdos.

Palabras clave

Paradojas de Zenón, Mecánica newtoniana, Concepción continua del movimiento, Concepción discreta del movimiento.

Abstract

This paper offers the solution for the four Zeno's paradoxes of motion obtained under Newtonian Mechanics. With this, it is defended that the mathematization of some physical phenomena does not give rise to contradictions. At the same time, a critical analysis is made to Glazebrook [2001], who, taking advantage of Zeno's paradoxes, claims the contrary: the mathematization of the physical world results in absurdity.

---

1 Licenciado en Ingeniería Electromecánica y Especialista en Sistemas Avanzados de Manufactura por la Universidad Panamericana, México D.F. Especialista en el Estudio de los Materiales por la Universidad de Navarra. Actualmente realiza su tesis doctoral en el departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia de la Universidad del País Vasco/ Euskal Herriko Unibertsitatea.
Correo electrónico: lcmedina001@ehu.es

Key words

Zeno's paradoxes, Newtonian mechanics, Continuous motion conception, Discrete motion conception.

Introducción

En un artículo reciente, Glazebrook (2001) sostiene que las cuatro paradojas del movimiento de Zenón forman una unidad que demuestra lo absurdo que resulta concebir el movimiento tanto bajo la concepción continua del espacio y el tiempo como bajo la concepción discreta o atómica. Más lejos aún, Glazebrook propone que el objeto de Zenón consistía en demostrar que cualquier descripción matemática del movimiento es contradictoria:

> The Dichotomy and the Achilles demonstrate the absurd conclusions that follow from the claim that distances are infinitely divisible. The Arrow and the Stadium attack atomism. Together the four arguments show that paradox results whether distance is taken to be finitely or infinitely divisible. Zeno therefore concludes, according to Aristotle, that motion is impossible. I suggest rather that Zeno's point could have been that the mathematical description of motion is problematic. (Glazebrook 2001: 195).

No interesa al presente artículo discutir si ese fue el objetivo de Zenón o no. Lo que me resulta interesante es que Glazebrook no sólo sugiere la que quizá fuera la tesis de Zenón, sino que defiende que la interpretación del mundo físico bajo conceptos matemáticos resulta contradictoria, valiéndose para ello de las paradojas de Zenón:

> "Zeno's paradoxes of motion demonstrate that mathematizing nature results in absurdity" (Glazebrook 2001: 204). No sólo eso. Glazebrook también sugiere que la matematización del mundo físico es dañina: "This paper draws attention to the possibility of reading the paradoxes in order to argue that the mathematization of physical reality is not an innocuous assumption" (Glazebrook 2001: 195).

Pienso que esto no es así. Me resulta difícil la posibilidad de siquiera actuar en el mundo sin la aplicación de conceptos matemáticos a la naturaleza. Tengo en mente no sólo conceptos como el de división, vector, punto o conjunto infinito, sino también los más básicos como el de mitad o el del número 1. La tesis de Glazebrook es desproporcionada[2]. Y no niego que algunos conceptos matemáticos, al aplicarlos a la naturaleza, puedan resultar problemáticos o contradictorios. Mas esto no quiere decir que los conceptos matemáticos en sí y en su totalidad sean inapropiados para interpretar la realidad. No defiendo, pues, como Galileo[3], que la naturaleza tenga intrínsecamente una estructura matemática, pero sí que dicha estructura es simplemente una herramienta útil para interpretarla y para intervenir en ella, y que muchas veces no resulta contradictoria.

Precisamente, analizando los argumentos de Glazebrook sobre las paradojas de Zenón y exponiendo la solución que la mecánica newtoniana actual –una teoría totalmente matematizada– ofrece para dichas paradojas, el presente artículo pretende demostrar que la matematización del movimiento no es contradictoria. El primer apartado tratará con la paradoja de la dicotomía y la paradoja de Aquiles. El segundo con la paradoja de la flecha y el tercero con la paradoja del estadio. En cada uno se presentará la solución correspondiente que ofrece la mecánica Newtoniana y se mostrará que los argumentos de Glazebrook no se siguen. De esta manera, quedará claro que, al menos, la caracterización matemática del fenómeno que llamamos movimiento no es contradictoria.

---

[2] No creo estar haciendo una lectura arbitraria de Glazebrook. En otro pasaje de su artículo se lee: "When discussion of the mathematical issues spills over into physical analogy, absurdity results. One cannot look to physical entities to resolve issues about ideal entities. There can be no empirical investigation of the divisibility of lines. Nor is the mathematization of nature an unproblematic explanatory strategy in physics" [2001: 205]. Y en otro más: "Infinity is not problematic as a mathematical concept. But its application to physical reality is inappropriate. Mathematical descriptions of physical reality fail, as apparent from the paradoxical results they engender" (2001: 209).

[3] El artículo de Glazebrook comienza así: "Galileo wrote in *The Assayer* that the universe 'is written in the lenguage of mathematics'" (Glazebrook 2001: 193).

1. La paradoja de Aquiles y la dicotomía

Aquiles y la tortuga compiten en una carrera. Aquiles, que es notablemente más veloz que la tortuga, permite que ésta tome ventaja en distancia para el momento en que la carrera comienza. Así, una vez que arrancan, Aquiles tendrá que recorrer el tramo de distancia que lo separaba de la tortuga en el instante en que la carrera comenzó. Para este entonces, la tortuga habrá ya recorrido una distancia que la separa de Aquiles. Así que Aquiles tendrá que recorrer esa nueva distancia. Mientras tanto, la tortuga recorrerá otra nueva distancia. De esta manera, siempre que Aquiles recorra la distancia que lo separaba de la tortuga, ésta se habrá separado del atleta otra distancia, por lo que Aquiles nunca alcanza a la tortuga. Esta es la célebre paradoja de Aquiles.

La paradoja de la dicotomía no es más que una variación de ella, en la que la meta del corredor no es un objeto en movimiento sino un punto estático. Para que Aquiles alcance una meta, tiene antes que recorrer la mitad de la distancia que lo separa de ella. Una vez hecho esto, tendrá que recorrer la mitad de la distancia que le queda por completar. Recorrido el nuevo tramo, tendrá que recorrer nuevamente la mitad del otro tramo que todavía le queda por recorrer, etc. Aquiles siempre tendrá por delante una distancia por recorrer, por lo que nunca alcanza su meta.

A manera de solución, es ampliamente aceptada (Peirce 1935), (Quine 1962), (Rescher 2001), (Sainsbury 1988) y (Whitehead 1929) la explicación que hace notar que estos argumentos no toman en cuenta que la totalidad de una suma infinita de series convergentes da como resultado un número finito. Por ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1$$

Pero este resultado no deja de ser un tanto intuitivo. Es conveniente apegarnos a una teoría del movimiento bien establecida. De esta manera, si hacemos caso a la mecánica clásica, la velocidad de Aquiles y la velocidad de la tortuga se pueden expresar respectivamente como $v_a = \frac{dx}{dt}$ y $v_t = \frac{dx}{dt}$, en donde v_a y v_t son las velocidades de Aquiles y la tortuga respectivamente, x la distancia y t el tiempo. Si suponemos que la distancia que los separa al comienzo de la carrera es l, y que su velocidad es constante, se pueden resolver las dos ecuaciones diferenciales anteriores para obtener que el tiempo que le toma a Aquiles alcanzar a la tortuga es $t = \frac{l}{v_a - v_t}$, recorriendo una distancia $x = \left(1 - \frac{v_t}{v_a}\right)^{-1} \cdot l$. Aquiles alcanza a la tortuga en un tiempo finito y en un tramo de longitud también finito. (El caso especial para la dicotomía es cuando $v_t = 0$)[4].

¿Así de simple? ¿No se contradice este resultado con el hecho de que Aquiles tenga que recorrer una infinidad de puntos? Hablando más ampliamente: ¿son el espacio y el tiempo infinitamente divisibles? La respuesta a esta pregunta puede incluso prescindir del movimiento. Aquiles y el corredor de la dicotomía tocan una infinidad de puntos en su carrera de la misma forma que cualquier persona se encuentra tocando una infinidad de puntos cuando tiene la palma de su mano sobre la mesa. La mecánica clásica contempla esta infinidad de puntos, y mediante sus formulaciones matemáticas podemos saber con precisión el tiempo y la posición de Aquiles y la tortuga en cualquiera de esos puntos temporales o espaciales.

Así, pues, no es Aquiles el que no alcanza a la tortuga. Somos nosotros los que no alcanzamos a enumerar los puntos que cruza Aquiles así como tampoco podemos terminar de enumerar los puntos contenidos en el espacio que ocupa nuestra mano.

---

4 Aquí se consideran sólo velocidades constantes para el corredor. Casos muy idealizados pero con los que normalmente se plantea la paradoja. Sin embargo, no hay ningún problema al considerar una velocidad variable como, por ejemplo, la velocidad de Friedberg presentada por Grünbaum [1970: 214-216] para la carrera *staccato* (o si se prefiere, se puede escoger la ecuación que describe la carrera *legato*). En estos casos la integración es compleja (de hecho, sólo puede llevarse a cabo bajo métodos numéricos), pero se sabe que a cada instante, y se puede calcular, le corresponde una posición. La carrera termina en un tiempo finito y Aquiles alcanza su meta.

Este agregado de puntos en el espacio y el tiempo, según la mecánica newtoniana actual, tiene dos propiedades: es continuo y es denso. Ser continuo consiste en que los puntos del agregado poseen una estructura relacional que los postulados para los números reales especifican. La densidad consiste en que entre cualesquiera dos puntos siempre hay una infinidad de otros puntos. Esto implica que no hay ningún punto adyacente a otro. Glazebrook [2001: 197] encuentra esto último contradictorio a la idea de continuidad: si no hay puntos adyacentes, y entonces todo punto está separado de los demás, ¿cómo es posible que en un conjunto de estas características haya lugar para la continuidad? Pero esto es sólo un problema que se presenta ante la representación gráfica que hacemos mentalmente de los puntos no adyacentes. Es un error confundir la continuidad gráfica de la representación gráfica habitual de una línea con la continuidad de la línea que corresponde en posiciones al conjunto de puntos, por ejemplo: $L = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 1\}$

Glazebrook (2001: 201) también alega que el planteamiento de Zenón no toma en cuenta los irracionales y por lo tanto no se puede hablar de continuidad. Y, enseguida afirma:

> Were it the case that the Achilles is predicated upon continuity, his paradox would now be refuted. But it is not. The Achilles requires that the distance between the racers is infinitely divisible. Whether it is dense or continuous is irrelevant. Perhaps the belief that Zeno conflates density with continuity arises because we have only Aristotle's account of the paradox, and as pointed out in reference to the Dichotomy, Aristotle defined continuity as infinite divisibility. The refutation from transfinite numbers has no more success than did the solution by mathematical limit. Achilles is still running. (Glazebrook 2001: 201).

Hasta donde alcanzo a entender, Glazebrook considera que la solución que brinda la concepción de conjuntos infinitos en correspondencia con los reales no surte ningún efecto en la paradoja. El marco en el que ésta debe interpretarse tan sólo toma en cuenta la infinita divisibilidad en términos de los racionales. Tomar en cuenta a todos los reales, si entiendo bien a Glazebrook, es una mala interpretación de la paradoja.

Cabe aclarar que aunque Aristóteles habla, por ejemplo, de dividir en mitades, nunca afirma que la infinita divisibilidad deba entenderse sólo en términos de los números racionales. Esto puede interpretarse de dos formas. Una, que efectivamente Aristóteles rechazaba los irracionales por la problemática que presentaban en su momento. Otra, que sugiere que Aristóteles precisamente se mantiene abierto, pero guardando reserva, a la aceptación de los irracionales, intuyendo la posibilidad de una futura construcción que los explicara y caracterizara.

En cualquier caso, Glazebrook admite que una concepción continua resuelve la paradoja, y así deja que su crítica se sostenga tan sólo en alegar que esa concepción no está en el planteamiento que se encuentra en Aristóteles. En este último sólo se encuentra la concepción densa que, estoy de acuerdo, no es continua. Sin embargo, es importante remarcar que para Aristóteles, lo continuo es aquello que es "divisible en *divisibles* siempre divisibles" (*Física,* 232b25, mis cursivas). Si, como propone Glazebrook, debemos seguir con rigor a Aristóteles para la interpretación de las paradojas de Zenón, encontramos que la característica que la densidad atribuye a la recta, de que cualesquiera dos de sus puntos se encuentran siempre separados, no corresponde tampoco a la continuidad aristotélica. Aristóteles habla de *divisibles,* como sustantivo. La densidad correspondiente a los números racionales (entre dos números racionales siempre hay otro número racional) corresponde a la continuidad Aristotélica en el siguiente sentido: un *divisible,* como su mismo nombre lo indica, es divisible al menos en la mitad, resultando así dos *divisibles.* Y no en el sentido de que entre dos puntos siempre hay una infinidad de puntos y por lo tanto ningún punto es adyacente a otro, y entonces no hay continuidad. Este matiz provoca un cambio esencial en la perspectiva aristotélica: un *divisible* sí es adyacente a otro *divisible*[5].

[5] Aristóteles mismo nos hace notar que la concepción de la densidad en correspondencia con los puntos de la línea poco tiene que ver con su idea de continuidad: "es imposible que algo continuo esté hecho de indivisibles, como, por ejemplo, que una línea esté hecha de puntos, si damos por supuesto que la línea es un continuo y el punto un indivisible." (*Física,* 231a24-26).

Aristóteles toma en cuenta el tipo de continuidad que Glazebrook reclama.

Así, pues, se ha visto cómo la mecánica newtoniana, que acepta la continuidad y densidad de los puntos espaciales y temporales, sí resuelve las paradojas de Aquiles y la dicotomía, y que dicha teoría trabaja con un concepto de densidad que no es arbitrariamente equiparable al concepto de continuidad en Aristóteles.

2. La flecha

La paradoja de la flecha se puede enunciar con las siguientes palabras: en un instante dentro del vuelo de una flecha, ésta sólo ocupa un espacio igual a su tamaño, es decir, no se mueve y se encuentra en reposo; lo mismo se puede decir para cualquier instante, por lo que durante el intervalo de tiempo en el que la flecha mantuvo su vuelo, la flecha siempre estuvo en reposo. Lo que contradice al hecho de que vuela y que se encuentra en movimiento.

La respuesta más inmediata a este argumento es remarcar que el hecho de que en un instante la flecha no realice ningún movimiento no quiere decir que ésta no se encuentre en movimiento. Pero, ¿cómo saber si dicho objeto se encuentra en movimiento o no si, como se entiende en mecánica clásica, en cada instante se encuentra en una sola posición y en ninguna otra?

Intuitivamente se puede proponer, como criterio para responder a la pregunta, el valor de la velocidad en dicho punto. Si la velocidad es nula, la flecha se halla en reposo. Si no es nula, el objeto está en movimiento. Esto se encuentra estrechamente relacionado con el comentario de Aristóteles, que demandaba saber las posiciones de la flecha en un intervalo de tiempo[6], ya que el concepto de velocidad contempla de una manera abstracta las posiciones del objeto en los instantes próximos al instante en cuestión.

[6] "Necesariamente lo que está en movimiento sólo puede moverse en el tiempo y lo que está en reposo sólo puede reposar en el tiempo." (Aristóteles, *Física*, 234b8-10).

El valor de la velocidad de un cuerpo en un instante no tiene un significado arbitrario. En mecánica newtoniana la velocidad en un instante se define como el *límite* al que tiende el cambio de posición en un intervalo de tiempo ($\frac{\Delta x}{\Delta t}$) cuando dicho intervalo de tiempo *tiende* a cero, o sea a un instante (y entonces se escribe $\frac{dx}{dt}$). Ignorando esta concepción, Glazebrook, que sostiene que la flecha demuestra lo absurdo de la concepción discreta del movimiento, apela a Zangari (1994):

> He [Zangari] argues that the velocity of the arrow is not 0 but rather indeterminate. [...] Its velocity is indeterminate since there is 'an infinite number of possible states of motions that are consistent with the information provided'. Has Zangari refuted Zeno's Arrow? Or has he confirmed precisely Zeno's point: if you take some time to be atomic, there can be no such thing as motion. For motion can, then, only take place between instants; this is unintelligible. (Glazebrook 2001: 202-3).

Es curioso cómo Glazebrook, para brindar fuerza a su posición, exige en el análisis de la paradoja de Aquiles un apego riguroso a la concepción del movimiento aristotélico, mientras que apoya su postura respecto a la flecha en nociones que requieren la definición moderna de velocidad. También es curioso que Glazebrook relacione el argumento de Zangari con su tesis (de que si el tiempo es atómico o discreto entonces el movimiento es un concepto contradictorio) cuando no guardan ninguna relación, y sospecho que el único motivo por el que las relaciona es mencionar a alguien que, junto con él, pretende poner en duda los conceptos matemáticos para concebir el movimiento.

Por su parte, Zangari defiende que el argumento de la flecha no es paradójico, sino que la velocidad de la flecha en un instante es indeterminada:

> Zeno's argument does *not* establish what he claims about the arrow - that it is stationary at each instant. Rather, the speed evaluates to $v = 0/0$, which is an *indeterminate form*, at any

> instant; in other words, the value of v is consistent with *any* real number. [...] As a result, the predicates of 'being in motion' and 'being at rest', which are exhaustive and complementary over time intervals, are neither at an instant. (Zangari 1994: 187).

El resultado de Zangari no es correcto ya que se basa en una concepción de la velocidad en un instante que no corresponde ni a la mecánica newtoniana ni a las matemáticas modernas. Asigna a los intervalos de tiempo y de distancia un valor de cero ($\Delta t = \Delta x = 0$) para obtener la velocidad en un instante. Nunca opera un límite, utilizando así una concepción de la velocidad instantánea basada en un mal entendimiento de la teoría. Ni siquiera en un sentido primitivo de la mecánica newtoniana se puede afirmar la tesis de Zangari. En un principio, los diferenciales *dt* y *dx* representaban cantidades extremadamente diminutas pero mayores a cero ([Blay 2001]). Posteriormente, bajo el concepto de límite, la razón *dx/dt* sólo tiene sentido si se entiende como una operación a la función de la distancia *x* con respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt}(x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Hay que añadir, contra Glazebrook, que Zangari tampoco confirma la tesis que el primero atribuye a Zenón. El argumento de Zangari se basa en una equivocación del concepto de velocidad dentro de una concepción continua del movimiento, por lo que a partir de él nada se puede inferir para la concepción atómica. Para esto es necesario utilizar una definición de velocidad para la concepción atómica que sea acorde con la definición de la concepción continua, pero no existe una definición tal[7].

Ahora bien, volviendo al criterio para saber si un cuerpo se encuentra en movimiento en un instante, cabe aclarar que el valor

[7] En un novedoso intento por desarrollar una teoría rigurosa del espacio y el tiempo discretos, Van Bendegem [1995: 141-5] reconoce que el movimiento es el aspecto más problemático para su construcción. La velocidad la define simplemente como hodones/cronones, y respecto a la aceleración no menciona ni una palabra.

de la velocidad no es suficiente. Veamos por qué. Supongamos que una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba. Se sabe que dicha piedra alcanzará una altura máxima en un instante. ¿Se deja de mover la piedra en dicho instante? Ese es el instante en el que la velocidad de la piedra toma el valor de cero. Sin embargo, en cualquier instante próximo a ese instante, la piedra se halla en otra posición. Si el criterio para establecer si hay movimiento es el valor de la velocidad de la piedra, entonces, en ese instante, deja de haber movimiento. En cambio, si el criterio es que en los instantes próximos a dicho instante la piedra se encuentre en otra posición, entonces, la piedra no deja de moverse. Un criterio contradice al otro, a pesar de que ambos parecen aceptables.

Este problema radica en no tomar en cuenta otro concepto fundamental en la mecánica clásica: la aceleración (que se puede expresar como $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{F}{m}$, en donde a es la aceleración, F la fuerza aplicada al objeto y m la masa del objeto). La piedra, en el instante en el que se halla en el punto más alto, tiene una velocidad nula. Pero también se encuentra acelerada (hay una fuerza actuando sobre ella, la gravedad, no compensada por otra), y eso implica que se está moviendo. Así, si un objeto posee una aceleración no nula en un instante, forzosamente se encuentra en movimiento. En el caso de que no esté acelerado, si la velocidad es no nula, entonces se halla en movimiento. Si tanto la velocidad como la aceleración son nulas, el objeto no se mueve.

Queda claro, pues, que sabiendo la velocidad y la aceleración que describen el movimiento de un objeto en mecánica newtoniana, es siempre posible saber si dicho objeto se encuentra o no en movimiento en cada instante. Así, dentro del marco de la mecánica clásica, la conclusión contradictoria de la paradoja de la flecha no se sigue.

3. El estadio

Supónganse tres filas de cuerpos del mismo tamaño dispuestos como lo muestra la figura 1.

FIGURA 1. POSICIÓN INICIAL DE LOS CUERPOS EN EL ESTADIO

		A1	A2	A3	A4		
B4	B3	B2	B1	□			
			□	C1	C2	C3	C4

La primera fila (A) permanece en reposo. La segunda (B) y la tercera (C) se mueven a una misma velocidad en magnitud pero en direcciones opuestas, tal como lo muestran las flechas del diagrama. Nótese que $B1$ se encuentra alineado con $A2$ y $C1$ con $A3$. Dada esta disposición en las posiciones y en las velocidades, en algún momento posterior la posición de las filas de cuerpos será como lo muestra el diagrama de la figura 2. $B1$ se encuentra alineado con $A4$, o sea que su extremo derecho recorrió la distancia correspondiente a dos cuerpos ($A3$ y $A4$).

FIGURA 2. POSICIÓN FINAL DE LOS CUERPOS EN EL ESTADIO

	A1	A2	A3	A4	
	B4	B3	B2	B1	□
□	C1	C2	C3	C4	

Pero, al final del mismo intervalo de tiempo, $C1$ se encuentra alineado con $B4$, lo que nos indica que su extremo izquierdo recorrió la distancia correspondiente a cuatro cuerpos ($B1$, $B2$, $B3$ y $B4$). Así, si al extremo derecho de $B1$ le toma recorrer dos cuerpos en un tiempo Δt, entonces al extremo izquierdo de $C1$, que lleva la misma velocidad, le debe tomar el doble de tiempo ($2\Delta t$) recorrer el doble de espacio (cuatro cuerpos). Pero le toma Δt, por lo tanto un tiempo es igual a su doble.

Esta es la paradoja del estadio. La mecánica clásica, que considera la relatividad clásica, de Galileo, la resuelve perfectamente. De hecho, incluso sin tener ninguna teoría estructurada, se le pueden hacer las siguientes preguntas a Zenón: ¿Por qué considera el movimiento de la fila *B* con respecto a la fila *A*, y el movimiento de la fila *C* con respecto a la fila *B* y no también con respecto a la fila *A*? ¿Por qué no utiliza el mismo marco de referencia, el mismo criterio, para medir el movimiento? Y es que no tomar en cuenta la relatividad del movimiento de un objeto con respecto a otros objetos es la única asunción de la que depende la paradoja.

Sin embargo, al igual que para la paradoja de la flecha, Glazebrook sostiene que la paradoja del estadio demuestra que la concepción atómica del movimiento no es adecuada. Suponiendo que los cuerpos se mueven a una velocidad máxima (que recorren la distancia mínima en el tiempo mínimo), Glazebrook argumenta:

> In the time one *C* passes one *B*, it has passed half an *A*. But this is impossible since there can be no half of the minimal. Under this reading, the Moving Rows, like the Arrow, denies the atomicity of distance in that it refutes the possibility that both time and space are finitely divisible (Glazebrook 2001: 203-4).

Además de que la concepción atómica o discreta es ajena a la mecánica clásica, esta conclusión merece dos comentarios. En primer lugar, exige una concepción continua del movimiento. Al exigir que dos cuerpos mínimos que viajan con la velocidad máxima se alineen al cruzarse en direcciones contrarias lo que se está exigiendo es una infinita divisibilidad, se está exigiendo un momento y una distancia discreta más pequeña que la permitida por la concepción atómica. Glazebrook supone previamente que *B*4 y *C*1 (*B*1 y *C*1 en nuestros diagramas) se alinean, es decir, que ocupan posiciones y que transcurre un intervalo de tiempo que la concepción atómica no permite. La imposibilidad de la alineación de dos cuerpos en estas circunstancias no es, en manera alguna, inconsistente con una concepción discreta del movimiento, sino que es una característica que se deduce de ella. La contraintuición que esta característica provoca proviene precisamente de seguir pensando en la estructura de la concepción continua.

En segundo lugar, Glazebrook se aleja nuevamente de Aristóteles. Su conclusión no tiene relación alguna con la conclusión original de la paradoja, que sostiene que el tiempo es igual a su doble. Además, a partir de la concepción discreta del movimiento tampoco se puede deducir la conclusión original. Lo que se puede concluir a partir de la concepción discreta es tan sólo que la velocidad "máxima" (un mínimo de distancia recorrida en un mínimo de tiempo) de un cuerpo es superada por el doble cuando se refiere a un cuerpo en movimiento con velocidad también máxima y en sentido contrario. Pero los tiempos siguen siendo siempre iguales.

Ahora tan sólo queda exponer las relaciones que muestran que la conclusión paradójica del estadio no se puede seguir. Retomemos el agrupamiento de filas *A*, *B* y *C* como lo muestra el diagrama en la figura 1 y asumamos, como lo hace la mecánica clásica, un marco de referencia inercial. Escojamos el marco en donde el cuerpo *A* se encuentra en reposo. Así, un observador que se encuentra en el mismo marco de referencia inercial que *A* observa que *B* viaja con una velocidad con respecto a *A* $v_{B/A} = S$ y de la misma manera *C* se mueve con una velocidad $v_{C/A} = -S$ (donde *S* es un valor numérico correspondiente a una rapidez constante). La velocidad de *A* en este marco es $v_{A/A} = 0$. Con esto, podemos aplicar las transformaciones de traslación de Galileo. Si transformamos las velocidades con respecto a un marco inercial en donde el cuerpo B se encuentra en reposo tenemos que las velocidades de los cuerpos son $v_{B/B} = v_{B/A} - v_{B/A} = 0$, $v_{A/B} = v_{A/A} - v_{B/A} = 0 - S = -S$ y $v_{C/B} = v_{C/A} - v_{B/A} = -S - S = -2S$. Si hacemos lo mismo para un marco de referencia inercial con el cuerpo *C* en reposo tenemos que $v_{C/C} = v_{C/A} - v_{C/A} = 0$, $v_{A/C} = v_{A/A} - v_{C/A} = 0 - (-S) = S$ y $v_{B/C} = v_{B/A} - v_{C/A} = S - (-S) = 2S$. Estos valores para cada velocidad referidos a estos marcos de referencia inercial no varían, independientemente del marco de referencia de origen.

Teniendo ya esto y recordando que nuestras velocidades son constantes, para el cálculo del tiempo que tardan los cuerpos en pasar de la posición que manifiesta la figura 1 a la de la figura 2 podemos utilizar $\Delta t = \Delta x/v$. Así, si cada uno de los cuerpos de cada fila mide una unidad, el tiempo que le toma al extremo derecho de *B* llegar al extremo derecho de *A* es $\Delta t = \Delta x/v_{B/A} = 2/S$. Ahora tomemos el marco de *B* y calculemos el tiempo en el que el extremo izquierdo de C alcanza el extremo izquierdo de B: $\Delta t = \Delta x / v_{C/B} = -4/(-2S) = 2/S$. De esta forma ya no se confunden los movimientos relativos, y llegar a la conclusión de que un tiempo es igual a su doble es imposible.

4. Conclusión

Además de las críticas que se merecen los argumentos de Glazebrook a favor de lo absurdo que cada paradoja intenta respaldar, este artículo presenta dos resultados interesantes. El primero es el haber dejado en claro que el concepto de continuidad en Aristóteles no es arbitrariamente equiparable al concepto de densidad en la matemática actual. El segundo es una llamada de atención a la importancia que tiene tanto el concepto de velocidad como el de aceleración a la hora de establecer un criterio para saber si un objeto se encuentra en movimiento en un instante. No es difícil encontrar reflexiones acerca del movimiento en las que el concepto de aceleración es despreciado en su totalidad (Zangari 1994) y (Van Bendegem 1995).

Pero más importante, se ha mostrado que la mecánica newtoniana, una teoría matematizada, no presenta ni los absurdos tradicionales que concluye Zenón ni los absurdos que Glazebrook atribuye al programa de Zenón. El haber mostrado que la mecánica newtoniana resuelve la paradoja de la dicotomía y la paradoja de Aquiles hubiera sido suficiente para mostrar, en contra de Glazebrook, que la matematización del movimiento continuo no genera los absurdos que dichas paradojas concluyen. Esto, a su vez, muestra que existe al menos un modelo matemático consistente del movimiento, y que la matematización de los fenómenos físicos no siempre genera absurdos. Sin embargo, se analizaron también las paradojas de la flecha y el estadio, no sólo para exponer la solución que la mecánica clásica sugiere, sino también para dar cuenta de que los argumentos de Glazebrook para llegar al absurdo a partir de un espacio y tiempo discretos son deficientes. Esto también es relevante. Ni siquiera la matematización discreta del movimiento, que todavía ninguna teoría bien establecida ha aceptado, genera los absurdos que Glazebrook presume. La introducción de herramientas matemáticas en la concepción de los fenómenos físicos puede perfectamente no generar contradicciones.

BIBLIOGRAFÍA

BLAY, M. "Force, Continuity, and the Mathematization of Motion at the End of the Seventeenth Century". En: BUCHWALD, J. Z. y Cohen, I. B. (edits.) *Isaac Newton's Natural Philosophy*. Cambridge: The MIT Press, 2001, pp. 225-248.

DE ECHANDÍA, G. (edit. y trad.) Aristóteles. Física. Madrid: Gredos, 1995.

GLAZEBROOK, T. "Zeno Against Mathematical Physics". En: *Journal of the History of Ideas*. Vol. 62 (2001), pp. 193-210.

GRÜNBAUM, A. "Modern Science and Zeno's Paradoxes of Motion". En: Salmon, W. (edit.). *Zeno's Paradoxes*. Indianapolis: Bobbs-Merril, 1970, pp. 200-250.

PEIRCE, C. S. "Achilles and the Tortoise". En: Hartshorne, C., Weiss, P. (edits.) Collected Papers of Charles Sanders Peirce, Vol. 6. Cambridge: Belknap Press, 1935, pp. 177-184.

QUINE, W. V. O. "Paradox". En: *Scientific American*. Vol. 206 (1962), pp. 84-96.

RESCHER, N. *Paradoxes*. Chicago: Open Court, 2001.

SAINSBURY, R. M. *Paradoxes*. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

VAN BENDEGEM, J. P. "In Defence of Discrete Space and Time". En: *Logique et Analyse*. Vols. 150-151-152 (1995), pp. 127-150.

WHITEHEAD, A. N. *Process and Reality*. New York: The Macmillan Company, 1929.

ZANGARI, M. "Zeno, Zero and Indeterminate Forms: Instants in the Logic of Motion". En: *Australasian Journal of Philosophy*. Vol. 72 (1994), pp. 187-204.