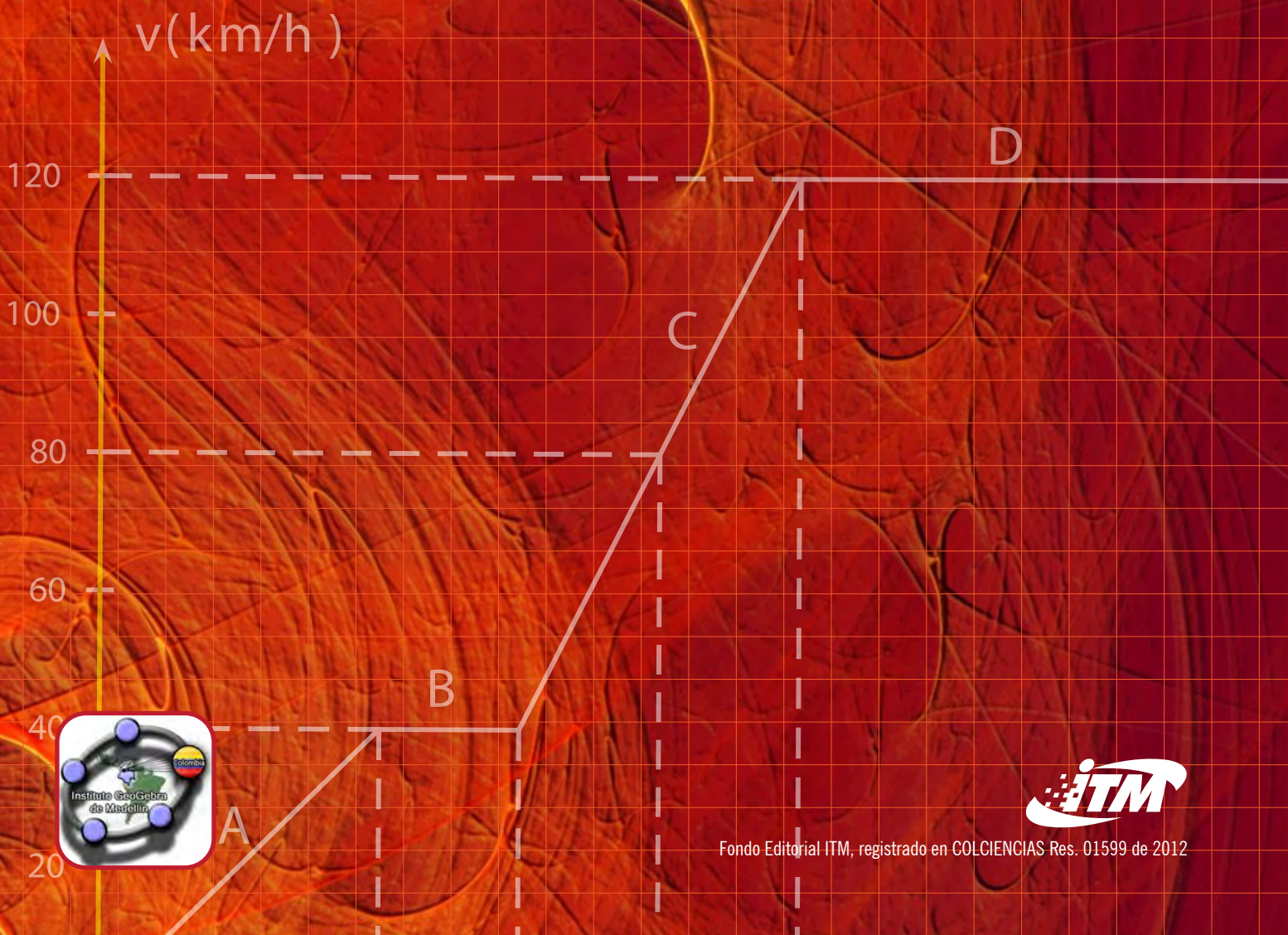


Función Lineal

cuadrática y volúmenes

Guía para docentes

Carlos Rojas • Carlos Restrepo • Diego Correa • Elkin Castrillón • Francisco Córdoba
Hernán Ortiz • Hector Herrera • Javier Álvarez • Jorge Cardeño • Jhon Jairo Mahecha
Guillermo Arango • Julio Rojas • Mercedes Arrubla



Función Lineal, cuadrática y volúmenes
Guía para docentes

Función Lineal, cuadrática y volúmenes

Guía para docentes

Carlos Alberto Rojas Hincapié, Carlos Mario Restrepo Restrepo
Diego León Correa Arango, Elkin Alberto Castrillón Jiménez
Francisco Javier Córdoba Gómez, Hernán Darío Ortiz Alzate
Hector Javier Herrera Mejía, Javier Enrique Álvarez Palacios
Jorge Cardeno Espinosa, Jhon Jairo Mahecha Bautista
Juan Guillermo Arango Arango, Julio Mauricio Rojas Mayorga
Mercedes Arrubla Carmona



Función Lineal, cuadrática y volúmenes: guía para docentes / Director e Investigador principal Jorge Cardeño Espinosa...
[et al.]-- 1a ed. -- Medellín: Fondo Editorial ITM, 2012.
160 p. -- (Colección Textos académicos)

Incluye Bibliografía
ISBN 978-958-8743-22-6

1. Matemáticas 2. Funciones (matemáticas) I. Cardeño Espinosa, Jorge, II. Restrepo Restrepo, Carlos Mario III. ADIDA. Centro de Estudios de Investigaciones Docentes. Grupo ELIME IV. Instituto Tecnológico Metropolitano. Grupo GNOMON V. MTIC (serie)

510 SCDD Ed.21
Catalogación en la publicación - Biblioteca ITM

Serie Textos Académicos
Fondo Editorial ITM

Función lineal, cuadrática y volúmenes: guía para docentes
© Carlos Alberto Rojas Hincapié, Carlos Mario Restrepo Restrepo
Diego León Correa Arango, Elkin Alberto Castrillón Jiménez
Francisco Javier Córdoba Gómez, Hernán Darío Ortiz Alzate
Hector Javier Herrera Mejía, Javier Enrique Álvarez Palacios
Jorge Cardeño Espinosa, Jhon Jairo Mahecha Bautista
Juan Guillermo Arango Arango, Julio Mauricio Rojas Mayorga
Mercedes Arrubla Carmona
© Fondo Editorial ITM

1a. edición: diciembre de 2012
ISBN: 978-958-8743-22-6
Hechos todos los depósitos legales

Rectora
LUZ MARIELA SORZA ZAPATA

Editora
SILVIA INÉS JIMÉNEZ GÓMEZ

Comité Editorial
OLGA MARÍA RODRÍGUEZ BOLUFÉ, PhD., México
JOSÉ R. GALO SÁNCHEZ, PhD., España
LILIANA SAIDON, PhD., Argentina
MONSERRAT VALLVERDÚ FERRER, PhD., España
GIANNI PEZZOTI, PhD., Italia

Comité Académico
JUAN GUILLERMO RIVERA BERRÍO, PhD., Colombia
JOSÉ R. GALO SÁNCHEZ, PhD., España

Corrección de Estilo
EUGENIA MARGARITA SÁNCHEZ CORTÉS
LILA MARÍA CORTÉS FONNEGRA

Secretaria Técnica
LINA YANET ÁLVAREZ ESTRADA

Diseño y diagramación
GIOVANNY ATEHORTÚA GUTIÉRREZ
DIEGO CEBALLOS NIETO

Diseño de carátula
LITOGRAFÍA DINÁMICA

Hecho en Medellín, Colombia

INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO
Calle 73 No. 76A 354
Tel.: 440 5289 • 4405197
<http://fondoeditorial.itm.edu.co/>
www.itm.edu.co
Medellín – Colombia

Las opiniones, originales y citas del texto son de la responsabilidad de los autores.
El Instituto salva cualquier obligación derivada del libro que se publica. Por lo tanto, ella recaerá únicamente y exclusivamente sobre los autores.

“La inteligencia consiste no solo en el conocimiento, sino también en la destreza de aplicar los conocimientos en la práctica”

Aristoteles (Grecia. 384 a.C-322 a.C)



“Nunca consideres el estudio como una obligación, sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber”

Albert Einstein (1879-1955)



“Por que esta magna tecnologia cientca, que ahorra trabajo y nos hace la vida mas facil, nos aporta tan poca felicidad? La repuesta es esta, simplemente, porque aun no hemos aprendido a usarla con tino”

Albert Einstein (1879-1955)



“Solo hay un bien: El conocimiento. Solo hay un mal: La ignorancia”

Socrates (470 a.C-399 a.C)

Contenido

Estructura didáctica	7
¿Cómo orientarse en esta unidad de aprendizaje de este libro?	7
1 Función lineal	16
1.1 Reseña histórica: René Descartes (1596-1650)	17
1.2 ¿Qué es una función?	20
1.3 Funciones lineales	24
1.3.1 Función afín	34
1.3.2 Determinación de una función afín a partir de una tabla . . .	34
1.4 Pendiente de una recta en forma analítica	36
2 Sistemas de ecuaciones lineales	45
2.1 Reseña histórica	45
2.2 Ecuación general de la recta	49
2.3 ¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales?	49
2.4 Modelos de solución	50
2.5 ¿Cómo se resuelve un sistema de ecuaciones lineales?	54
2.5.1 Método de solución gráfico	54
2.6 Métodos de solución algebraicos	59
2.6.1 Método de eliminación	59
2.6.2 Método de igualación	60
2.6.3 Método de sustitución	61
3 Ejercicios y aplicaciones de la función lineal	64
3.1 Reseña histórica: el concepto de variable y algunos signos	64
3.2 Aplicaciones de la función lineal	65
4 Función cuadrática	79
4.1 Historia	82
4.2 Definición de la función cuadrática y su estructura	83
4.3 Representación de una función cuadrática	84

4.3.1	La geometría de la parábola como representación de una función cuadrática	84
4.3.2	Tabla de datos y gráfica de puntos en el plano cartesiano para visualizar comportamiento o tendencia	86
4.4	Representación cartesiana y elementos de la parábola	88
4.5	Ejercicios y problemas de aplicación	91
5	Ecuación cuadrática	95
5.1	Introducción	96
5.2	Definición de la ecuación cuadrática y su estructura	96
5.3	Métodos para resolver ecuaciones cuadráticas	98
6	Volúmenes	113
6.1	Reseña histórica	114
6.2	Noción de volumen	115
6.3	Métodos de medición del volumen en cuerpos no regulares	115
6.3.1	Método que hace uso del principio de Arquímedes	115
6.3.2	Método que hace uso del Principio de Cavalieri	116
6.3.3	Método que hace uso de fórmulas algebraicas	118
6.4	Unidades de volumen	118
6.4.1	Unidades de volumen sólido	118
6.4.2	Unidades de volumen líquido	120
6.4.3	Medidas usadas en la cocina	121
6.4.4	Otras medidas tradicionales	121
6.5	Volumen de los principales cuerpos geométricos	122
6.5.1	Clasificación de de los cuerpos geométricos	123
6.5.1.1	Cuerpos poliedros	123
6.5.1.2	Cuerpos redondos	123
6.5.2	Volumen de un prisma recto y de un cilindro recto	123
6.5.3	Volumen del cubo	124
6.5.4	Volumen de una pirámide recta y conos rectos	129
6.5.5	El volumen de un cono recto	130
6.6	Volumen de la esfera	136
	Bibliografía	146

Estructura didáctica

¿Cómo orientarse en cada unidad de aprendizaje de este libro?

El presente texto se encuentra dividido en tres tópicos: Función Lineal, Función Cuadrática y Volúmenes, con base en estos se desarrolla toda la temática propuesta en forma conceptual o teórica mediante exposición o recepción en los grupos de control, es decir, que el presente referente teórico será utilizado por los docentes de Matemáticas a cargo de la enseñanza en este grado, por cuanto los grupos, en este caso se corresponden con aquellos que no son intervenidos con las TIC, sino con el presente texto. Por lo tanto, es una guía didáctica y teórica para los docentes y para el caso de estudiantes que estén interesados en profundizar dado su alto nivel cognoscitivo y de aprendizaje de las Matemáticas. Al igual que se constituye en una fuente de información y pauta para la construcción o búsqueda de Objetos Virtuales de Aprendizaje (OVA) mediante el uso del programa Descartes y las respectivas clases de tipo interactivo, que se aplicaron históricamente a los grupos de experimentación, es decir, aquellos donde la enseñanza de estos tópicos está mediada por el uso de las TIC.

De esta manera y partiendo del contenido propuesto en el texto, se logró desarrollar y proponer a la comunidad docente del área de Matemáticas el CD: “Objetos Virtuales de Aprendizaje para la Enseñanza de la Función Lineal, Cuadrática y Volúmenes”, el cual pretende fortalecer la enseñanza de esta ciencia de forma interactiva.

Se eligieron estos tres tópicos porque se corresponden con los definidos en el ámbito nacional en los estándares curriculares de Matemáticas del MEN, para grado noveno, buscando con ello establecer un único referente teórico a evaluar desde los diferentes métodos de enseñanza propuestos.

El texto tiene la siguiente estructura didáctica, la cual busca aproximarse al estudiante y al deseo de éste por la comprensión de los conceptos fundamentales de la Matemática de grado noveno de Educación Básica y en particular de la Geometría, pues bien se sabe que ésta es un punto de partida para la comprensión de conceptos más complejos que se enseñan en el Álgebra, la Trigonometría, el Cálculo Diferencial, el Cálculo Integral, entre otros. Por ello, se propone a continuación las competencias, logros, indicadores, conocimientos previos, estándares, estrategias, ayudas, retos y problemas que los docentes deben promover y desarrollar en sus estudiantes al inicio de cada capítulo del presente texto.

Títulos:

Función lineal
Función cuadrática
Volúmenes

Logros

Son los cambios, modificación de actitudes, de comportamientos, de conductas o de evolución intelectual que se observan en cualquier momento del proceso educativo (Angarita Serrano, Tulio Manuel. 1996).

Los logros hacen énfasis sobre los procesos, estructuras, relaciones estudiante - docente, aprendizajes, reflexión constante y visión integral, entre otros. Mientras que los objetivos nos hablan de conductas terminales, obtención de resultados, relaciones profesor-alumno, enseñanza y acciones predecibles.

Es así como los logros apuntan hacia una concepción pedagógica de educación por procesos y de situaciones específicas de aprendizaje. Se entiende la evaluación de los logros del estudiante como el desarrollo de sus capacidades o aptitudes, que guardan una estrecha relación con el proceso docente educativo, vivido en las aulas o fuera de ellas.

Indicador de logro (IDL)

Un IDL puede estar referido a un comportamiento observable, si en la acción práctica el estudiante construye, deconstruye o reconstruye el conocimiento, en este caso de las Matemáticas.

Un IDL se constituye en señales o manifestaciones del sujeto, que nos llevan a hipotetizar que el sujeto comprende el contenido matemático que se le está enseñando.

Competencias

Lo que se sabe técnicamente y se aplica para la vida.

Las Competencias están estrechamente relacionadas con las aptitudes o capacidades. En el contexto educativo, el término *Competencia* se extiende a actividades para enfatizar el desarrollo de las potencialidades del sujeto, a partir de lo que aprende en la Escuela y que va más allá de la memorización (aprendizaje

significativo).

Las competencias tratan de centrar la educación en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado funcional de dicho proceso, esas competencias son: pensar y razonar, argumentar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas, representar y utilizar el lenguaje simbólico, el lenguaje formal, el lenguaje técnico y las operaciones.

Competencias cognitivas de carácter general son: Pensar y Razonar, Argumentar y Comunicar.

Competencias matemáticas específicas son: las relacionadas con algún tipo de análisis conceptual, modelar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar el lenguaje simbólico, formal, técnico y las operaciones, utilizar estrategias, medios o instrumentos de apoyo (por ejemplo como las TIC, entre otros).

Conocimientos previos

Hace referencia a lo que debe saber el estudiante antes de iniciar cada capítulo, es decir los presaberes que se requieren para una mayor comprensión de un tópico determinado de la ciencia o disciplina.

El estado inicial de los estudiantes incide en su proceso de enseñanza-aprendizaje.

Estándares (contenido o mentefactos)

Criterios que especifican lo que todos los estudiantes deben saber y ser capaces de hacer en cada área y en cada grado.

Formulaciones claras, universales, precisas y breves que describan conocimientos y habilidades que los estudiantes deban lograr.

Reseña histórica

Se trata de retomar elementos de tipo histórico relacionados con el tópico por tratar y que busquen dar respuestas al origen de un determinado concepto de las Matemáticas.

Ejemplo: La Geometría Analítica y los aportes de René Descartes.



Estrategias

Son las definiciones o conceptos que se tratan en cada unidad. En otras palabras, el contenido básico por desarrollar.



Ayuda

Hace referencia a los ejercicios resueltos, es decir, a los ejemplos.



Reto

Son los ejercicios que se plantean en los tópicos función lineal, función cuadrática y volúmenes.



Situación problematizadora o problema

Se trata de buscar que los estudiantes no tengan una respuesta directa, sin el conocimiento del contenido propuesto.

Formular y resolver problemas insertos en el contexto socio-cultural, en este caso, Medellín-Duitama y relacionar los contenidos y estructuras matemáticas (puede entenderse como un sistema de conceptos coherentes enlazados y en evolución en ésta ciencia), con la vida de los estudiantes.

La situación problematizadora es una vía fundamental para la conceptualización.

Jorge Cardeño Espinosa
Líder de la Investigación. ITM

Introducción

Es evidente que la educación colombiana posee muchos problemas que dificultan una mejor calidad de vida a sus habitantes, por lo tanto es una necesidad prioritaria el diseño de propuestas alternativas, que permitan mejorar el nivel de logro cognitivo, que en el caso particular de las Matemáticas se ve afectado por diversos factores asociados, entre los que se podrían citar desde los inherentes a las características personales de los estudiantes, el entorno socio-cultural, de carácter institucional y hasta la misma política educativa del Estado.

De manera que, no es tarea fácil intentar salir de esta condición del subdesarrollo, sin una clara voluntad no solo de quienes están a cargo de la enseñanza, los que la administran, sino también quienes aprenden. En este sentido, la institución universitaria ITM, sus grupos de investigación internos y en convenio con ELIME. CEID-ADIDA, asumen la tarea de proponer alternativas de intervención pedagógica en las aulas de clase que favorezcan el aprendizaje, y para aportar a la transformación de esta realidad. Para nadie es un secreto el lugar que nuestro país ocupa en pruebas nacionales e internacionales en esta importante ciencia, por ello en el presente texto se busca incidir en el mejoramiento de la calidad de la educación, además de aportar como institución universitaria, en forma social y concreta en el sector público, que es precisamente donde se encuentran los grandes desafíos y necesidades de una formación académica y científica.

Es innegable también que la sociedad actual vive en un contacto permanente con las nuevas Tecnologías de Información y Comunicación, TIC, impactando a toda la sociedad, y de la cual no se salva la Escuela y quienes habitan en ella, por lo tanto, es importante vincular la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas con la computación y con mediadores virtuales y objetos de aprendizaje interactivos, que hacen de la enseñanza un proceso dinámico, además de adoptar comportamientos humanos que sean protectores del medio ambiente, y que a su vez favorezcan un mayor logro cognitivo.

Uno de estos factores institucionales asociados precisamente al logro cognitivo de nuestros estudiantes tiene que ver con la infraestructura, en lo que se refiere a los medios de los que dispone la Escuela para atender el proceso de enseñanza-aprendizaje. Al respecto cabe señalar el último Informe Global de la Tecnología 2010-2011 (*Global Information Technology. Word Economic Forum*)¹, donde se destaca el papel clave de las TIC como motor de una forma más económica, ambien-

¹El Foro Económico Mundial ha publicado: The Global Information Technology Report 2010-2011. El informe analiza el nivel de preparación que tienen los países frente a las TIC.

tal y socialmente sostenible del mundo. Suecia y Singapur continúan encabezando el ranking de este informe, lo que confirma el liderazgo de los países nórdicos y los países asiáticos en la adopción e implementación de los avances de las TIC para un mayor crecimiento y desarrollo. Esta es la apuesta también de la red académica y de investigación GNOMON-ELIME-MTIC y su aporte a la Educación Básica Secundaria, desde el ITM.

Jorge Cardeño Espinosa
Líder de la Investigación. ITM

Presentación

Esta Unidad Didáctica diseñada por los investigadores de los grupos GNOMON, ELIME y MTIC, se constituye en una estrategia (modelo) que permite desarrollar un proyecto de investigación, cuyo propósito es obtener respuestas a algunos interrogantes en torno al uso de las TIC en los procesos de enseñanza-aprendizaje, especialmente en las Matemáticas. Los interrogantes emergen desde las dificultades presentes en las actividades representacionales de los docentes y la forma como los estudiantes perciben y se apropian de los objetos de conocimiento.

Los tres tópicos elegidos para ello son un acierto en el contexto de los interrogantes más comunes. Representar un fenómeno de la naturaleza como la trayectoria de un objeto que se lanza con un grado de inclinación o simplemente se suelta desde la cúspide de un edificio, no es un problema para el estudiante, desde su experiencia previa. Representar matemáticamente estos fenómenos presenta problemas que se evidencian en los niveles de percepción de nuestros estudiantes. Por otra parte, la percepción de volúmenes por medio de representaciones en el plano es de un nivel bajo, que se ha hecho manifiesto en los resultados obtenidos en pruebas nacionales (SABER-PRO) e internacionales (PISA).

Existen algunas experiencias que permiten verificar una mejor percepción y comprensión de las Matemáticas, utilizando las TIC. Galo y Cañas (2006) y Galo (2008) presentan una experiencia desarrollada durante tres cursos escolares (2005 a 2008) con grupos de estudiantes de segundo de ESO en un trabajo continuo y diario con TIC. Uno de los objetivos de la experiencia era efectuar un análisis cualitativo y cuantitativo sobre el aprendizaje de las Matemáticas con TIC. Durante el proceso, denominado “Experimentación Descartes en Andalucía” (EDA), se impartieron contenidos de aritmética, geometría, álgebra y análisis con recursos y estrategias TIC.² Luego de la sistematización y análisis de los resultados obtenidos, los investigadores llegan a conclusiones como:

Atendiendo a la nota de evaluación global se observa que los alumnos EDA obtienen mejores resultados, con diferencias que son estadísticamente sig-

²Galo advierte que no se trata de cambiar el rol del profesor por un simple programador de contenidos: «el profesor no cambia su papel convirtiéndose en un programador, sino que ejerce labores de búsqueda, selección, ordenación y planificación del uso de objetos de aprendizaje, retoca levemente, pero no se constituye en desarrollador de nuevos recursos. Mantiene un rol análogo al clásico en la clase tradicional: usa un libro, modifica o adapta el contenido, prepara actividades y recursos adicionales, pero no se configura como escritor» (Galo, 2008, p.2). El cambio significativo se da en el papel del alumno, en tanto que pasa de ser un actor pasivo, a un actor activo que construye su propio aprendizaje.

nificativas. En especial, se ha comprobado, que, comparativamente no solo mejoran los alumnos cuyos resultados académicos anteriores han sido buenos o aceptables, sino que esta mejora significativa se ha alcanzado en aquellos que parten con un historial de mayores dificultades académicas, alumnos que se encuadran en el denominado fracaso escolar. Este mejoramiento cuantitativo puede fundamentarse cualitativamente en el cambio actitudinal observado en esos alumnos que se introducen en un nuevo rol, motivados por la introducción de una nueva metodología y por el tipo de recursos interactivos usados (Galo, 2008, p.4).

Por otra parte, el alumnado en general manifiesta el deseo de continuar su aprendizaje en este entorno, observándose una importante atracción por el ordenador: «Este resultado, que podría ser esperado a priori, no tendría porqué producirse a posteriori si los recursos no hubieran mantenido suficientemente el interés de unos alumnos-usuarios tan críticos y tan expertos en entornos gráficos interactivos»(Galo, 2008, p.4). Esta atracción y los resultados obtenidos son el reflejo de la naturaleza propia de nuestras generaciones contemporáneas.

Sobre los problemas asociados a la visualización espacial se han abordado varios estudios experimentales de especial relevancia para nuestro caso (Borst y Kosslyn, 2008; Shepard, et al., 2006; Pylyshyn y Annan, 2006; Kosslyn, 1975; Wexler, et al., 1998). Los primeros estudios, por la falta de recursos computacionales, emplearon representaciones 3D en el plano; no obstante, actualmente, las posibilidades que brindan los ordenadores se han impuesto sobre las representaciones planares. Frente a su uso, para el desarrollo de test de visualización espacial, una de las primeras conclusiones se centra en el entorno de desarrollo, en tanto que resulta agradable para los estudiantes evaluados. Eisenberg (1999), por ejemplo, examina los diseños de esculturas en papel (hypergami y javagami) diseñados por niños a partir de la comparación del mundo real de imágenes creadas por un programa de ordenador, evidenciando una metodología agradable y divertida para adquirir destrezas en visualización espacial y conceptos matemáticos. El surgimiento de los procesadores geométricos como el Cabri (Güven y Kosa, 2008) y el proyecto Descartes posibilita un cambio representacional radical (ver figura 1).

Este cambio representacional y su impacto en la percepción y apropiación de los objetos de conocimiento por parte de los estudiantes es el objetivo central del proyecto de investigación. Pese a los estudios anteriormente referenciados, no existe en nuestro país un referente que permita concluir acerca de la incidencia de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Aplicar, entonces, esta unidad didáctica será fundamental para la toma de decisiones sobre el desarrollo e implementación de objetos de aprendizaje interactivos en los diferentes



Función Lineal, cuadrática y volúmenes - Guía para docentes

Diciembre de 2012

Fuente tipográfica: Garamond para texto corrido,
en 11 puntos, títulos 15 puntos.

«En la perspectiva cósmica cada uno de nosotros es precioso y único. Por eso, aunque alguien estuviese en desacuerdo contigo, déjalo vivir, pues no encontrarás a nadie parecido en cien millones de galaxias»

*Carl Sagan
(Nueva York, 1934-Seattle, EE UU, 1996)*

Con el ánimo de fortalecer el trabajo de la Red académica y de investigación educativa ELIME-GNOMON-MTIC, el primero con su línea de Educación Matemática, Desarrollo Cognitivo y Didáctica, el segundo con Matemáticas, Ciencias y Nuevas Tecnologías, y el tercero Matemáticas y TIC, registrados en la actualidad en COLCIENCIAS, se edita el presente texto como instrumento de la investigación: Estudio Comparativo del Impacto en el Rendimiento Académico de los estudiantes Medellín-Duitama, mediante el uso de las TIC, como estrategia mediadora en el proceso de aprendizaje, con el propósito de aportar a los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas del Nivel Básico del sistema educativo colombiano y de otros contextos globales.

Se busca así dar continuidad a la labor de los grupos de investigación del ITM y las redes académicas reconocidas oficialmente, como es el caso de la red ELIME-GNOMON. El primero adscrito al CEID-ADIDA y el segundo, a la Institución Universitaria INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO. Red reconocida y creada desde el 14 de agosto de 2008.

La idea es generar nuevos retos a los docentes de Educación Básica con respecto a su proceso docente educativo, su rol social y académico. Por ello, el presente texto es un referente teórico que intenta servir de instrumento para la enseñanza de las Matemáticas en tres tópicos fundamentales: Función Lineal, Cuadrática, y Volúmenes, por ser conocimientos para el afianzamiento de conceptos de mayor complejidad de los niveles medio y superior.

