

 Institución Universitaria	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

Predicción de la cabeza hidráulica del punto de mayor eficiencia de una bomba centrífuga de flujo radial operando como turbina mediante modelado matemático basado en parámetros geométricos del impulsor

Daniel Arenas Múnera

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Ingeniero Mecatrónico

Asesor(es)

Jonathan Andrés Graciano Uribe

Diego Alejandro Penagos Vásquez

Instituto Tecnológico Metropolitano - ITM
Facultad de Ingenierías
Departamento de Mecatrónica y Electromecánica
Medellín, Colombia

2023

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

Resumen

Para que las bombas operadas como turbinas operen eficientemente, la modificación de la geometría del impulsor es un elemento clave. A pesar de que se han llevado a cabo investigaciones en correlaciones matemáticas, simulaciones numéricas y optimización para mejorar el desempeño de las turbinas, los resultados obtenidos no han considerado únicamente la relación directa entre las condiciones del sitio y la geometría del impulsor en el punto de mayor eficiencia. Considerar únicamente la geometría del impulsor, permitirían optimizar la geometría del impulsor y maximizar la conversión de energía, lo que resulta en un uso más eficiente de los recursos hídricos y una mayor producción de energía renovable. Además, son una herramienta que facilitaría el proceso de implementación considerando las condiciones de sitio y la geometría de las bombas disponibles.

Por tanto, el objetivo de este trabajo ha sido proponer un modelo matemático con un error inferior al 20% respecto a los resultados experimentales, que permita calcular la altura hidráulica en relación a los parámetros geométricos del impulsor. Con el objetivo de alcanzar este objetivo, se caracterizó el impulsor y se desarrollaron cuatro modelos matemáticos fundamentados en la ecuación de Euler para turbomáquinas. Se ha propuesto así una expresión alternativa que establece una relación entre la geometría del impulsor y la cabeza hidráulica. Para validar los modelos matemáticos, se han evaluado y comparado diferentes bombas encontradas en la literatura.

Adicionalmente, se ha realizado un análisis estadístico al comportamiento del modelo considerando relaciones geométricas que no han sido consideradas en la literatura. Por último, se llevó a cabo una comparación del modelo con los resultados obtenidos por otros autores. Los resultados revelan que el modelo de mejor desempeño ha estimado la cabeza hidráulica con un error del 17.8% respecto a los datos experimentales. Asimismo, se conoce el comportamiento del modelo en relación a la velocidad específica de la turbina y correlaciones geométricas del impulsor. Con estos resultados, se ha logrado proponer una opción alternativa para la estimación de la cabeza hidráulica para obtener una conversión de energía más eficiente.

 Institución Universitaria	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

Este estudio establece los cimientos para investigaciones futuras en el ámbito de las bombas operadas como turbinas, proporcionando una herramienta sólida y aplicable para el diseño y análisis de sistemas hidroeléctricos en áreas no interconectadas.

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

RECONOCIMIENTOS

Quiero expresar mis sinceros agradecimientos a todas las personas que hicieron posible la realización de esta tesis. En primer lugar, quiero agradecer a mis asesores, Jonathan Graciano y Diego Penagos, por su inestimable guía, apoyo y motivación durante todo el proceso de elaboración de mi tesis. Gracias a su experiencia y valiosos consejos, pude mejorar mi investigación y desarrollar un trabajo más riguroso y coherente.

También quiero agradecer a mi madre, Beatriz Arenas, quien ha sido mi principal apoyo y motivación en cada etapa de mi formación académica. Su amor, paciencia y confianza en mí me han dado la fuerza y el coraje para superar los obstáculos y alcanzar este importante logro.

Por último, quiero compartir una frase de Albert Einstein que ha sido una fuente de inspiración en mi trabajo: "Ninguna cantidad de experimentación puede probar definitivamente que tengo razón; pero un solo experimento puede probar que estoy equivocado". Esta cita me ha recordado la importancia de ser humilde y estar dispuesto a corregir y mejorar mis ideas, incluso si eso significa aceptar que estaba equivocado.

En resumen, agradezco a todas las personas que me han brindado su apoyo, consejos y ayuda en este proyecto. Espero que este trabajo sea un pequeño aporte al avance del conocimiento en mi campo de estudio.

 Institución Universitaria	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

Acrónimos

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI
b	Ancho del álabe	m
V	Velocidad absoluta	m/s
U	Velocidad radial	m/s
W	componente tangencial de la velocidad absoluta	m/s
D	Diámetro	m
G	Gravedad	m/s ²
H	Cabeza hidráulica	m
\dot{m}	Flujo másico	kg/s
N_{St}	Velocidad específica	-
Q	Caudal	m ³ /s
P	Potencia hidráulica	W
r	radio	m
U	Velocidad tangencial	m/s
W	Velocidad relativa al álabe	m/s
Z	Cantidad o número de álabes	-
k_2	Coefficiente de obstrucción de flujo	-
e_z	Factor de disminución de trabajo	-
EF	Efectividad	%
E_R	Error relativo	%

 Institución Universitaria	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI
α	Ángulo de flujo	°
β	Ángulo del álabe	°
δ	Espesor del álabe	m
η	Eficiencia	%
π	Constante pi	-
τ	Torque	Nm
ρ	Densidad	kg/m ³
ω	Velocidad angular	rpm
σ	Varianza	-

Subíndices

Subíndice	Término
BEP	Punto de mayor eficiencia
h	hidráulico
1	Succión (modo bomba) o descarga (modo turbina)
2	Descarga (modo bomba) o succión (modo turbina)

Abreviaturas

Abreviatura	Término
BEP	Punto de mayor eficiencia
PAT	Bomba operada como turbina
CFD	Análisis de fluidos computacional

 Institución Universitaria	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

TABLA DE CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN.....	9
2. MARCO TEÓRICO.....	14
3. METODOLOGÍA.....	23
3.1. Modelado matemático y predicción de la cabeza hidráulica en bombas operadas como turbinas: una aproximación basada en la ecuación de Euler.....	25
3.1.1. Modelo 1. Aproximación simplificada basada en la ecuación de Euler y parámetros geométricos del impulsor.....	25
3.1.2. Modelo 2. Modelo mejorado de predicción de la cabeza hidráulica considerando el área efectiva de flujo con la presencia de álabes.	28
3.1.3. Modelo con constante de ajuste para optimizar la precisión y reducir la varianza en la predicción de la cabeza hidráulica.	32
3.1.4. Modelo 4. Modelo de flujo bidimensional simplificado considerando el factor de disminución de trabajo (<i>ez</i>).....	33
3.2. Búsqueda selectiva de documentación para la obtención de parámetros geométricos: fundamentos para la validación de los modelos matemáticos.....	35
3.3. Validación de la cabeza hidráulica teórica mediante métodos estadísticos.....	38
4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN.....	40
4.1.1. Evaluación de la precisión del primer modelo mediante la comparación de la cabeza hidráulica teórica y experimental: Análisis de errores relativos y cumplimiento del criterio de error admisible.	40
4.1.2. Resultados del modelo 2 considerando el coeficiente de obstrucción de flujo.	42
4.1.3. Resultados del modelo 3 considerando constante de ajuste obtenida mediante regresión lineal.....	45

 Institución Universitaria	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

4.1.4. Resultados del modelo 4 considerando el flujo bidimensional y el ajuste mediante una constante de precisión..... 47

4.1.5. Evaluación comparativa de los modelos y selección del mejor desempeño..... 51

4.1.6. Comparativa del modelo matemático propuesto con estudios previos en la literatura.
54

5. CONCLUSIONES 59

6. RECOMENDACIONES Y TRABAJO FUTURO..... 61

REFERENCIAS 62

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

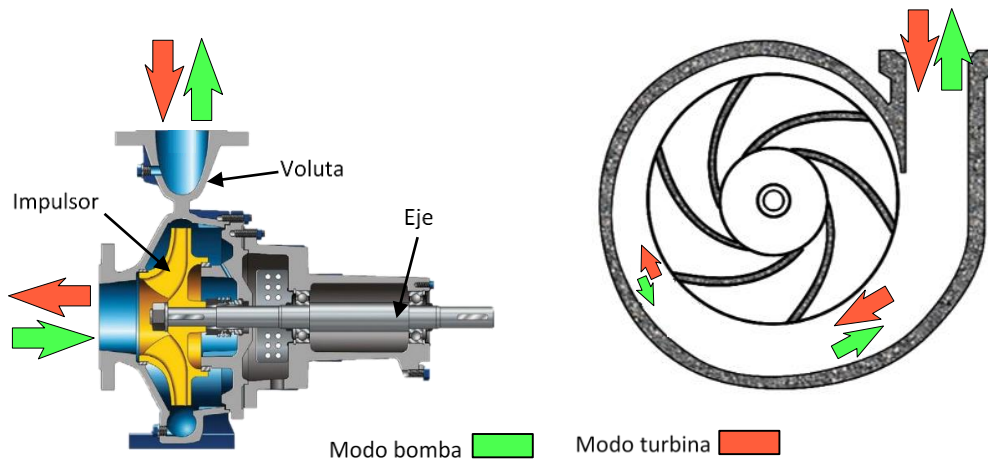
1. INTRODUCCIÓN

Una bomba centrífuga operando como turbina (PAT por sus siglas en inglés) es una turbomáquina que recibe la energía cinética y potencial del agua para producir electricidad a través de un generador conectado al impulsor [1]. Durante la operación, el sentido de flujo es inverso respecto a la operación de una bomba centrífuga convencional. Las PAT representan una alternativa económica, de simple instalación y mantenimiento, respecto a otras turbinas convencionales, tales como las turbinas tipo Pelton y tipo Francis [2].

Las PAT se componen de tres elementos mecánicos: la voluta, el impulsor y un eje de transmisión. Al interior de la voluta, el impulsor rota y transmite el movimiento mecánico por medio del eje. El elemento clave de funcionamiento es el impulsor, donde se produce la conversión energética y se generan las pérdidas hidráulicas más significativas con respecto a las pérdidas en la voluta y el tubo de succión [3]. La característica operativa en modo turbina depende de la dinámica del fluido al interior del impulsor. Sin embargo, el comportamiento hidráulico en ambos modos de operación no es igual debido que las condiciones de diseño no consideran la operación en sentido inverso [4].

En la Ilustración 1, se muestra una comparativa del sentido de flujo de una bomba centrífuga, en modo bomba (flecha verde) y modo turbina (flecha roja). A la derecha se observa la vista álabes-álabe, mientras que en la izquierda se observa un corte transversal y se muestran los componentes mecánicos que componen las bombas [3]

Ilustración 1. Comparativo de flujo del modo de operación de una bomba centrífuga. Adaptado de [3].



Se han realizado diversos estudios sobre las pérdidas hidráulicas en PAT. Los autores Rawal & Kshirsagar (2007), presentaron los resultados de un análisis de fluidos computacional (CFD) tanto en modo bomba como turbina. Utilizaron resultados teóricos previos que consideraron las ecuaciones de Navier-Stokes, cavitación y transferencia de masa para obtener parámetros operativos de la turbomáquina. También, cuantificaron las pérdidas hidráulicas asociadas a los componentes en PAT. Obtuvieron que el impulsor es el elemento que presenta mayores pérdidas respecto a los demás componentes. Las pérdidas asociadas al impulsor fueron hasta 22 veces mayores que las presentadas en la voluta y en el tubo de succión [6].

Adicionalmente, los fabricantes de bombas centrífugas convencionales no proveen la curva característica en modo turbina. Debido a esto, se han realizado estudios sobre cómo construir las curvas características para PAT en el punto de mayor eficiencia (BEP). Los autores Derakhshan & Nourbakhsh (2008), presentaron los resultados de un modelo de estimación de curvas características para bombas teniendo en cuenta la velocidad específica. Obtuvieron resultados con un ajuste inferior al 10% respecto a los datos experimentales para velocidades específicas inferiores a 60 [7].

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

Posteriormente, Venturini & Manservigi (2014), desarrollaron un modelo físico para calcular la cabeza hidráulica para ambos modos de operación en PAT. Obtuvieron un error cuadrático medio máximo de 6.4% respecto a los datos experimentales [8].

Luego, los autores Venturini & Manservigi (2018), presentaron un modelo físico para predecir la cabeza hidráulica de PAT con velocidades específicas entre 2.17 y 10.04. Se evaluó el ajuste del modelo utilizando el error cuadrático medio. Obtuvieron errores entre 4.4% y 6.4% respecto a los valores experimentales considerados [9].

Por otra parte, los investigadores Silvio Barbarelli *et al* [10], presentaron un método estadístico y numérico de selección para PAT. En el artículo se desarrolló un método combinado para seleccionar PAT en plantas de generación micro hidroeléctricas. Se utilizaron modelos estadísticos y numéricos, calculando factores de conversión basados en datos hidrológicos del sitio de instalación. Se reconstruyó una geometría virtual de la bomba y se calcularon curvas de rendimiento. Finalmente, se presentaron dos casos de estudio en plantas depuradoras de agua en Italia.

También, se ha estudiado la dinámica del fluido al interior del impulsor. Los autores Wang *et al.* (2020), propusieron una estrategia de optimización geométrica para PAT. Además, determinaron que las dimensiones geométricas de las PAT incidieron de manera directa en su desempeño. Obtuvieron una mejora en eficiencia del 16.3% para los 50 ejemplares estudiados [11].

En contraste, Barbarelli *et al.* (2021), propusieron un modelo para calcular los parámetros geométricos de una PAT basada en las características operativas y un parámetro inicial. Validaron los resultados para seis bombas diferentes y obtuvieron un ajuste del 95% en la geometría [4].

De acuerdo con los estudios revisados en la literatura, no se ha relacionado únicamente la geometría del impulsor para predecir matemáticamente la cabeza hidráulica. Lo anterior es fundamental para predecir la cabeza hidráulica de una PAT y estimar las condiciones del sitio para su implementación en plantas de generación hidroeléctrica, ya que los parámetros geométricos del impulsor no suelen ser proporcionados por los fabricantes y deben medirse. Por otra parte, los proveedores de bombas centrífugas no proporcionan la curva característica al operar en modo turbina, debido que las turbobombas no están diseñadas para operar en sentido inverso. Además, el diseño del impulsor es una tarea que involucra algunos factores, como la eficiencia, el caudal, la durabilidad y la resistencia a la corrosión. Estos factores están relacionados con los parámetros geométricos del impulsor, por

 Institución Universitaria	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

lo que el fabricante que logra diseñar los parámetros óptimos obtiene una ventaja competitiva. Por esta razón, los fabricantes de bombas no proveen los detalles del diseño como parte de su estrategia comercial.

Por lo tanto, ¿Es posible determinar la cabeza hidráulica en el punto de mayor eficiencia de una bomba centrífuga comercial operando como turbina, considerando estrictamente los parámetros geométricos del impulsor?

Consecuentemente, el presente trabajo propuso modelar matemáticamente la cabeza hidráulica de una PAT con relación a las características constructivas del impulsor en el BEP. Con esto, se planteó una ecuación base para El cálculo de la cabeza hidráulica de una bomba centrífuga operando en sentido inverso. De esta manera, al conocer los parámetros geométricos del impulsor, fue posible calcular la cabeza hidráulica de una PAT, con un error inferior al 20% [10], [12], [13], basado únicamente en variables geométricas del impulsor y condiciones de sitio. Con esto, se abrió paso para seguir con investigaciones futuras sobre la dependencia geométrica del impulsor y las variables dinámicas de las PATs.

Objetivos

General

Predecir la cabeza hidráulica de una bomba operada como turbina por medio de un modelo matemático para relacionar las propiedades geométricas del impulsor en el punto de mayor eficiencia.

Específicos

- Desarrollar un modelo matemático que dependa de las propiedades geométricas del impulsor de una bomba operada como turbina partiendo de la ecuación de Euler para predecir la cabeza hidráulica en el punto de mayor eficiencia.
- Realizar una búsqueda selectiva de documentación sobre bombas operando como turbina, para obtener parámetros geométricos que permitan validar el modelo matemático.
- Validar la cabeza hidráulica del modelo matemático propuesto con los parámetros geométricos obtenidos de los artículos consultados.

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

- Contrastar el modelo matemático propuesto con otros estudios desarrollados en la literatura.

Organización de la tesis

El trabajo se divide en cuatro capítulos. En la introducción, se presenta una descripción general de la composición de una bomba operada como turbina y sus aplicaciones. Además, se muestran los estudios encontrados en la literatura sobre PAT. Con esto, se formula la pregunta de investigación y en consecuencia se propone la hipótesis de obtener un modelo matemático para predecir la cabeza hidráulica considerando solamente la geometría del impulsor.

En el Marco teórico, se aborda la teoría de mecánica de fluidos que fundamentó el modelo matemático. Se exponen los aspectos más relevantes del teorema de transporte de Reynolds, además del triángulo de velocidades. También, se presenta un estado del arte sobre bombas operadas como turbinas.

A continuación, la metodología explica la ruta de investigación y el procedimiento de validación del modelo obtenido. Considerando lo expuesto en el marco teórico y estado del arte, se presenta el modelo matemático obtenido. Los resultados obtenidos son validados con parámetros geométricos obtenidos en la literatura. Luego, se validan respecto a la cabeza experimental.

Finalmente, los resultados son analizados y expuestos. Se obtuvo que el modelo permite predecir la cabeza hidráulica de una PAT en el BEP, con un error menor al 20%, únicamente para bombas con velocidades específicas entre 10 y 40. Finalmente, se presentan las conclusiones obtenidas, se dan recomendaciones y se establece el trabajo futuro.

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

2. MARCO TEÓRICO

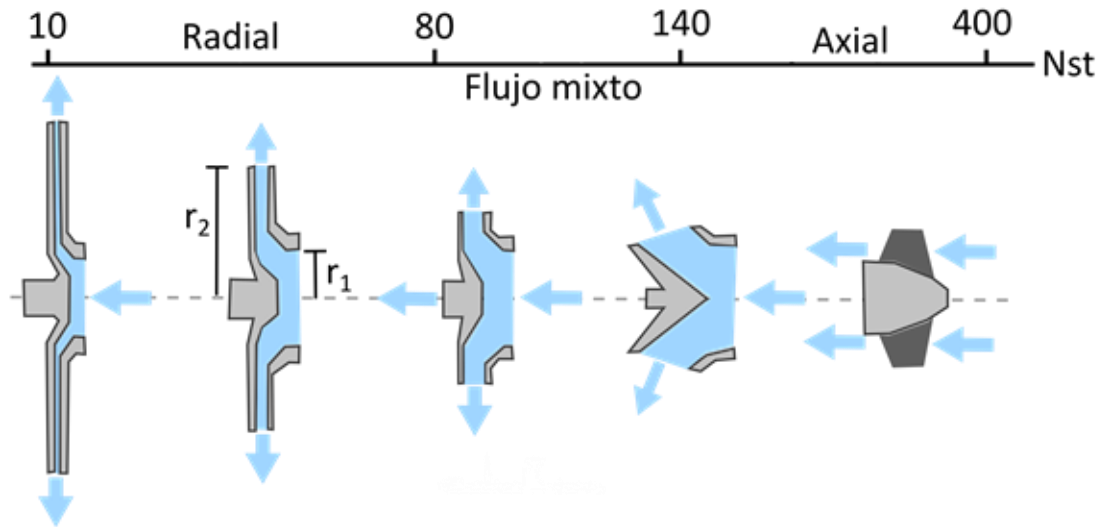
2.1 Clasificación según la velocidad específica

La clasificación del impulsor presentada anteriormente se relaciona con la velocidad específica de la turbina (N_{st}). Este parámetro depende del caudal (Q), cabeza hidráulica (H) y la velocidad de rotación del impulsor (ω) y se calcula como se presenta en la ecuación (1)

$$N_{st} = \frac{\omega\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{H^3}} \quad (1)$$

Ilustración 2, presenta la clasificación de las bombas centrifugas respecto a la velocidad específica. En general, el flujo radial se encuentra en un rango de 10 a 80, mientras que el flujo mixto se sitúa por encima de 80 y por debajo de 140. Por último, el flujo axial se ubica en un rango de 140 a 400 [14].

Ilustración 2. Comportamiento fluido dinámico según velocidad específica. Adaptado de [26]



La relación de radios exterior e interior, es decir, r_2/r_1 aumenta en cuanto el comportamiento de la bomba tiende a ser radial. En la

Tabla 1, se presenta los rangos de esta relación según el tipo de flujo. El flujo radial se presenta cuando la velocidad específica es mayor que 2. Este tipo de flujo es común en bombas de alta cabeza hidráulica y bajo caudal.

Tabla 1. Relación de radios exterior e interior respecto al tipo de flujo.

Tipo de flujo	r_2/r_1
Radial	>2
Impulsor tipo Francis	1.5-2
Mixto	1-1.5
Axial	1

 Institución Universitaria	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

El impulsor tipo Francis se encuentra en el rango de velocidad específica de 1.5 a 2. Se caracteriza por ser un impulsor radial con caudal intermedio.

Por otra parte, el flujo mixto ocurre en bombas con una velocidad específica entre 1 y 1.5. En este caso, la bomba combina características tanto del flujo radial como del flujo axial. Las bombas de flujo mixto son adecuadas cuando se requiere un equilibrio entre capacidad y presión.

Por último, el flujo axial se presenta cuando la velocidad específica es igual a 1. Las bombas de flujo axial son ideales para aplicaciones que requieren una alta capacidad de caudal con una baja presión de descarga.

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

2.2 Tipos de impulsores de las bombas centrífugas.

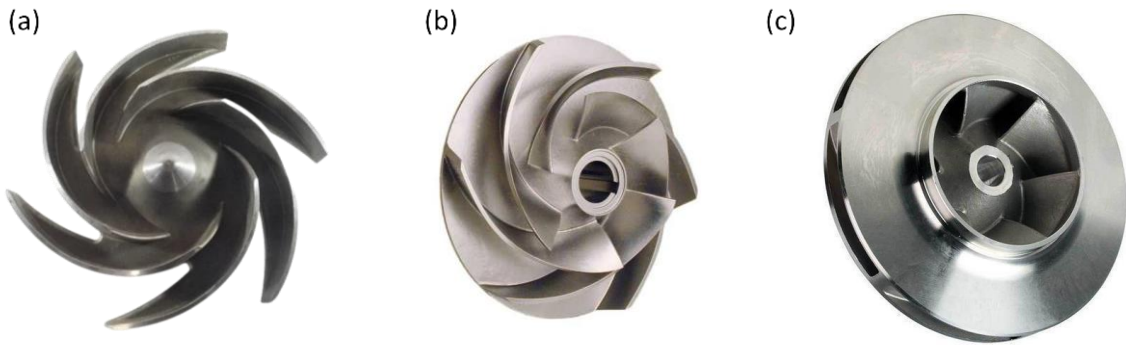
Las bombas centrífugas también se clasifican según las características constructivas del impulsor y el tipo de flujo. A continuación, se presentan las características generales de las turbomáquinas según su clasificación.

- **Impulsor abierto:** Se caracteriza por tener palas espaciadas de manera abierta, lo que permite el paso sin obstrucciones de sólidos y líquidos viscosos a través del impulsor. Esta construcción abierta hace que los impulsores abiertos sean adecuados para aplicaciones donde el bombeo de líquidos con sólidos en suspensión es común, como en el manejo de aguas residuales o lodos.
- **Impulsor semiabierto:** Combina palas dispuestas de manera abierta en un lado y cubiertas en el otro. Esta configuración mejora el flujo y la presión de descarga en comparación con los impulsores abiertos. Los impulsores semiabiertos son ampliamente utilizados en diversas aplicaciones, desde el bombeo de aguas residuales y pluviales hasta el suministro de agua en sistemas de riego o en la industria.
- **Impulsor axial:** El fluido es impulsado de manera axial, es decir, paralelo al eje de rotación. Operan a alta velocidad y una tasa de flujo considerable. Son utilizadas en aplicaciones donde se requiere bombear grandes cantidades de fluido de manera rápida, pero a cabezas bajas.

Ilustración 3, se presentan tres ejemplos de impulsores de flujo radial disponibles en el mercado, clasificados según su construcción y diámetro comercial. Estos ejemplos incluyen un impulsor abierto (a) de 16 pulgadas [5], un impulsor semiabierto (b) de 40 milímetros [6] y un impulsor cerrado (c) de 22 pulgadas [7].

Ilustración 3. Tipos de impulsores radiales: (a) abierto, (b) semiabierto y (c) cerrado.

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020



2.3 Fundamentos teóricos para el cálculo de la cabeza hidráulica

En las turbomáquinas, el intercambio energético sucede principalmente en el impulsor y se da por la interacción de los álabes con el fluido. Consecuentemente, la cabeza hidráulica depende de tal interacción. El cálculo de la cabeza hidráulica parte del teorema de transporte de Reynolds (TTR), que relaciona los enfoques Euleriano y Lagrangiano para el análisis de fluidos. Por un lado, desde la perspectiva lagrangiana, el fluido es estudiado enfocándose en las partículas, mientras que con el enfoque Euleriano el fluido es estudiado considerando un volumen de control [16]. Además, considera las propiedades extensivas como momento y energía. La ecuación

(2), relaciona las fuerzas que actúan en el volumen de control con la cantidad de momento lineal del fluido. Se considera que el flujo es unidimensional y el perfil de velocidad son líneas paralelas de flujo. El término β corresponde a un factor de corrección que depende del régimen de flujo.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho \vec{v} dV + \sum_{sal} \beta \dot{m} \vec{v}_{prom} - \sum_{ent} \beta \dot{m} \vec{v}_{prom} \quad (2)$$

Para simplificar la expresión de la ecuación 2, se establecen las siguientes limitaciones y suposiciones físicas:

- El flujo es permanente, es decir, el cambio de flujo másico y caudal a través del conducto por el que se desplaza es constante. Además, las propiedades extensivas del fluido se conservan. Por lo tanto, se considera invariante en el tiempo. Con esto, el flujo se considera

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

en régimen laminar, y el factor de ajuste β es igual a uno. Además, el término $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho \vec{v} dV$ puede ser igualado a cero.

- El flujo es ideal, es decir que no se consideran las fuerzas viscosas producidas y por ello no existen fuerzas de rozamiento que impliquen pérdidas de velocidad.
- El flujo es unidimensional, es decir que solo se considera una de las componentes espaciales de velocidad.
- Flujo irrotacional. Desde el enfoque lagrangiano las partículas de fluido no rotan su centro de masa y por ello su orientación en el espacio no cambia.

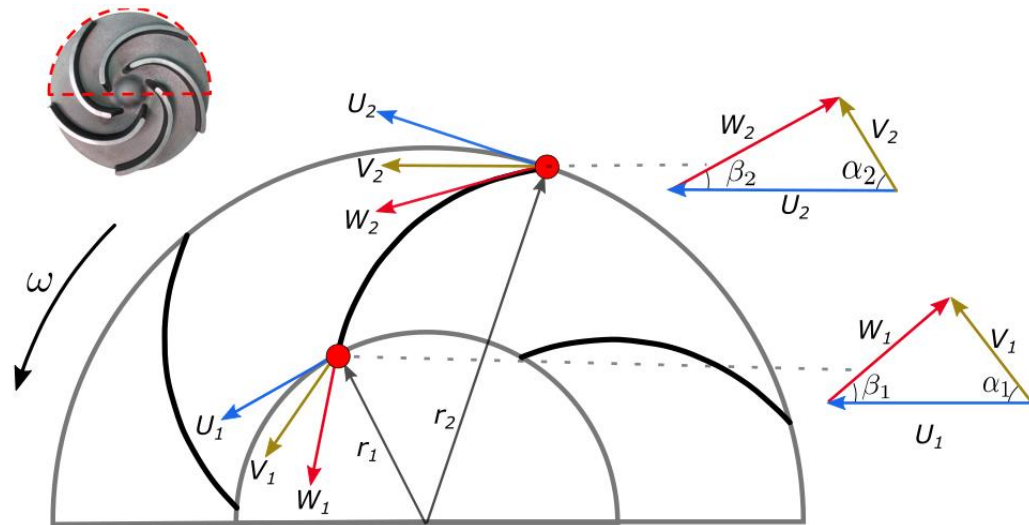
Con estas consideraciones, la ecuación 2 puede ser simplificada y así obtener la expresión que se presenta en la ecuación (3).

$$\sum \vec{F}_{ext} = \sum_{sal} \dot{m} \vec{v}_{prom} - \sum_{ent} \dot{m} \vec{v}_{prom} \quad (3)$$

La ecuación 3 expresa que la sumatoria de fuerzas externas que actúan en el impulsor está determinada por la diferencia del momento de fuerza en la salida y entrada del impulsor. En estos puntos, se forma el triángulo de velocidades como se muestra en la Ilustración 4.

El término V_n , corresponde al vector de velocidad absoluta que posee la partícula en el instante analizado. Esta velocidad posee una componente lineal de arrastre (U_n) debida a la rotación del impulsor. También, posee una componente relativa (W_n) que es tangente a la superficie del álabe y posee el mismo sentido del fluido. Los vectores W_n y U_n forman un ángulo β_n entre sí, que corresponde al ángulo de ataque del álabe. De manera similar, los vectores V_n y W_n forman un ángulo α_n .

Ilustración 4. Triángulo de velocidades formado en la salida y entrada del álabe.



En la ecuación (4), se expresa la sumatoria de fuerzas en términos del flujo másico (Q), la velocidad promedio del fluido en la entrada (\vec{V}_2) y salida de la bomba (\vec{V}_1) y la densidad del fluido (ρ). Dada la consideración de que el flujo másico es constante, puede ser sustraído de la expresión como factor común. De esta manera, teniendo en cuenta el triángulo de velocidades formado en la salida y entrada presentado en la Ilustración 4, la ecuación (3) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\vec{F}_{ext} = \rho Q (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \quad (4)$$

Además, considerando que el momento producido por las fuerzas externas se define como el producto entre la fuerza y el radio respecto al punto de análisis. La ecuación (5) representa el momento producido en el eje considerando la magnitud de las velocidades absolutas V .

$$\vec{M} = \rho Q (\vec{V}_2 \times \vec{r}_2 - \vec{V}_1 \times \vec{r}_1) \quad (5)$$

Sin embargo, únicamente la componente tangencial genera momento, por ende, solo se considera la influencia de esta y se reescribe la expresión (5) como se muestra en la ecuación (6).

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

$$\vec{M} = \rho Q (\vec{V}_{2,t} \times \vec{r}_2 - \vec{V}_{1,t} \times \vec{r}_1) \quad (6)$$

La potencia mecánica en un eje se obtiene al multiplicar el momento por la velocidad angular, es decir, $P = M\omega$. La ecuación (7), presenta la expresión resultante al reemplazar la ecuación (6) en la relación de potencia. Además, la potencia hidráulica teórica se calcula como el producto de la cabeza hidráulica teórica de la turbo máquina, el peso específico y el caudal, es decir, $P = \gamma QH$. Con esto, se puede despejar la cabeza hidráulica teórica y así obtener la expresión que se presenta en la ecuación (8).

$$P = \rho Q \omega (\vec{V}_{2,t} \times \vec{r}_2 - \vec{V}_{1,t} \times \vec{r}_1) \quad (7)$$

$$H = \frac{\rho Q \omega (\vec{V}_{2,t} \times \vec{r}_2 - \vec{V}_{1,t} \times \vec{r}_1)}{\gamma Q} \quad (8)$$

La ecuación (8), representa la cabeza hidráulica teórica en relación a la potencia. Esta expresión puede ser simplificada teniendo en cuenta lo siguiente:

- La relación entre la densidad del fluido y el peso específico es la gravedad, es decir, $g = \frac{\rho}{\gamma}$.
- Dado que los vectores de posición \vec{r}_1 y \vec{r}_2 son constantes, al ser multiplicados por la velocidad radial, forman la componente tangencial U_n de la velocidad absoluta V_n . Es decir, $U_n = \omega r_n$.

Con estas consideraciones, se obtiene la ecuación de Euler para turbo máquinas presentada en la ecuación (9):

$$H = \frac{U_2 \vec{V}_{2,t} - U_1 \vec{V}_{1,t}}{g} \quad (9)$$

De acuerdo con esto, se partió desde la ecuación de Euler para turbo máquinas para el desarrollo del modelo matemático. Esta expresión relaciona de manera directa la cabeza hidráulica con el

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

comportamiento fluido dinámico del agua en el impulsor. Además, permite calcular la cabeza hidráulica si se conoce la magnitud de la velocidad tangencial y radial del fluido en dos puntos específicos. Estos puntos se ubican en los extremos del álabe y a su vez en los límites del volumen de control considerado en el TTR.

El numerador de la ecuación (9) , se compone de dos términos y cada término es a su vez un producto de dos factores. Con esto, algebraicamente la cabeza calculada por medio de la ecuación de Euler será máxima cuando el término $U_1 \overline{V}_{1,t}$ sea cero. Además, la cabeza hidráulica toma su valor máximo en el BEP de la turbina. Por ello, dado que el modelo busca calcular la cabeza solo en el BEP, se consideró el término de la velocidad tangencial ($v_{1,t}$) y u_1 igual a cero. Con esto, se reescribió la ecuación (9) así:

$$H = \frac{u_2 v_{2,t}}{g} \quad (10)$$

El presente estudio se fundamentó en un marco teórico sólido que abordó la clasificación de las bombas operadas como turbinas según su velocidad específica y exploró los diferentes tipos de impulsores utilizados en las bombas centrífugas. Además, se establecen los fundamentos matemáticos necesarios para respaldar la investigación. Con el objetivo de llevar a cabo el estudio de manera rigurosa, se ha diseñado una metodología adecuada que se basa en los principios y conceptos teóricos presentados. Esta metodología se estructura en una serie de etapas que abarcan desde el modelado matemático del impulsor de la turbomáquina hasta la validación y comparación de los resultados obtenidos. El propósito de esta metodología es asegurar la coherencia y validez de los hallazgos, ofreciendo un enfoque sistemático y confiable para llevar a cabo la investigación.

 Institución Universitaria	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

3. METODOLOGÍA

En la Ilustración 5, se presenta la metodología utilizada para el desarrollo de este estudio, donde cada círculo de color expone una etapa del proceso. En la etapa 1 se realizó el modelado matemático del impulsor de la turbomáquina, definiendo los parámetros geométricos que se tuvieron en consideración para su influencia en el comportamiento fluido dinámico de la partícula de agua y el volumen de control. Luego, se estudió el fundamento teórico de la ecuación general de Euler para turbomáquinas, con el fin de tener una base respecto a los teoremas y leyes aplicadas para su desarrollo. Posteriormente, se procedió a realizar el modelado matemático en busca de una expresión en términos de la velocidad de rotación y la geometría, haciendo uso de la teoría de mecánica de fluidos expuesta en la sección marco teórico. Finalmente, se analizó dimensionalmente para verificar su coherencia en términos de unidades.

Posteriormente, en la etapa 2 se consultó en literatura y bases de datos la documentación relacionada a estudios de curvas características en bombas, tanto en modo bomba como turbina. Se hizo la selección de la información, catalogando y ordenando la documentación en la que se investigó específicamente de bombas operadas como turbinas. Además de esto, se tomaron aquellos que suministraron de manera clara y fiable los parámetros geométricos y de operación experimental usados para el desarrollo de la investigación.

Luego, en la tercera etapa, haciendo uso de los datos adquiridos en la etapa 2 se procedió a realizar la validación. La validación consistió en introducir en la expresión obtenida en la etapa 1 cada uno de los parámetros consultados en la literatura. Una vez obtenido el valor estimado por el modelo, se midió su desempeño por medio de análisis estadístico. Para evaluar el desempeño del modelo, se tomó un error de referencia admisible considerando los utilizados en la literatura consultada. Algunos autores obtuvieron errores del 12% [17], 5-10% [18] entre otros. Basado en esto se tomó el margen de error del 20%, el cual se ha considerado como aceptable en estudios previos [10], [27], [28]. Los resultados, finalmente fueron segmentados de acuerdo a las condiciones de desempeño con el fin de evaluar bajo qué condiciones el modelo se ajustó.

Finalmente, en la cuarta etapa, se retomó la información recopilada y ordenada en la etapa 2. Los resultados del modelo fueron comparados con los resultados obtenidos por otros investigadores

que propusieron otros métodos para predecir la cabeza hidráulica. Se ordenaron los resultados y se analizó por medio de áreas su ajuste.

Ilustración 5. Metodología de investigación.



	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

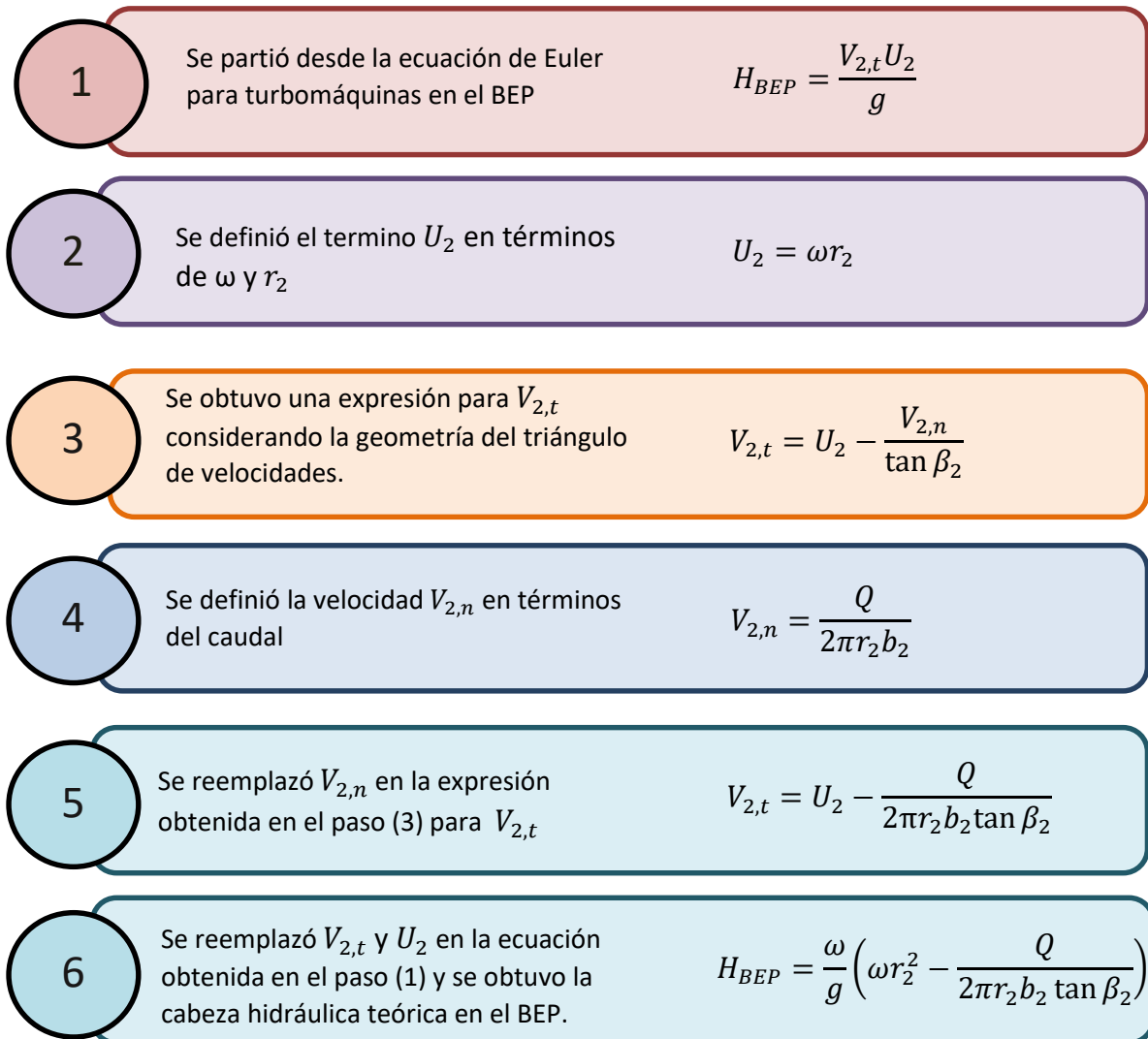
3.1 Modelado matemático y predicción de la cabeza hidráulica en bombas operadas como turbinas: una aproximación basada en la ecuación de Euler

En concordancia con el objetivo de desarrollar un modelo matemático para predecir la cabeza hidráulica en bombas operadas como turbinas, a continuación, se presentan cuatro modelos desarrollados. Estos modelos se basaron en diferentes enfoques y consideraciones. El primer modelo, se fundamentó en los parámetros geométricos del impulsor y se basó en la ecuación de Euler, sin tener en cuenta las pérdidas, el caudal ni algunas consideraciones geométricas detalladas. A medida que avanzó la investigación, se desarrollaron tres modelos adicionales, cada uno de ellos incorporando elementos y mejoras progresivas para lograr una mayor precisión en la predicción de la cabeza hidráulica. Estos modelos posteriores consideraron las pérdidas, el caudal y consideraciones geométricas más detalladas. A través de estos cuatro modelos, se estableció un enfoque más completo y refinado para abordar la predicción de la cabeza hidráulica en bombas operadas como turbinas.

3.1.1 Modelo 1. Aproximación simplificada basada en la ecuación de Euler y parámetros geométricos del impulsor

El proceso de obtención del primer modelo se presentó en el flujograma de la Ilustración 6. Se partió de la ecuación de Euler para turbo máquinas, y se obtuvo una expresión alternativa que permitió calcular la cabeza hidráulica en función de parámetros geométricos del impulsor. A continuación, se describió de manera detallada el proceso de modelado y las consideraciones hechas a partir de la ecuación (10) que depende de la velocidad radial (u_2) y la velocidad tangencial $v_{2,t}$.

Ilustración 6. Desarrollo matemático del primer modelo.

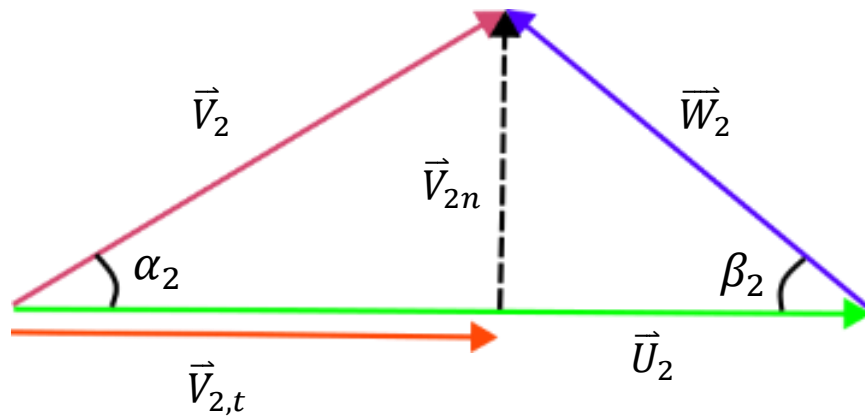


El termino u_2 pudo ser calculado por medio de la teoría del movimiento circular uniforme. La velocidad radial se define como el producto entre la velocidad angular del impulsor y el radio hasta el punto donde se forma el vector de velocidad como se muestra en el paso 2 de la Ilustración 6. Con esto, se definió u_2 como se muestra en la ecuación (11)

$$u_2 = \omega r_2 \tag{ 11}$$

El vector $v_{2,t}$ representó la componente tangencial del vector de velocidad resultante en el extremo del impulsor, además tiene la misma dirección y sentido de la velocidad radial u_2 como se muestra en la Ilustración 7.

Ilustración 7. Triángulo de velocidades formado en la salida del impulsor.



Geoméricamente, se obtuvo esta velocidad como u_2 disminuido en la magnitud del cateto adyacente a β_2 formado entre los vectores \vec{U}_2 y \vec{W}_2 así:

$$v_{2,t} = u_2 - \frac{v_{2,n}}{\tan(\beta_2)} \quad (12)$$

Esta expresión para la velocidad tangencial dependió de dos parámetros geométricos: la velocidad angular del impulsor (ω) y la componente normal de la velocidad $v_{2,n}$, que es perpendicular respecto al área de flujo del agua. Luego, teniendo en cuenta el principio de Bernoulli, se estableció que el flujo volumétrico en la entrada de la turbina es igual en la salida como se muestra en la ecuación (13).

 Institución Universitaria	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

$$2\pi r_1 b_1 v_{1,n} = 2\pi r_2 b_2 v_{2,n} \quad (13)$$

De esta igualdad, se despejo el termino $v_{2,n}$ y se obtuvo una expresión que dependió del caudal de sitio:

$$v_{2,n} = \frac{Q}{2\pi r_2 b_2} \quad (14)$$

El termino $v_{2,n}$ se reemplazó en la ecuación (12) y se obtuvo una expresión alternativa para la componente tangencial de la velocidad absoluta como se presenta en la ecuación (15).

$$v_{2,t} = \omega r_2 - \frac{Q}{2\pi r_2 b_2 \tan(\beta_2)} \quad (15)$$

Finalmente, la ecuación (15) se reemplazó en la ecuación de Euler para turbomáquinas y así se obtuvo una relación de la cabeza hidráulica de una PAT en función de la geometría del impulsor y condiciones de sitio por medio de la ecuación (16):

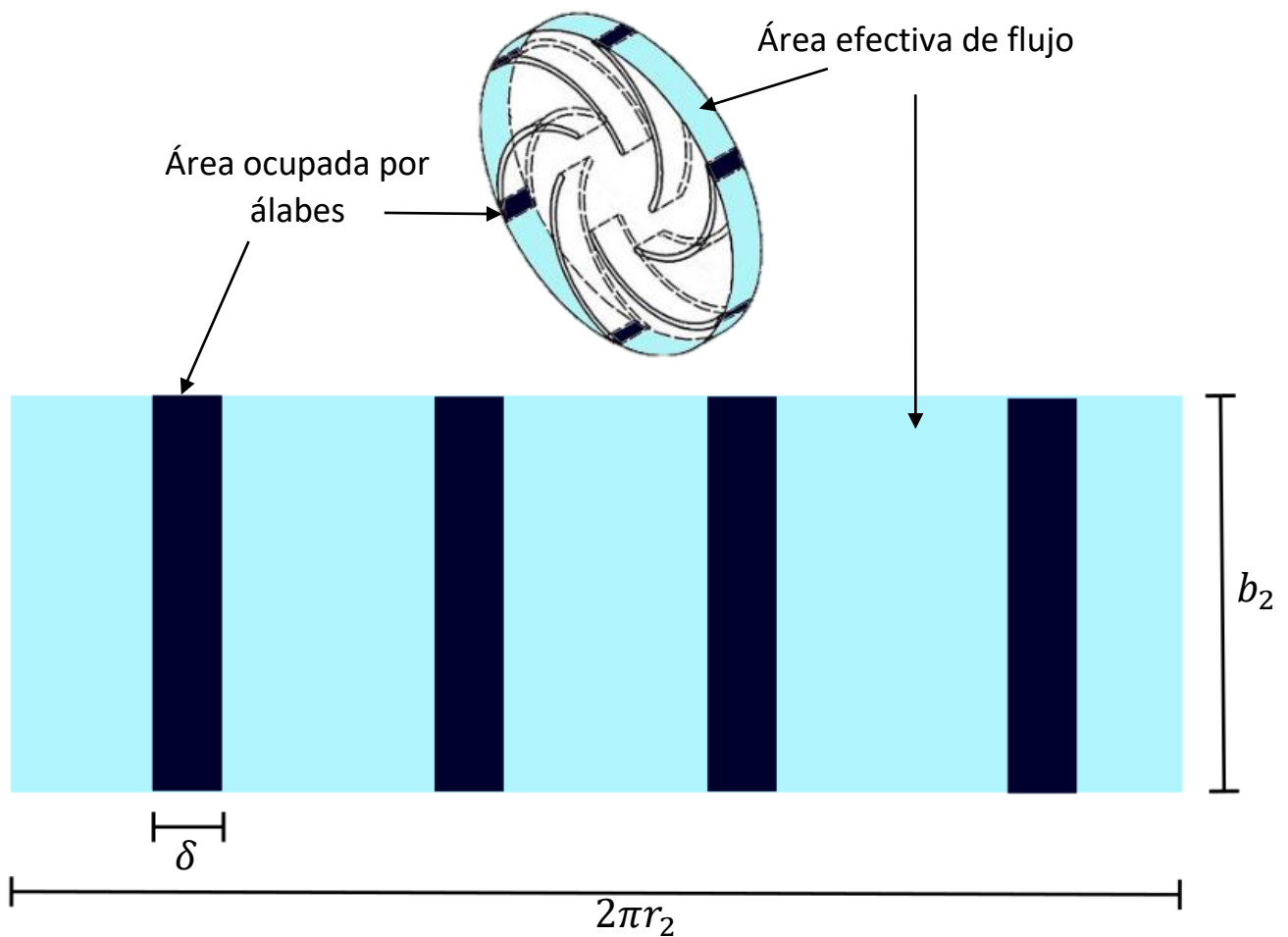
$$H_{BEP} = \frac{\omega r_2}{g} \left(\omega r_2 - \frac{Q}{2\pi r_2 b_2 \tan(\beta_2)} \right) \quad (16)$$

3.1.2 Modelo 2. Modelo mejorado de predicción de la cabeza hidráulica considerando el área efectiva de flujo con la presencia de álabes.

El presente modelo se basó en la consideración del área de flujo efectiva teniendo en cuenta la presencia de los álabes. A diferencia del modelo anterior, donde se consideró la superficie transversal de entrada y salida sin tener en cuenta los álabes, en este modelo se tuvo en cuenta el

espacio ocupado por el espesor de los álabes, lo cual resultó en un área de flujo efectiva menor representada en color celeste. Esta área se visualiza en la Ilustración 8, donde se presenta un isométrico del impulsor en la parte superior y se resalta el área considerada en el modelo. Cabe destacar que el área incidente de los álabes se representó como un rectángulo de color azul oscuro, con la base correspondiente al espesor del álabe (δ) y la altura asociada al parámetro b_2 .

Ilustración 8. Área de flujo efectiva considerando la presencia de los álabes en el impulsor. Adaptado de [29].



Con esta consideración, se repitió el procedimiento utilizado para el desarrollo del primer modelo, partiendo desde la ecuación (13), donde el área de flujo se definió como se muestra en la ecuación (17)

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

$$A_2 = (2\pi r_2 - Z\delta)b_2 \quad (17)$$

Con esta definición alternativa para el área de flujo, se obtuvo un modelo que considero la presencia de los álabes en el impulsor y se presenta en la ecuación (18).

$$H_{BEP} = \frac{\omega r_2}{g} \left(\omega r_2 - \frac{Q}{(2\pi r_2 - \delta Z)b_2 \tan(\beta_2)} \right) \quad (18)$$

La presencia de los álabes en el impulsor produce pérdidas por choques y recirculación de fluido por remolino [19]. Las pérdidas por choque producen una disminución en la velocidad del fluido y consecuentemente una disminución en la cabeza hidráulica. La formación de remolinos es debido a imperfecciones en el guiado del fluido. Estos vórtices, afectan la dirección de los vectores de flujo, es decir, los ángulos β_2 y α_2 son variantes en el tiempo. Considerando esto, un modelo bidimensional de flujo representará con mayor exactitud la cabeza hidráulica teórica.

Consecuentemente, se incluyó en el modelo el coeficiente de obstrucción de flujo que considera las pérdidas por choque y recirculación. Teniendo en cuenta que el caudal Q es directamente proporcional al producto de la velocidad V_n y el área transversal A , si la velocidad disminuye el caudal también. Por lo tanto, las pérdidas de flujo volumétrico dependen de la geometría de los álabes presentes en el impulsor. La Ecuación (19) presentó la expresión matemática para calcular estas pérdidas en términos de parámetros geométricos del impulsor. Este coeficiente (k_2) considera el espesor de los álabes (δ), el número de álabes presentes en el impulsor (Z). En la teoría unidimensional este coeficiente tiene una magnitud de 1, es decir, no existen pérdidas de fluido entre la entrada y la salida del impulsor.

Al considerar un flujo bidimensional y consecuentemente la aparición de pérdidas por choque, se definió k_2 como una función lineal multivariable que dependió de δ, z y r_2 , es decir, $k_2 = f(\delta, Z, r_2)$, luego se estudió la dependencia geométrica de los álabes teniendo en cuenta el dominio de $f(\delta, Z, r_2)$.

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

$$k_2 = 1 - \frac{\delta Z}{2\pi r_2} \quad (19)$$

La Tabla 2, presentó los resultados del análisis matemático del comportamiento de k_2 como una función en el dominio de los reales. Para que el coeficiente k_2 sea negativo, matemáticamente el área ocupada por los álabes debe ser mayor al perímetro, lo que no tiene sentido en un impulsor real. Tomará un valor de cero cuando el área ocupada sea igual al perímetro, con lo cual el fluido no tendría por donde moverse y consecuentemente el caudal es igual a 0. El valor ideal de uno (1) solo es posible cuando el número de álabes es cero (0), lo que tampoco es posible constructivamente debido que son los álabes los que arrastran el fluido y lo desplaza desde la entrada hasta la salida. Considerar que k_2 es mayor a la unidad implicó que el caudal en la salida es mayor al caudal en la entrada y no es coherente con el teorema de transporte de Reynolds y la ley de conservación de masa. Por lo tanto, k_2 siempre será un valor mayor a 0 y menor a la unidad considerando las características constructivas del impulsor.

Tabla 2. Dependencia geométrica de k_2 respecto a la geometría del álabe

Condición geométrica	k_2
$\delta Z > 2\pi r_2$	< 0
$\delta Z = 2\pi r_2$	0
$Z = 0$	1
$\delta Z < 2\pi r_2$	> 1

Con esto, el termino Q de la ecuación (18) fue multiplicado por el coeficiente de obstrucción de flujo y se obtuvo el modelo 2 que se presenta en la ecuación (20). Este modelo considera la formación de remolinos relativos en el volumen de control y las pérdidas de velocidad en el fluido.

$$H_{BEP} = \frac{\omega r_2}{g} \left(\omega r_2 - \frac{\left(1 - \frac{\delta Z}{2\pi r_2}\right) Q}{(2\pi r_2 - \delta Z) b_2 \tan(\beta_2)} \right) \quad (20)$$

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

3.1.3 Modelo con constante de ajuste para optimizar la precisión y reducir la varianza en la predicción de la cabeza hidráulica.

Se propuso buscar una constante de ajuste que mejore la precisión y disminuya la varianza del modelo. Esta constante se obtuvo partiendo de la premisa que la cabeza hidráulica experimental (H_{exp}) es k veces la cabeza calculada por los modelos propuestos anteriormente (H_{Modelo}), es decir, $H_{exp} = KH_{Modelo}$. La constante de ajuste se obtuvo de la siguiente manera:

El error relativo (E_R) se define como el cociente entre el error absoluto (E_A) y la medida experimental o de confianza. Para este caso, la medida de confianza, es la cabeza experimental obtenida de la literatura, es decir, $E_R = E_A/H_{exp}$.

A su vez, el error absoluto se define como la diferencia entre la cabeza experimental y la cabeza calculada por los modelos, es decir, $E_A = KH_{Modelo} - H_{Modelo}$. En la ecuación (21) se presenta la expresión obtenida que considera el factor de ajuste.

$$E_R = \frac{KH_{Modelo} - H_{Modelo}}{KH_{Modelo}} \quad (21)$$

Aplicando procedimientos matemáticos, se despejó la constante k y se obtuvo una expresión para calcularla por medio de regresión lineal como se muestra en la ecuación (22). El error relativo que se consideró fue el error relativo promedio de las validaciones realizadas en el modelo 2, es decir, $E_R = 11\%$.

$$K = -\frac{1}{E_R - 1} \quad (22)$$

Con esta expresión, se obtuvo una ecuación alternativa para la cabeza hidráulica que integro la constante obtenida como se observa en la ecuación (23):

$$H_{BEP} = \frac{k\omega r_2}{g} \left(\omega r_2 - \frac{k_2 Q}{(2\pi r_2 - \delta Z)b_2 \tan(\beta_2)} \right) \quad (23)$$

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

3.1.4 Modelo 4. Modelo de flujo bidimensional simplificado considerando el factor de disminución de trabajo (e_z)

Para el desarrollo de los modelos se consideró el flujo unidimensional. Es decir, se consideró que toda partícula de fluido que ingrese al impulsor seguirá la misma trayectoria de los álabes. Esta consideración solo sería posible si el impulsor tuviera una cantidad infinita de álabes de espesor despreciable. De esta manera, las partículas se deslizarían sobre los álabes sin cambiar su trayectoria. Sin embargo, un impulsor real posee un número finito de álabes con un espesor determinado y por lo tanto el comportamiento fluido dinámico del agua no es ideal.

El factor de disminución de trabajo (e_z) permite considerar un flujo bidimensional de manera simplificada. Teniendo en cuenta la rotación relativa que poseen las partículas, se consideran las pérdidas de velocidad producidas en el fluido. En la ecuación (24) se presenta la expresión matemática para calcularla por medio del método de Pfleiderer [20].

$$e_z = \frac{1}{1 + \frac{1.2(1 + \sin \beta_2)}{Z \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right) \right]}} \quad (24)$$

De esta manera se obtuvo un modelo alternativo que integró un factor de ajuste obtenido de la literatura y se presenta en la ecuación (25):

$$H_{BEP} = \frac{\omega r_2}{g} \left(\frac{1}{1 + \frac{1.2(1 + \sin \beta_2)}{Z \left[1 - \frac{D_1}{D_2} \right]}} \right) \left(\omega r_2 - \frac{k_2 Q}{(2\pi r_2 - \delta Z) b_2 \tan(\beta_2)} \right) \quad (25)$$

A continuación, en la Tabla 3, se resumen los modelos propuestos para predecir la cabeza hidráulica en una bomba operada como turbina. Cada modelo se basó en consideraciones y variables distintas, lo que les confiere limitaciones particulares. El Modelo 1 se enfocó en los parámetros geométricos del impulsor, sin considerar pérdidas ni variaciones en el caudal. El Modelo 2 incorporó el área de flujo efectiva y el coeficiente de obstrucción de flujo, pero no consideró otras pérdidas ni

consideraciones geométricas detalladas. En el Modelo 3 se integró una constante de ajuste obtenida por medio de regresión lineal para mejorar la precisión. En el Modelo 4 se simplificó el flujo bidimensional, pero no se consideraron todas las complejidades de la dinámica del fluido al interior del impulsor.

Tabla 3. Comparación de modelos para la predicción de la cabeza hidráulica

Modelo	Consideraciones	VARIABLES consideradas	Limitaciones
Modelo 1	Parámetros geométricos del impulsor partiendo de la ecuación de Euler.	$\omega, g, Q, r_2, b_2, \beta_2$	<ul style="list-style-type: none"> No considera pérdidas de energía en el flujo ni variaciones en el caudal, lo que limita su precisión en condiciones no ideales.
Modelo 2	Área de flujo efectiva con presencia de álabes y coeficiente de obstrucción de flujo.	$\omega, g, Q, r_2, b_2, \beta_2, \delta, Z, k_2$	<ul style="list-style-type: none"> No considera la geometría en la salida de la turbina. No considera pérdidas asociadas al flujo volumétrico presente en el volumen de control.
Modelo 3	Constante de ajuste para mejorar precisión y reducir varianza.	$\omega, g, Q, r_2, b_2, \beta_2, \delta, Z, k_2, K$	<ul style="list-style-type: none"> Su aplicabilidad es limitada dado que es un parámetro en función del error relativo obtenido en el análisis del comportamiento del modelo.

 Institución Universitaria	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

Modelo	Consideraciones	Variables consideradas	Limitaciones
			Consecuentemente, el error relativo promedio puede variar según se aumente el número de validaciones.
Modelo 4	Flujo bidimensional simplificado y factor de disminución de trabajo.	$\omega, g, Q, r_2, b_2, \beta_2, \delta, Z, k_2, e_z$	<ul style="list-style-type: none"> La simplificación del flujo bidimensional no considera todas las complejidades del comportamiento del fluido en el impulsor, lo que puede llevar a estimaciones menos precisas. El factor de disminución de trabajo asume condiciones ideales y puede no reflejar completamente las pérdidas de velocidad en el fluido.

3.2 Búsqueda selectiva de documentación para la obtención de parámetros geométricos: fundamentos para la validación de los modelos matemáticos.

Consecuentemente, con base en los objetivos propuestos, se realizó una búsqueda selectiva en la literatura los parámetros geométricos que fueron usados posteriormente para la validación de los modelos. Se encontraron diversos estudios relacionados a PAT, donde se presentaron las

 Institución Universitaria	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

características técnico operativas de algunas bombas. Sin embargo, algunos autores no enunciaron textualmente el espesor de los álabes. En la Tabla 4 se presentan características técnico operativas de 25 bombas operadas como turbina con cabeza hidráulica entre 3,19 m y 77,7 m. Por otra parte, La

Tabla 5 presenta los parámetros geométricos del impulsor obtenidos de la literatura de manera textual. Los campos con guion (-) corresponden a valores no proporcionados por los autores.

Tabla 4. Condiciones de sitio de las PAT consultadas.

Refs.	PAT	$H(m)$	$\omega(rpm)$	$Q(m^3/h)$
[Yang S. <i>et al</i> , 2012]	1	35,04	1500	72
[Yang S. <i>et al</i> , 2012]	2	41,71	3000	72
[Yang S. <i>et al</i> , 2012]	3	31,36	3000	72
[Yang S. <i>et al</i> , 2012]	4	32,40	1500	36
[Miao S. <i>et al</i> , 2015]	5	72,20	2900	36
[Doshi A., <i>et al</i> , 2017]	6	10,93	1000	36
[Doshi A., <i>et al</i> , 2017]	7	6,82	1000	36
[Doshi A., <i>et al</i> , 2017]	8	3,19	1000	108
[Doshi A., <i>et al</i> , 2017]	9	16,62	1000	108
[Huang S. <i>et al</i> , 2017]	10	30,50	1450	72
[Huang S. <i>et al</i> , 2017]	11	19,80	1480	25,2
[Huang S. <i>et al</i> , 2017]	12	36,60	2900	18,72
[Lin T. <i>et al</i> , 2021]	13	52,80	2900	26,64
[Lin T. <i>et al</i> , 2021]	14	54,00	2900	32,4
[Polák M, 2021]	15	10,00	1358	20,16
[Polák M, 2021]	16	20,00	2029	28,8
[Polák M, 2021]	17	30,00	2402	35,28
[Polák M, 2021]	18	10,00	1353	36
[Polák M, 2021]	19	20,00	1910	72
[Polák M, 2021]	20	30,00	2408	72

 Institución Universitaria	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

Refs.	PAT	$H(m)$	$\omega(rpm)$	$Q(m^3/h)$
[Barbarelli S. <i>et al</i> , 2022]	21	93,28	1450	36
[Barbarelli S. <i>et al</i> , 2022]	22	43,70	1450	7,2
[Barbarelli S. <i>et al</i> , 2022]	23	20,00	1450	36
[Qi B, <i>et al</i> , 2022]	24	15,00	1450	21,6
[Qi B, <i>et al</i> , 2022]	25	15,00	1450	21,6

Tabla 5. Parámetros geométricos obtenidos de la literatura

PAT	$r_2(mm)$	$b_2(mm)$	$\beta_2(^{\circ})$	$\delta(mm)$	Z (-)
1	84,5	26	20	-	9
2	84,5	26	30	-	9
3	117,5	15,3	30	-	9
4	130	15,5	28	4	6
5	107	20,3	14	-	4
6	87	21,8	23	5,4	5
7	70,5	27	23	4,6	5
8	79	19	25	3,7	6
9	66	27	22	3,5	5
10	127,5	14,38	30	2,5	7
11	82,5	6	35	3	6
12	66	16	30	3	5
13	66	16	30	3,5	6
14	66	16	15	-	6
15	66	10	24	1,5	6
16	66	10	24	1,5	6
17	66	10	24	1,5	6
18	129	17	60	1,5	12
19	101,5	16	60	1,5	12
20	70	18	60	1,5	12
21	162,5	10	24	4	5

 Institución Universitaria	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

PAT	$r_2(mm)$	$b_2(mm)$	$\beta_2(^{\circ})$	$\delta(mm)$	Z (-)
22	134,29	8	20	4	6
23	115	25	28	2	7
24	82,5	7	39	-	6
25	82,5	8	90	-	11

Teniendo en cuenta que algunos autores no brindaron de manera precisa el valor del espesor del álabe, se optó por considerar el espesor promedio como valor representativo para δ en la validación de las bombas con espesor de álabe desconocido. Tras el análisis, se determinó que el valor promedio obtenido fue de 0,0029 m. Este valor se utilizó como referencia en el proceso de validación de los modelos matemáticos desarrollados.

3.3 Validación de la cabeza hidráulica teórica mediante métodos estadísticos.

Para evaluar el desempeño de los modelos, tres criterios fueron considerados: El rango de variación máximo presentado por el modelo ($\Delta Error$), la varianza (σ) y la efectividad del modelo (EF). El rango de variación se evaluó considerando que el modelo será mejor cuanto más preciso y exacto sea. Este criterio corresponde a la diferencia entre los errores máximos obtenidos en las 25 validaciones, es decir, $\Delta Error = Error_{rel\ max(H_{exp} > H_{Modelo})} - Error_{rel\ min(H_{exp} < H_{Modelo})}$. Por otro parte, para evaluar la precisión del modelo, se calculó la varianza del error relativo (σ) utilizando la ecuación (26). Donde n es el número de validaciones y \bar{X} el error relativo medio.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n} \quad (26)$$

También, se consideró que la efectividad dependió del error relativo asociado al dato observado, donde tendrá un valor de uno (1) si el error relativo es inferior al 20% y será cero si el error relativo es superior. Consecuentemente, se definió una función de efectividad $ef(E_R)$ como una función

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

del error relativo por tramos con rango 1 y dominio de cero a infinito como se muestra en la ecuación (26).

$$ef(E_R) = \begin{cases} 1, & E_R \leq 20\% \\ 0, & E_R > 20\% \end{cases} \quad (27)$$

Para calcular la efectividad del modelo se estableció una relación entre el total de validaciones con un error relativo inferior al 20% en proporción al total de las bombas estudiadas. En la ecuación (28) se presentó la expresión para calcular la efectividad porcentual de un modelo matemático como la relación entre la función del error relativo asociado a cada iteración del modelo (E_{R_i}) y el total de muestras (n).

$$EF(\%) = \frac{100 \sum_{i=0}^n ef(E_{R_i})}{n} \quad (28)$$

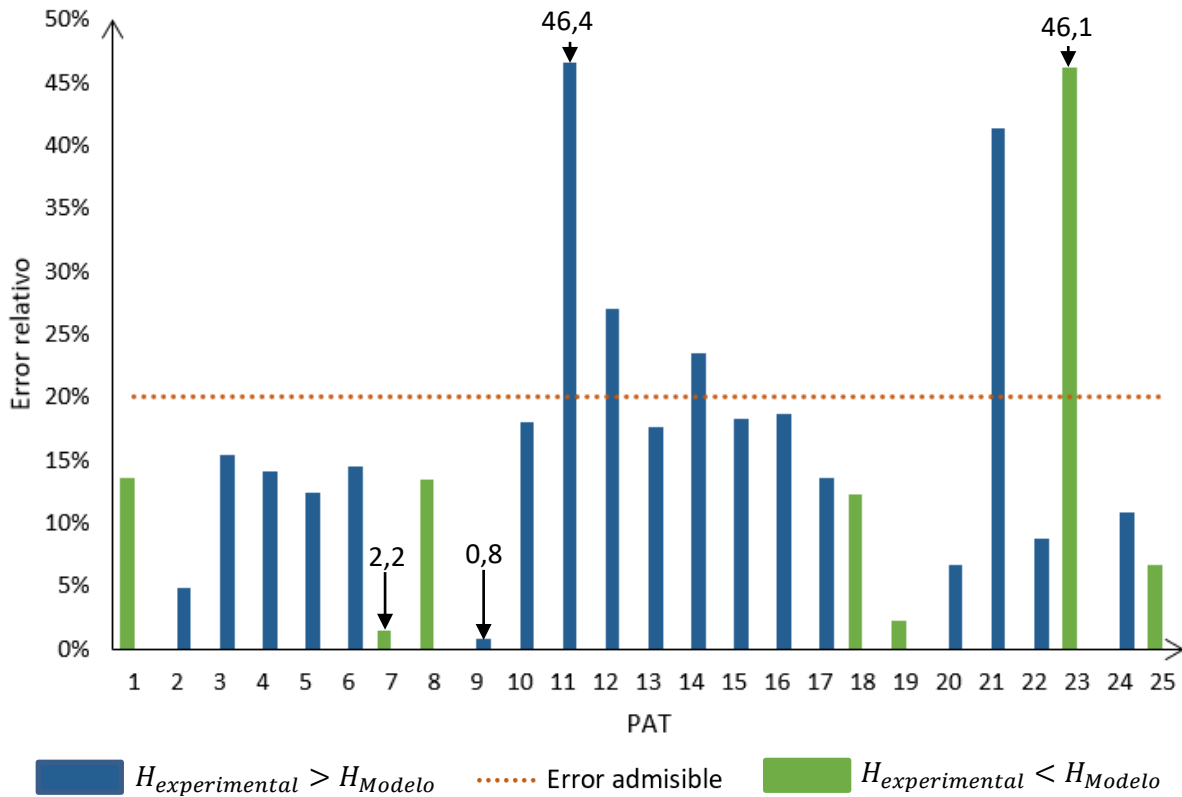
	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

4 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 Evaluación de la precisión del primer modelo mediante la comparación de la cabeza hidráulica teórica y experimental.

El primer modelo fue validado y se obtuvieron los resultados que se presentan en la Ilustración 9, donde se mostró el error relativo calculado para las 25 PATs evaluadas. El eje vertical representó el porcentaje de error, mientras que el eje horizontal representó la bomba evaluada. Las barras de color azul representaron errores relativos positivos, es decir, la cabeza hidráulica teórica fue menor que la cabeza hidráulica experimental, mientras que las barras verdes representaron errores relativos negativos, lo que significó que la cabeza teórica fue mayor a la altura experimental. La línea discontinua representó el error admisible del 20% para este estudio. Se evidenció que para 18 validaciones el error relativo obtenido fue positivo y fue negativo para 7 bombas, es decir, la cabeza hidráulica teórica fue menor a la cabeza experimental para el 72% de las 25 bombas evaluadas. Se observó que, para las bombas validadas donde se obtuvieron errores positivos, el menor fue de 0,8% y el mayor fue 46,49%, además, 14 validaciones se encontraron en un rango inferior al 20%. Por otro lado, de las 7 validaciones con error relativo negativo, 6 se encontraron en el rango admisible del 20% donde se obtuvo un error mínimo correspondiente al 2,21% y un error máximo de 46,12%. En total, el modelo presentó un error inferior al 20% para 20 bombas, lo que representó el 80% de las bombas estudiadas.

Ilustración 9. Errores relativos obtenidos del Modelo 1.

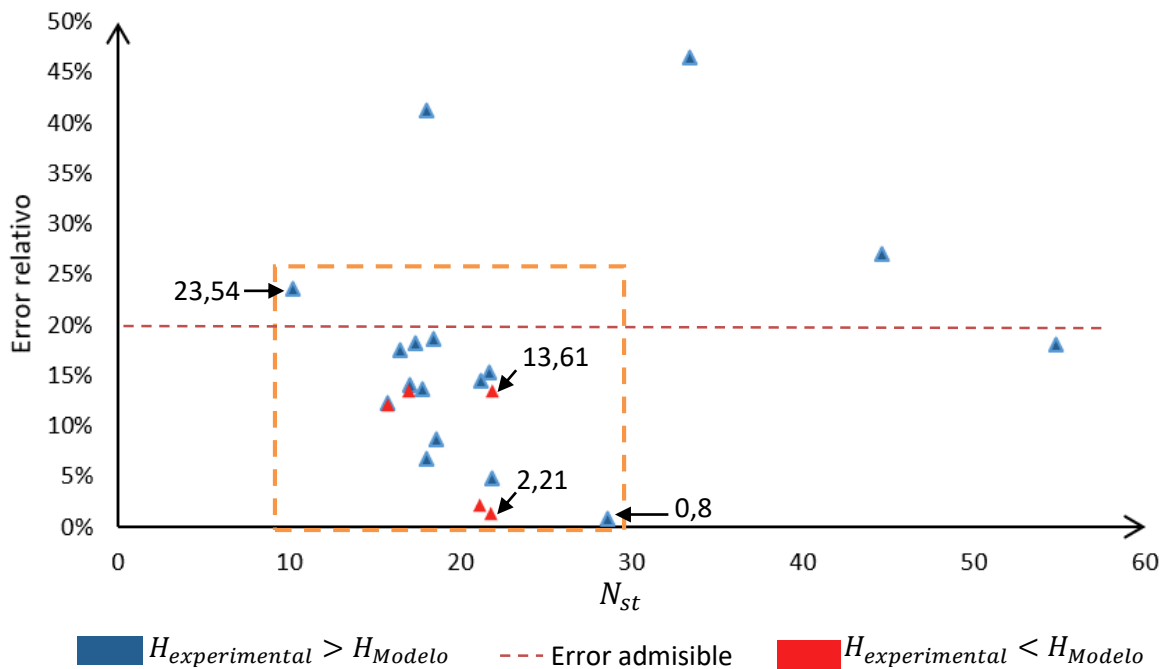


Sin embargo, el presente trabajo pretendió obtener una expresión para bombas centrífugas radiales. Algunas bombas utilizadas en el proceso de validación, no se encontraron en ese régimen de operación. Por lo tanto, es posible que los errores relativos altos fueron obtenidos con bombas fuera del rango del modelo.

Para validar esta hipótesis se investigó la relación del error relativo con la velocidad específica en modo turbina (N_{st}), utilizando la ecuación (1) presentada en la sección marco teórico. La Ilustración 10, corresponde a un gráfico de dispersión de datos, que muestra los errores obtenidos respecto a la N_{st} . En el eje de las ordenadas se representó el porcentaje de error, mientras que el eje de las abscisas representó la velocidad específica. Los datos de color azul representaron errores relativos positivos, es decir, la cabeza hidráulica teórica fue menor que la cabeza hidráulica experimental, mientras que los puntos rojos representaron errores relativos negativos, lo que significó que la cabeza teórica fue mayor a la altura experimental. Se observó que para bombas con velocidades específicas entre 10 y 30 se formó un conjunto de datos donde se encontraron 5 errores negativos

y 15 positivos. En este rango, el error relativo menor fue 0,80% y el mayor fue 23,54% para las bombas donde la cabeza calculada fue menor a la cabeza teórica. Mientras que, para las bombas donde la cabeza calculada fue mayor a la cabeza teórica, se obtuvo que el error más alto fue de 13,61% y el menor fue 2,21%. También, se observó un error atípico de 46,28%.

Ilustración 10. Relación de errores relativos respecto a N_{st} del Modelo 1.

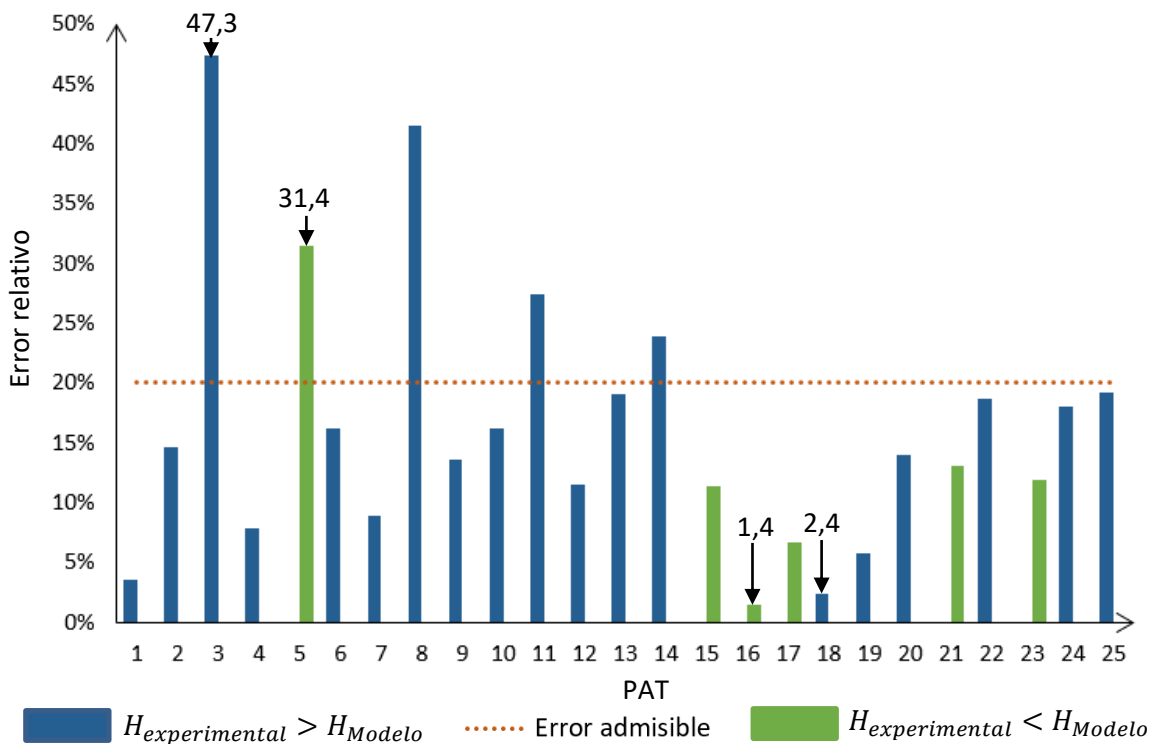


4.1.2. Resultados del modelo 2 considerando el coeficiente de obstrucción de flujo.

Al igual que el modelo anterior, el segundo modelo fue validado y se obtuvieron los resultados que se presentan en la Ilustración 11, donde se mostró el error relativo calculado para las 25 PATs evaluadas. El eje vertical representó el porcentaje de error, mientras que el eje horizontal representó la bomba evaluada. Las barras de color azul representaron errores relativos positivos, es decir, la cabeza hidráulica teórica fue menor que la cabeza hidráulica experimental, mientras que las barras verdes representaron errores relativos negativos, lo que significó que la cabeza teórica

fue mayor a la altura experimental. La línea discontinua representa el error admisible del 20% para este estudio. Se evidenció que para 19 validaciones el error relativo obtenido fue positivo y fue negativo para 6 bombas, es decir, la cabeza hidráulica teórica fue menor a la cabeza experimental para el 76% de las 25 bombas evaluadas. Se observó que, para las bombas validadas donde se obtuvieron errores positivos, el menor fue de 2,41% y el mayor fue 47,3%, además, 15 validaciones se encontraron en un rango inferior al 20%. Por otro lado, de las 6 validaciones con error relativo negativo, 5 se encontraron en el rango admisible del 20% donde se obtuvo un error mínimo correspondiente al 1,48% y un error máximo de 31,47%. En total, el modelo presentó un error inferior al 20% para 20 bombas, lo que representó el 80% de las bombas estudiadas.

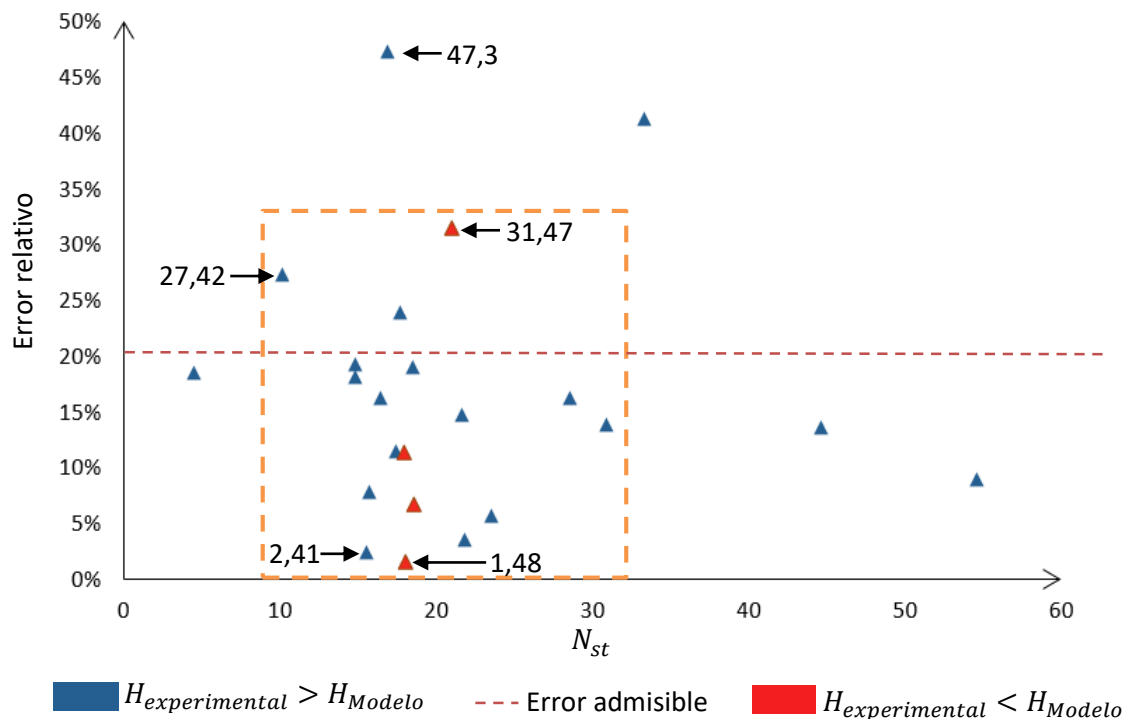
Ilustración 11. Errores relativos obtenidos del Modelo 2.



Se investigó la relación del error relativo con la velocidad específica en modo turbina (N_{st}), utilizando la ecuación (1) presentada en la sección marco teórico. La **Ilustración 12**, presentó el comportamiento del modelo para el rango de velocidades específicas de las bombas estudiadas. En

el eje de las ordenadas se representó el porcentaje de error, mientras que el eje de las abscisas representó la velocidad específica. Los datos de color azul representaron errores relativos positivos, es decir, la cabeza hidráulica teórica fue menor que la cabeza hidráulica experimental, mientras que los puntos rojos representaron errores relativos negativos, lo que significó que la cabeza teórica fue mayor a la altura experimental. Se observó que para bombas con velocidades específicas entre 10 y 34 se formó un conjunto de datos donde se encontraron 4 errores negativos y 14 positivos. En este rango, el error relativo menor fue 2,41% y el mayor fue 27,42% para las bombas donde la cabeza calculada fue menor a la cabeza teórica. Mientras que, para las bombas donde la cabeza calculada fue mayor a la cabeza teórica, se obtuvo que el error más alto fue 31,47% y el menor fue 1,48%. Además, se identificó un error atípico positivo de 47,3%.

Ilustración 12. Relación de errores relativos y N_{st} para el Modelo 2.

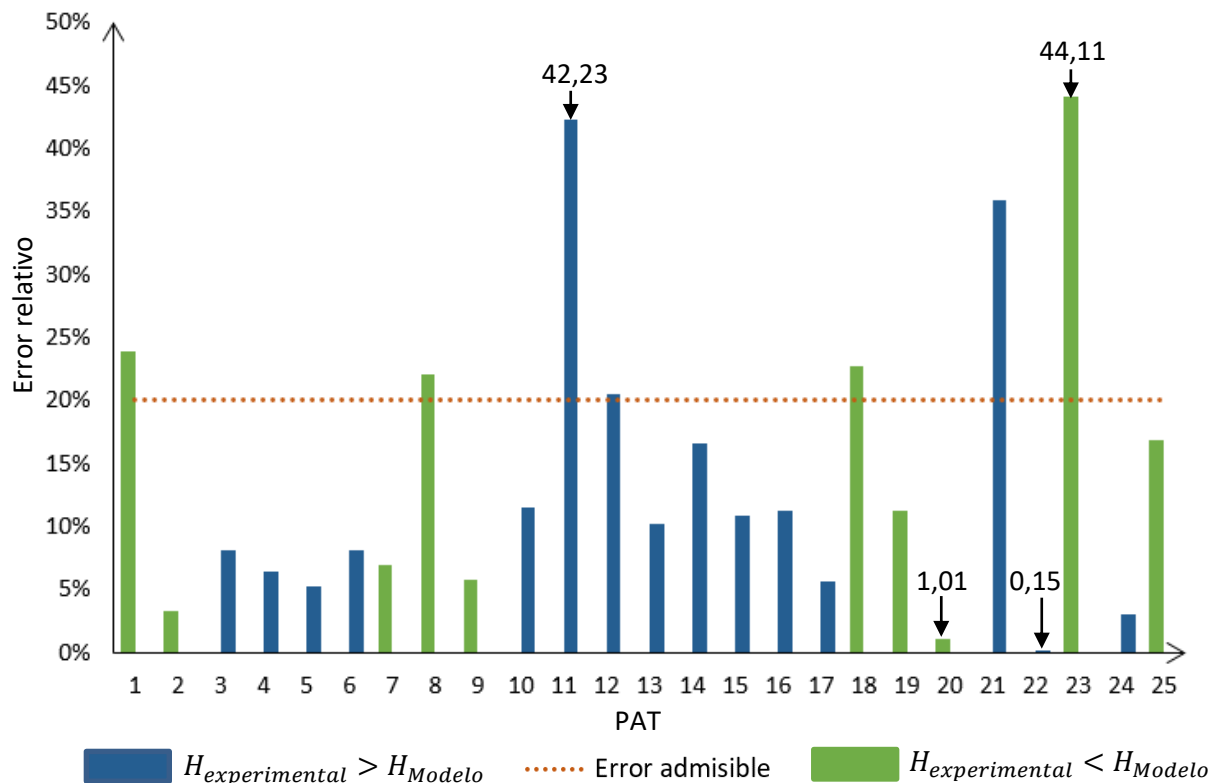


	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

4.1.3. Resultados del modelo 3 considerando constante de ajuste obtenida mediante regresión lineal.

Se evaluó el tercer modelo propuesto que integró la constante de ajuste obtenida por medio de regresión lineal y se obtuvieron los resultados que se presentaron en la **Ilustración 13**, donde se mostró el error relativo calculado para las 25 PATs estudiadas. El eje vertical representó el porcentaje de error, mientras que el eje horizontal representó la bomba evaluada. Las barras azules representaron las validaciones donde la cabeza calculada está por debajo de la cabeza hidráulica teórica, mientras que las barras de color verde representaron las validaciones por encima de la cabeza teórica. Las equis representaron el error admisible del 20% para este estudio. Se obtuvieron errores relativos positivos para 15 bombas lo que representó el 60% del total de bombas estudiadas, también se obtuvieron 10 negativos, es decir, el 40% de las validaciones totales. Las validaciones donde la cabeza teórica fue menor a la cabeza experimental, presentaron errores entre 0,15% y 42,23%. Por otro lado, de las 10 validaciones con error relativo negativo, 5 se encontraron en el rango admisible del 20% donde se obtuvo un error mínimo correspondiente al 1,01% y un error máximo de 44,11%. En total, el modelo presentó un error inferior al 20% para 18 bombas, lo que representó el 72% de las bombas estudiadas.

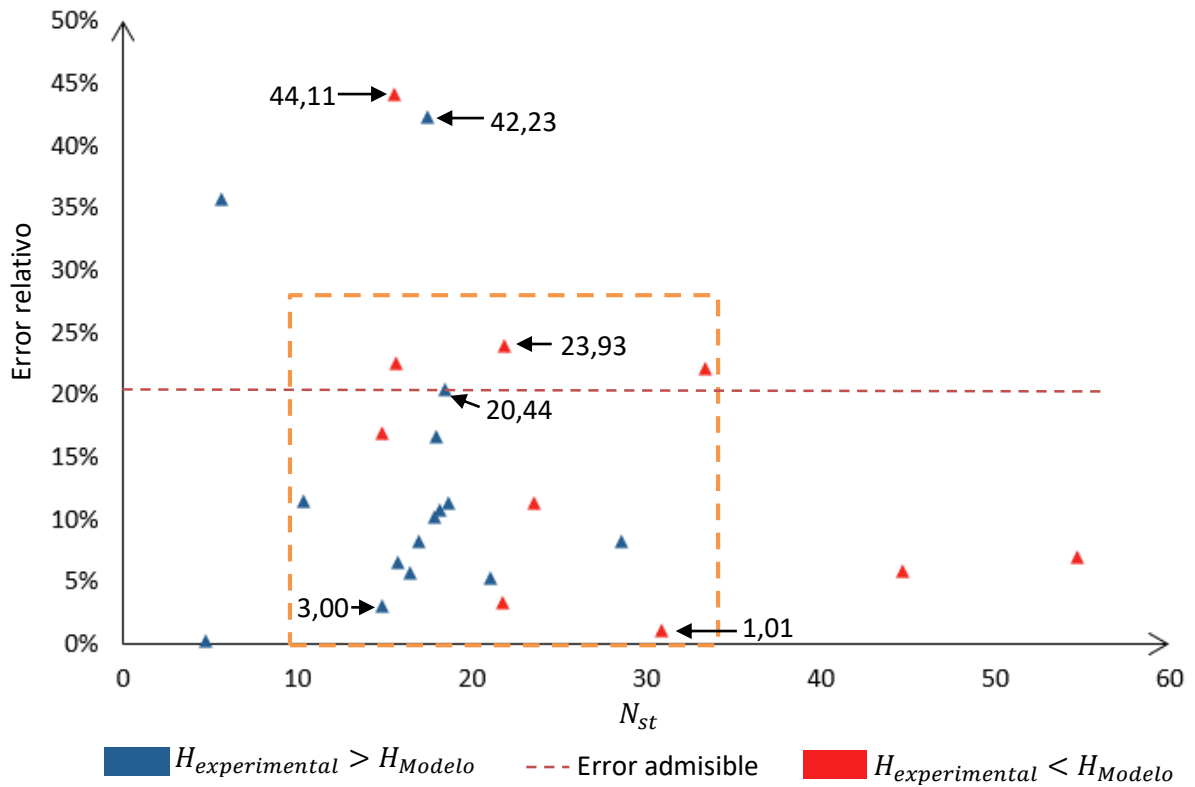
Ilustración 13. Errores relativos obtenidos al evaluar el Modelo 3.



Siguiendo el procedimiento utilizado en el análisis de los anteriores modelos, la relación del error relativo con la velocidad específica en modo turbina (N_{st}), utilizando la ecuación (1) presentada en la sección marco teórico. La Ilustración 14, presentó el comportamiento del modelo para el rango de velocidades específicas de las bombas estudiadas. En el eje de las ordenadas se representó el porcentaje de error, mientras que el eje de las abscisas representó la velocidad específica. Los datos de color azul representaron errores relativos positivos, es decir, la cabeza hidráulica teórica fue menor que la cabeza hidráulica experimental, mientras que los puntos rojos representaron errores relativos negativos, lo que significó que la cabeza teórica fue mayor a la altura experimental. Se observó que para bombas con velocidades específicas entre 10 y 34 se formó un conjunto de datos donde se encontraron 7 errores negativos y 12 positivos. En este rango, el error relativo menor fue 3% y el mayor fue 20,44% para las bombas donde la cabeza calculada fue menor a la cabeza teórica. Mientras que, para las bombas donde la cabeza calculada fue mayor a la cabeza teórica, se obtuvo

que el error mayor fue 23,93% y el menor fue 1,01%. Además, se identificaron dos datos atípicos con errores de 44,11% y 42,23%.

Ilustración 14. Errores relativos respecto a N_{st} para el Modelo 3.

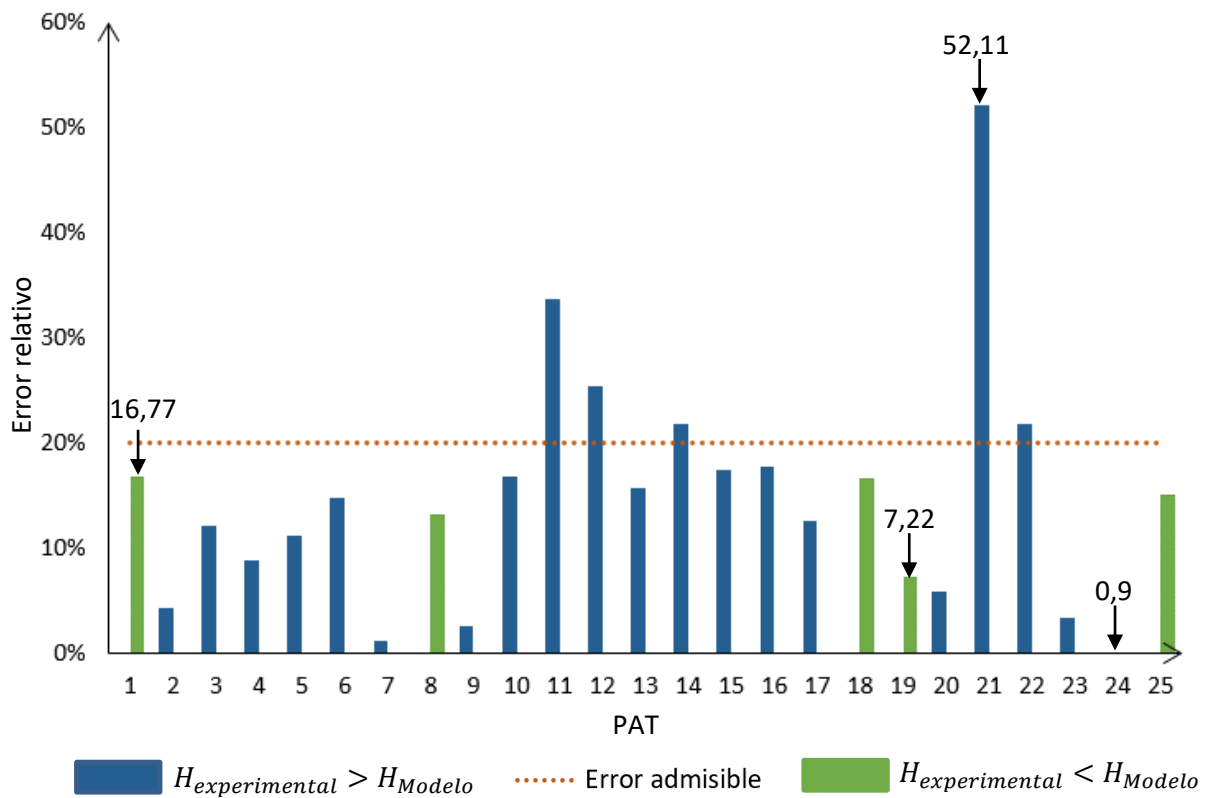


4.1.4. Resultados del modelo 4 considerando el flujo bidimensional y el ajuste mediante una constante de precisión.

Luego, se evaluó el cuarto modelo propuesto que integró el coeficiente de disminución de trabajo, se obtuvieron los resultados que se presentaron en la **Ilustración 15**, donde se mostró el error relativo calculado para las 25 PATs estudiadas. El eje vertical representó el porcentaje de error, mientras que el eje horizontal representó la bomba evaluada. Las barras azules representaron las

validaciones donde la cabeza calculada está por debajo de la cabeza hidráulica teórica, mientras que las barras de color verde representaron las validaciones por encima de la cabeza teórica. Las equis representaron el error admisible del 20% para este estudio. Se obtuvieron errores relativos positivos para 20 bombas, lo que representó el 80% del total de bombas estudiadas, también se obtuvieron 5 negativos, es decir, el 20% de las validaciones totales. Las validaciones donde la cabeza teórica fue menor a la cabeza experimental, presentaron errores entre 0,9% y 52,11%, donde 14 de estas obtuvieron errores menores al 20%. Por otro lado, el total de las validaciones con error relativo negativo se encontraron en el rango admisible del 20% donde se obtuvo un error mínimo correspondiente al 7,22% y un error máximo de 16,77%. En total, el modelo presentó un error inferior al 20% para 19 bombas, lo que representó el 76% de las bombas estudiadas.

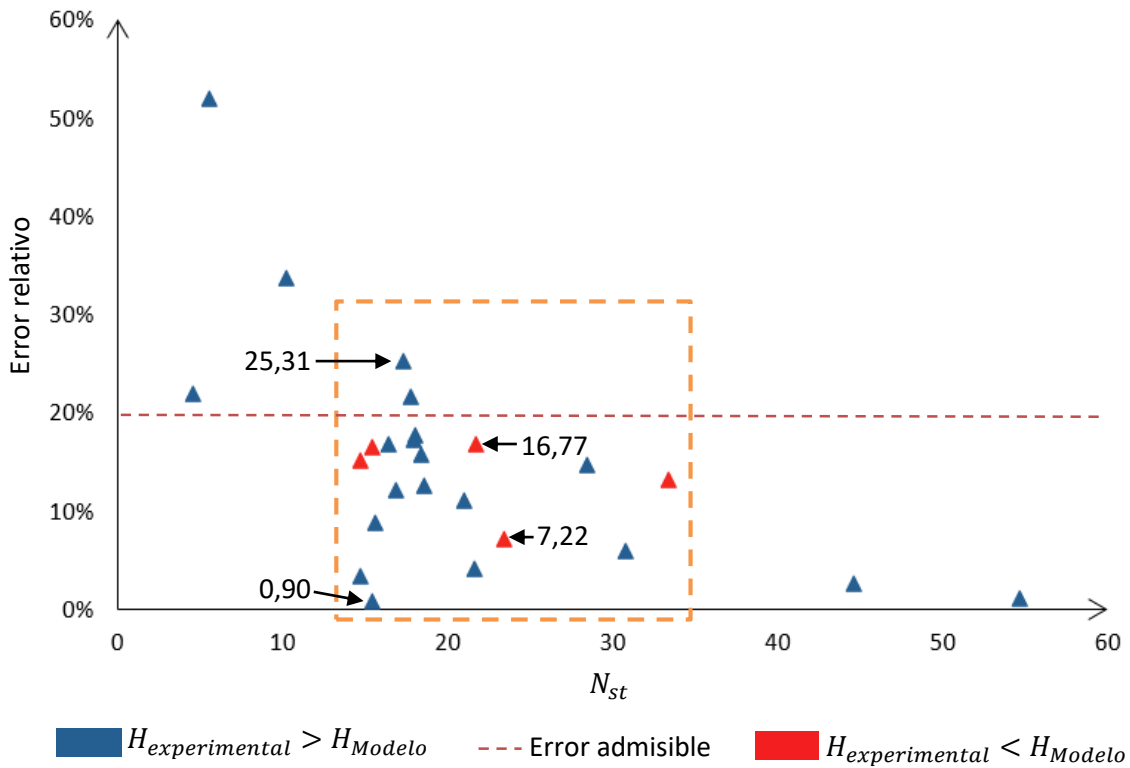
Ilustración 15. Errores relativos obtenidos del Modelo 4.



	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

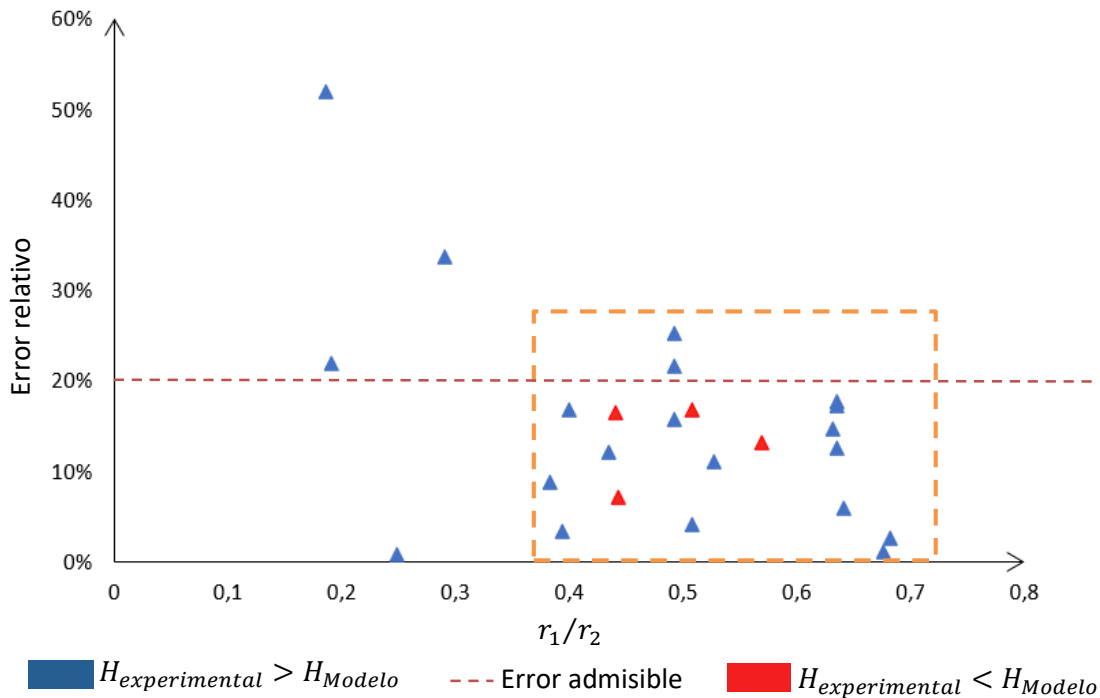
Se investigó la relación del error relativo con la velocidad específica en modo turbina (N_{st}), utilizando la ecuación (1) presentada en la sección marco teórico. La Ilustración 16, presenta el comportamiento del modelo para el rango de velocidades específicas de las bombas estudiadas. En el eje de las ordenadas se representó el porcentaje de error, mientras que el eje de las abscisas representó la velocidad específica. Los datos de color azul representaron errores relativos positivos, es decir, la cabeza hidráulica teórica fue menor que la cabeza hidráulica experimental, mientras que los puntos rojos representaron errores relativos negativos, lo que significó que la cabeza teórica fue mayor a la altura experimental. Se observó que para bombas con velocidades específicas entre 10 y 34 se formó un conjunto de datos donde se encontraron 5 errores negativos y 15 positivos. En este rango, el error relativo menor fue 0,90% y el mayor fue 25,31% para las bombas donde la cabeza calculada fue menor a la cabeza teórica. Mientras que, para las bombas donde la cabeza calculada fue mayor a la cabeza teórica, se obtuvo que el error más alto fue 16,77% y el menor fue 7,22%.

Ilustración 16. Relación de errores relativos con N_{st} para el Modelo 4.



También, se examinó el impacto de la relación de radios en los errores relativos obtenidos durante la evaluación de las bombas. Se tomó en cuenta el método de Pfeleiderer, el cual sugiere que el enfoque es más adecuado para impulsores radiales con una relación de radios cercana a 0,5 [20]. La Ilustración 17, muestra cómo los errores relativos más altos se presentaron cuando la relación de radios se alejó de 0,5. Esto indica que a medida que la desviación de esta proporción aumenta, los errores relativos entre las cabezas hidráulicas teóricas y experimentales también aumentan.

Ilustración 17. Errores relativos respecto a relación de radio interior y exterior del impulsor.



Este resultado hace necesario una evaluación exhaustiva de las características geométricas de los impulsores y la consideración de parámetros específicos de cada bomba al utilizar el modelo matemático propuesto. Al hacerlo, se puede lograr una estimación más precisa y confiable de la cabeza hidráulica en condiciones reales de operación.

4.1.5. Evaluación comparativa de los modelos y selección del mejor desempeño.

Los resultados obtenidos para cada uno de los modelos se presentaron en la Tabla 6. Con el resumen registrado en la Tabla 5, se procedió a analizar de forma puntual los criterios, con el fin de determinar el modelo con mayor desempeño.

Para el modelo 1, se observa un alto valor de $\Delta Error$, alcanzando un 92,61. Esto indica una diferencia considerable entre la cabeza hidráulica teórica y experimental. La desviación asociada es de 0.035, lo cual implica una variabilidad relativamente alta en los resultados. Sin embargo, se destaca una

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

efectividad del 80%, lo que indica que en un 80% de los casos evaluados, el modelo logra un buen desempeño en la predicción de la cabeza hidráulica.

Para el modelo 2 se obtuvo un Δ Error de 78.77, también indicando una diferencia significativa entre la cabeza hidráulica teórica y experimental. La desviación es de 0.029, mostrando una menor variabilidad que el Modelo 1. Al igual que el Modelo 1, presenta una efectividad del 80%.

Por otra parte, el modelo 3 obtuvo un Δ Error de 86.34, indicando una discrepancia considerable entre la cabeza teórica y experimental. La desviación es de 0.034, con una variabilidad similar al Modelo 1. No obstante, la efectividad disminuye a un 72%, lo que sugiere un menor desempeño en comparación con los dos modelos anteriores.

El modelo 4 se destaca por tener el menor Δ Error de la tabla, alcanzando un valor de 68.88. Esto indica una menor discrepancia entre la cabeza hidráulica teórica y experimental. La desviación asociada es de 0.026, mostrando una menor variabilidad en comparación con los otros modelos. La efectividad es del 76%, indicando un buen desempeño en la mayoría de los casos evaluados.

Tabla 6. Valores numéricos de desempeño de los modelos evaluados.

Modelo	Δ Error	σ_s	Efectividad(%)
1	92,61	0,035	80
2	78,77	0,029	80
3	86,34	0,034	72
4	68,88	0,026	76

Se observa que el Modelo 4 presenta el menor Δ Error y una menor varianza, lo cual indica una mayor precisión y consistencia en la predicción de la cabeza hidráulica. Sin embargo, es importante considerar la efectividad de cada modelo. Aunque el Modelo 4 tiene un menor Δ Error, no alcanza la efectividad más alta (80%). Por lo tanto, al seleccionar el modelo más adecuado para el análisis de la cabeza hidráulica, se debe tener en cuenta un equilibrio entre precisión y efectividad.

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

La Tabla 7, presentó la puntuación dada a cada uno de los modelos desarrollados utilizando asteriscos, donde se otorgó la mayor puntuación a los modelos que presentaron el error inferior, la varianza más baja y la mayor efectividad.

El modelo 1, obtuvo una puntuación de siete (7) asteriscos, lo que indica un desempeño moderado en términos de error, desviación estándar, efectividad y desempeño general.

El modelo 2, obtuvo una puntuación de diez (10) asteriscos, mostrando un mejor desempeño que el Modelo 1 en términos de error, desviación estándar, efectividad y desempeño general.

El modelo 3, recibió una puntuación de cinco (5) asteriscos, lo que indica un desempeño bajo en comparación con los modelos anteriores.

Finalmente, el modelo 4 obtuvo la puntuación más alta de once (11) asteriscos, lo cual indica el mejor desempeño en términos de error, desviación estándar, efectividad y desempeño general entre los modelos evaluados.

Tabla 7. Puntuación de desempeño

<i>Modelo</i>	<i>ΔError</i>	<i>σ_s</i>	<i>Efectividad</i>	<i>Desempeño</i>
1	*	**	****	*****
2	***	***	****	*****
3	**	*	**	*****
4	****	****	***	*****

En conclusión, según la puntuación asignada, se determinó que el mejor modelo es el Modelo 4, que consideró el factor de disminución de trabajo. Este modelo obtuvo la puntuación más alta de once asteriscos, lo que indica un mejor desempeño en comparación con los otros modelos en todos los criterios evaluados

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

4.1.6. Comparativa del modelo matemático propuesto con estudios previos en la literatura.

Se han llevado a cabo varios estudios teóricos para calcular la cabeza hidráulica de una bomba operada como turbina. Estos estudios han utilizado diferentes enfoques y modelos para estimar la cabeza hidráulica de la bomba en diversas condiciones de operación. Algunos de estos estudios utilizaron un enfoque analítico basado en las ecuaciones de flujo y energía para calcular la cabeza hidráulica. Otros utilizaron un enfoque numérico basado en la solución de ecuaciones diferenciales para modelar el flujo de fluido y estimar la cabeza hidráulica. También se han realizado simulaciones por computadora para modelar el comportamiento de la bomba operada como turbina. En la Tabla 8 se presentaron los resultados obtenidos en estos estudios y el error obtenido por el modelo 4, que consideró el coeficiente de disminución del trabajo y presentó el mejor desempeño respecto a los otros modelos desarrollados. Cada estudio se caracteriza por el autor, año de publicación, referencias bibliográficas, error en la cabeza hidráulica expresado en porcentaje, designación del estudio, método utilizado y las variables consideradas en cada caso.

Al analizar los estudios presentados, se puede observar una variedad de enfoques y metodologías utilizadas para estimar la cabeza hidráulica. El estudio de S. Fontanella et al. (2016) se basa en simulaciones numéricas en 3D con apoyo parcial de datos experimentales, obteniendo un bajo error del 1,03%. S. Huang et al. (2016) propone un modelo teórico basado en el modo bomba con validación experimental, mostrando un error del 4,76%. S. Barbarelli et al. (2017) desarrolla un modelo uni-dimensional para predecir curvas características sin conocer las características geométricas, con un error del 5%.

X. Tan et al. (2020) presenta una correlación basada en la velocidad específica y el diámetro específico de la bomba con validación experimental, obteniendo un error del 7,78%. D. Penagos et al. (2021) utiliza una metodología basada en el estado del arte y validación mediante simulación numérica, presentando un error del 9,95%. El presente estudio (2023) utiliza un modelo teórico basado únicamente en parámetros geométricos y considera pérdidas de flujo y trabajo, obteniendo un error del 17,7%. Por último, S. Barbarelli et al. (2016) emplea un código numérico unidimensional considerando pérdidas hidráulicas, con un error del 21,36%.

Se puede observar que los estudios presentan diferentes niveles de precisión en la estimación de la cabeza hidráulica, y esto puede deberse a las diferencias en los métodos utilizados y las variables consideradas en cada caso. Además, es importante tener en cuenta que los estudios se realizaron en diferentes años, lo que puede reflejar avances y mejoras en las técnicas empleadas.

Tabla 8. Errores máximos obtenidos en el cálculo teórico de la cabeza hidráulica de una PAT

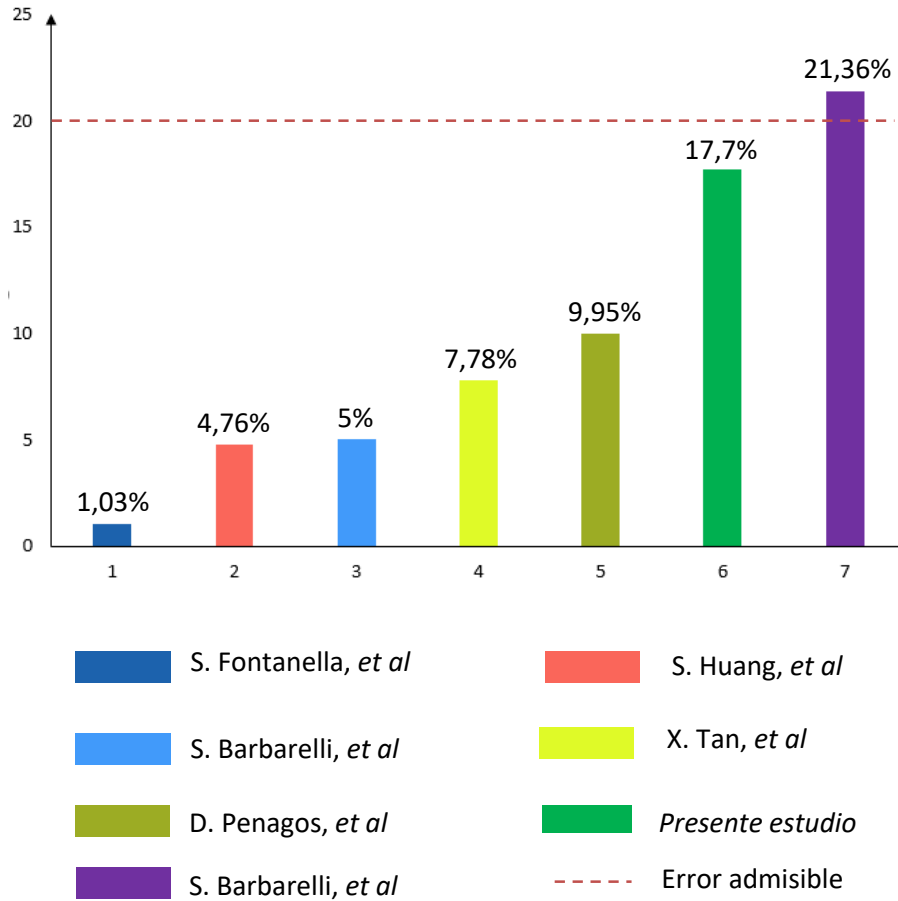
Refs.	Error H (%)	Designación	Método	Variables
[21]	1,03	1	Simulaciones numéricas en 3D con apoyo parcial de datos experimentales	D, Z, Z_g, n_r, Q_d, n_q
[22]	4,76	2	Modelo teórico basado en el modo bomba con validación experimental	$H_p, \psi_T, \psi_p, \eta_h$
[4]	5,00	3	Modelo uni-dimensional para predecir curvas características sin conocer las características geométricas.	$g, u_2, c_{u2}^*, u_1, c_{u1}^*, h_{dd}, h_{inlet}, h_{shock}, h_{dg}, h_{diff}, h_{inlet}$
[23]	7,78	4	Correlación basada en velocidad específica y diámetro específico de la bomba con validación experimental	$\omega, D_0, N_{st}, D_{st}, g$
[24]	9,95	5	Metodología basada en el estado de arte y validación por medio de simulación numérica.	N_{st}, H_p
-	17,70	6	Modelo teórico basado únicamente en parámetros geométricos	$\omega, g, Q, r_2, b_2, \beta_2, \delta, Z, k_2, e_z$

 Institución Universitaria	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

Refs.	Error H (%)	Designación	Método	Variables
			considerando perdidas de flujo y trabajo.	$H_{th}, h_{fd}, h_{dd}, h_{fv},$
[25]	21,36	7	Código numérico uni-dimensional considerando perdidas hidráulicas	$h_{fc}, h_{inlet}, h_{sr}$ $h_{lowflow}, h_{fi}, h_{dsc}$ h_{shock}, h_{drag}

A continuación, en la Ilustración 18, se presenta el error relativo de diferentes autores en el cálculo de la cabeza hidráulica de una bomba operada como turbina, así como del modelo propuesto que consideró el factor de disminución de trabajo. El eje vertical representa el error relativo en porcentaje y el eje horizontal la designación de los autores. La magnitud de cada barra indica el valor del error relativo promedio correspondiente. Se evidencia que el modelo propuesto presenta un error inferior respecto al estudio analizado de los autores S. Barbarelli, *et al* que obtuvieron un error del 21,36%.

Ilustración 18. Errores relativos obtenidos en el cálculo de la cabeza hidráulica obtenido por diferentes autores.



Existen posibles razones por las cuales los modelos no obtuvieron los mejores resultados. Es posible que los autores de los otros modelos hayan considerado variables adicionales que no fueron incluidas en este estudio, lo que pudo haber mejorado su precisión. Además, utilizaron metodologías más avanzadas y datos más completos en sus investigaciones. Por otro lado, las simplificaciones y suposiciones realizadas podrían haber afectado su desempeño. Estas diferencias resaltan la importancia de identificar las limitaciones y buscar oportunidades de mejora en futuras investigaciones.

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

Sin embargo, el presente estudio se destaca por su enfoque único al considerar exclusivamente parámetros geométricos, el coeficiente de obstrucción de flujo y el factor de disminución de trabajo en la estimación de la cabeza hidráulica. Al centrarse en los aspectos geométricos y los factores que afectan directamente el rendimiento de las bombas operadas como turbinas, este enfoque teórico ofrece una valiosa perspectiva para comprender y predecir el comportamiento hidráulico. Además, el uso de modelos teóricos simplificados puede agilizar el proceso de diseño y evaluación, brindando una alternativa eficiente y confiable a los métodos más complejos y costosos como el análisis CFD.

Los modelos teóricos son especialmente relevantes y aplicables en el contexto de bombas operadas como turbinas. En estas situaciones, donde se busca aprovechar la energía hidráulica para generar electricidad, los modelos teóricos ofrecen una solución efectiva. Al medir y considerar únicamente variables geométricas, permiten estimar de manera precisa la cabeza hidráulica requerida. Esta aproximación teórica es especialmente útil en áreas remotas o desconectadas, donde no se cuenta con acceso a la electricidad o se carece de información detallada sobre las bombas disponibles. Al utilizar modelos teóricos, se abre la posibilidad de evaluar la viabilidad de implementar bombas operadas como turbinas en estas zonas, maximizando el aprovechamiento de la energía hidráulica sin depender de análisis complejos de dinámica de fluidos computacional (CFD) o información específica de fabricantes.

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

5. CONCLUSIONES

- Se desarrollaron cuatro modelos matemáticos que dependían de las propiedades geométricas del impulsor de una bomba operada como turbina, utilizando la ecuación de Euler, para predecir la cabeza hidráulica en el punto de mayor eficiencia. Los modelos fueron analizados y comparados para determinar el más preciso y eficiente.
- Con base en una exhaustiva búsqueda de literatura especializada sobre bombas operando como turbina, se recopiló información relevante para validar el modelo matemático seleccionado. Se encontraron un total de 25 bombas, y se obtuvieron diversos parámetros geométricos asociados tanto al impulsor como a la voluta y otros componentes. Sin embargo, es importante destacar que el enfoque matemático de nuestro trabajo se centró principalmente en los parámetros geométricos del impulsor, dejando de lado otros elementos mencionados. Además, se identificaron cinco parámetros geométricos y dos parámetros de operación clave, como el caudal y la velocidad angular del eje del impulsor, que fueron considerados en el análisis.
- Se validó la cabeza hidráulica del modelo matemático seleccionado, utilizando los parámetros geométricos obtenidos de los artículos consultados. Se desarrollaron un total de cuatro modelos, cada uno con diferentes consideraciones físicas y geométricas. Entre estos modelos, se identificó el más destacado, que tomó en cuenta ocho parámetros geométricos clave y dos coeficientes relacionados con las pérdidas hidráulicas.
- Se contrastó el modelo matemático seleccionado con otros estudios desarrollados en la literatura. Se analizaron en total siete estudios, cada uno de ellos realizado por autores diferentes. Se observó que el modelo propuesto superó el desempeño en comparación con el modelo desarrollado por el autor S. Barbarelli, et al. En particular, el modelo propuesto presentó una mejora porcentual del 3,66% en términos de error relativo en la estimación de la cabeza hidráulica en bombas operadas como turbinas.

 Institución Universitaria	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

- Se resalta la importancia de considerar parámetros geométricos y coeficientes asociados a pérdidas hidráulicas en la formulación de modelos teóricos, y se demostró el potencial de implementar dichos modelos en escenarios donde no se cuenta con electricidad o acceso a interpretación de catálogos de fabricantes. El presente estudio sienta las bases para futuras investigaciones en el campo de las bombas operadas como turbinas, ofreciendo una herramienta confiable y práctica para el diseño y análisis de sistemas hidroeléctricos en zonas no interconectadas.

 Institución Universitaria	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

6. RECOMENDACIONES Y TRABAJO FUTURO.

Se puede explorar la incorporación de variables no consideradas en este estudio, como las pérdidas hidráulicas asociadas a los diferentes elementos mecánicos que componen las PAT. Esto permitiría mejorar la precisión y el rendimiento de los modelos teóricos.

También, se podría investigar y desarrollar metodologías más avanzadas y precisas para la estimación de la cabeza hidráulica. Esto podría incluir el uso de técnicas numéricas más sofisticadas o la aplicación de enfoques de optimización.

Además, para fortalecer la validez y la representatividad de los modelos, se podría ampliar el conjunto de datos utilizado en este estudio. Esto implicaría recopilar información de más bombas operadas como turbinas y abarcar una gama más amplia de condiciones de operación.

Finalmente, para validar de manera más rigurosa los modelos teóricos, se recomienda realizar pruebas experimentales específicas en bombas operadas como turbinas. Esto permitiría comparar los resultados teóricos con mediciones reales y mejorar la confianza en los modelos.

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

REFERENCIAS

- [1] Tian, P., Huang, J., Shi, W., & Zhou, L. (2019). Optimization of a centrifugal pump used as a turbine impeller by means of an orthogonal test approach. *Fluid Dynamics and Materials Processing*, 15(2), 139–151. <https://doi.org/10.32604/fdmp.2019.05216>
- [2] Miao, S. C., Yang, J. H., Shi, G. T., & Wang, T. T. (2015). Blade profile optimization of pump as turbine. *Advances in Mechanical Engineering*, 7(9), 1–9. <https://doi.org/10.1177/1687814015605748>
- [3] Orchard, B., & Klos, S. (2009). Pumps as turbines for water industry. *World Pumps*, 2009(8), 22–23. [https://doi.org/10.1016/S0262-1762\(09\)70283-4](https://doi.org/10.1016/S0262-1762(09)70283-4)
- [4] Barbarelli, S., Pisano, V., & Amelio, M. (2022). Development of a Predicting Model for Calculating the Geometry and the Characteristic Curves of Pumps Running as Turbines in Both Operating Modes. *Energies*, 15(7). <https://doi.org/10.3390/en15072669>
- [5] GPM Surplus, “Flowserve 16” Steel Semi-Open Impeller,” 2022. <https://gpmsurplus.com/product/flowserve-16-steel-semi-open-impeller/>
- [6] Indiamart, “Centrifugal Pump Impeller, For Industrial,” 2022. <https://www.indiamart.com/proddetail/centrifugal-pump-impeller-16361624512.html>
- [7] Made-In-China, “Molde Tipo Sulzer parte de la bomba hidráulica de impulsor de la bomba de agua,” 2022. https://es.made-in-china.com/co_sourcepump/product_Sulzer-Type-Casting-Hydraulic-Pump-Part-for-Water-Pump-Impeller_euhguusry.html
- [6] Rawal, S., & Kshirsagar, J. T. (2007). *Numerical Simulation on a Pump Operating as Turbine*.
- [7] Derakhshan, S., & Nourbakhsh, A. (2008). Experimental study of characteristic curves of centrifugal pumps working as turbines in different specific speeds. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 32(3), 800–807. <https://doi.org/10.1016/j.expthermflusci.2007.10.004>

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

[8] Carravetta, A., Conte, M. C., Fecarotta, O., & Ramos, H. M. (2014). Evaluation of PAT Performances by Modified Affinity Law. *Procedia Engineering*, 89, 581–587. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2014.11.481>

[9] Venturini, M., Manservigi, L., Alvisi, S., & Simani, S. (2018). Development of a physics-based model to predict the performance of pumps as turbines. *Applied Energy*, 231, 343–354. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2018.09.054>

[10] Barbarelli, S., Amelio, M., & Florio, G. (2018). Using a Statistical-Numerical Procedure for the Selection of Pumps running as Turbines to be applied in Water Pipelines: Study Cases. *Journal of Sustainable Development of Energy, Water and Environment Systems*, 6(2), 323–340. <https://doi.org/10.13044/j.sdewes.d5.0181>

[11] Wang, L., Asomani, S. N., Yuan, J., & Appiah, D. (2020). Geometrical Optimization of Pump-As-Turbine (PAT) Impellers for Enhancing Energy Efficiency with 1-D Theory. *Energies*, 13(16), 4120. <https://doi.org/10.3390/en13164120>

[12] Williams, A. A. (1996). Pumps as turbines for low cost micro hydro power. *Renewable Energy*, 9(1–4), 1227–1234. [https://doi.org/10.1016/0960-1481\(96\)88498-9](https://doi.org/10.1016/0960-1481(96)88498-9)

[13] Rossi, M., Righetti, M., & Renzi, M. (2016). Pump-as-turbine for Energy Recovery Applications: The Case Study of An Aqueduct. *Energy Procedia*, 101, 1207–1214. <https://doi.org/10.1016/j.egypro.2016.11.163>

[14] Graciano-Uribe, J., Sierra, J., & Torres-Lopez, E. (2021). Instabilities and influence of geometric parameters on the efficiency of a pump operated as a turbine for micro hydro power generation: A review. *Journal of Sustainable Development of Energy, Water and Environment Systems*, 9(4), 1–23. <https://doi.org/10.13044/j.sdewes.d8.0321>

[15] Fernández, J. F. (2021). Impeller design of a centrifugal pump and its simulation with a Finite Elements Analysis. Escuela técnica superior de ingenieros industriales y de telecomunicación universidad de Cantabria.

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

[16] Cengel, Y.A. and Cimbala, J.M. (2014) Fluid Mechanics. Fundamentals and Applications. 3rd Edition. McGraw-Hill, New York

[17] Xianghui Su, Si Huang, Guangqi Qiu, & Guowei Ou. (2014). Flow performance analysis on shutoff condition in centrifugal pump based on CFD simulation. *2014 ISFMFE - 6th International Symposium on Fluid Machinery and Fluid Engineering*, 014 (5 .)-014 (5 .). <https://doi.org/10.1049/cp.2014.1142>

[18] Neelambika. (2014). CFD ANALYSIS OF MIXED FLOW IMPELLER. *International Journal of Research in Engineering and Technology*, 03(15), 601–607. <https://doi.org/10.15623/ijret.2014.0315112>

[19]. Mataix Claudio.(1986). Mecánica de fluidos y maquinas hidráulicas. Segunda edición. Ediciones del castillo S.A.

[20] Plfeiderer Carl (1951). Bombas centrifugas y turbocompresores.

[21] Qian, Z., Wang, F., Guo, Z., & Lu, J. (2016). Performance evaluation of an axial-flow pump with adjustable guide vanes in turbine mode. *Renewable Energy*, 99, 1146–1152. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2016.08.020>

[22] Huang, S., Qiu, G., Su, X., Chen, J., & Zou, W. (2017). Performance prediction of a centrifugal pump as turbine using rotor-volute matching principle. *Renewable Energy*, 108, 64–71. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2017.02.045>

[23] Tan, X., & Engeda, A. (2016). Performance of centrifugal pumps running in reverse as turbine: Part II- systematic specific speed and specific diameter based performance prediction. *Renewable Energy*, 99, 188–197. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2016.06.052>

[24]Vásquez, D. P., Uribe, J. G., García, S. V., & del Rio, J. S. (2021). Characteristic Curve Prediction of a Commercial Centrifugal Pump Operating as a Turbine Through Numerical Simulations. *Journal of Advanced Research in Fluid Mechanics and Thermal Sciences*, 83(1), 153–169. <https://doi.org/10.37934/arfmts.83.1.153169>

	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

[25] Barbarelli, S., Amelio, M., & Florio, G. (2016). Predictive model estimating the performances of centrifugal pumps used as turbines. *Energy*, *107*, 103–121. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2016.03.122>


[26] Michael smith engineers, “Useful information on specific speed and suction specific speed,” 2020. <https://www.michael-smith-engineers.co.uk/resources/useful-info/specific-speed>

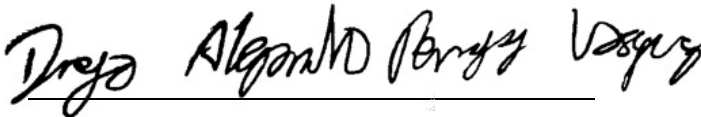
[27] Arthur Williams, *Pumps as Turbines: A users guide*. London: Technology Publications, 1995.

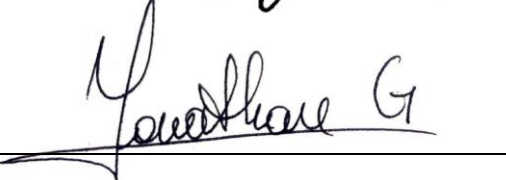
[28] Williams, A. A. (1994). The Turbine Performance of Centrifugal Pumps: A Comparison of Prediction Methods. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy*, *208*(1), 59–66. https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1994_208_009_02

[29] Saad, A. F., & Hassan, A. (n.d.). *Experimental and Computational Study of Semi-open Centrifugal Pump Performance of Centrifugal pump View project*. <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.5190.3766>

 Institución Universitaria	INFORME FINAL TRABAJO DE GRADO	Código	FDE 089
		Versión	04
		Fecha	24-02-2020

FIRMA ESTUDIANTES 

FIRMA ASESORES 



FECHA ENTREGA: 18 de Octubre del 2023