



JOSÉ BENJAMÍN GALLEGO [Comp.]

Aplicaciones matemáticas en la ingeniería



APLICACIONES MATEMÁTICAS EN LA INGENIERÍA

JOSÉ BENJAMÍN GALLEGO ALZATE

[COMP.]





INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO
Institución Universitaria

APLICACIONES MATEMÁTICAS EN LA INGENIERÍA

© José Benjamín Gallego Alzate

© Instituto Tecnológico Metropolitano

1a. Edición: noviembre de 2009

ISBN: 978-958-8351-69-8

Dirección editorial
JAIRO OSORIO GÓMEZ

Corrección de textos
Lucía Inés Valencia

Diagramación y montaje
L. Vieco e Hijos Ltda.

Impreso y hecho en Medellín, Colombia

*Las opiniones, originalidad y citas del texto son responsabilidad del autor.
El Instituto salva cualquier obligación derivada del libro que se publica. Por lo
tanto, ella recaerá única y exclusivamente en el autor.*

Instituto Tecnológico Metropolitano
Calle 73 No. 76A 354
Tel.: (574) 440 51 00
Fax: 440 51 01
www.itm.edu.co
Medellín - Colombia

CONTENIDO

PRESENTACIÓN.....	17
CAPÍTULO I: APLICACIONES DE LA METODOLOGÍA DE DISEÑO DE EXPERIMENTOS EN MATERIALES COMPUESTOS.....	19
<i>Salvador Naya Fernández</i>	
1.1 Introducción.....	19
1.2 Conceptos básicos del diseño de experimentos.....	20
1.2.1 Diseños experimentales con un factor.....	22
1.2.2 Modelo del ANOVA con un factor.....	23
1.3 Aplicación del anova al estudio de material compuesto.....	24
1.3.1 Aplicación del modelo ANOVA a 3 tipos de resina epoxi.....	24
1.3.2 Aplicación del modelo ANOVA a nanoarcillas.....	28
1.4 Diseños factoriales.....	31
1.4.1 Diseños factoriales completos.....	32
1.4.2 Aplicación a la fiabilidad de un material de fibra de carbono.....	33
1.4.3 Diseño factorial fraccional.....	41
1.4.4 Aplicación de un diseño factorial fraccional.....	42
1.5 Metodología de superficies de respuesta.....	48
1.5.1 Aplicación de la metodología de superficie de respuesta.....	48
CAPÍTULO II: USO DE LA PROGRAMACIÓN DINÁMICA EN OPERACIONES DE EMBALSES.....	53
<i>Hernando Manuel Quintana Ávila</i>	
2.1 Introducción.....	53
2.2 Notación y formulación.....	55
2.3 Algoritmo general de programación dinámica en operación de embalses.....	60
2.3.1 La programación dinámica discreta.....	65

2.3.1.1	Ejemplo de requerimiento de agua usando programación dinámica discreta	70
2.3.2	La programación dinámica continua.....	77
2.3.2.1	Ejemplo de requerimiento de agua utilizando programación dinámica continua	78
CAPÍTULO III: APLICACIONES DEL CRITERIO DE LA PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADAS UTILIZANDO MATLAB		85
<i>Fray Huber Campo S.</i>		
<i>José Benjamín Gallego Alzate</i>		
3.1	Introducción	85
3.2	Conceptos básicos de MATLAB	86
3.2.1	El entorno de trabajo del MATLAB.....	87
3.2.1.1	Path browser: establecer el camino de búsqueda (search path)	87
3.2.1.2	Ficheros matlabrc.m, startup.m y finish.m	90
3.2.1.3	Editor& debugger: editor de ficheros y depurador de errores	91
3.2.1.4	Workspace browser: el espacio de trabajo de MATLAB	92
3.2.1.5	Control de los formatos de salida y de otras opciones de MATLAB	92
3.2.2	Tipos de datos	94
3.2.2.1	Números reales de doble precisión	94
3.2.3	Variables y expresiones matriciales	95
3.2.4	Operadores relacionales.....	96
3.2.5	Operadores lógicos.....	97
3.3	Aspectos teóricos fundamentales.....	98
3.3.1	Continuidad de una función	98
3.3.1.1	Definición	100
3.3.1.2	Observaciones.....	100
3.3.1.3	Continuidad en un intervalo.....	101
3.3.1.4	Máximos y mínimos de funciones continuas.....	101

3.3.2	Funciones crecientes y decrecientes	102
3.3.2.1	Criterio de la primera derivada	102
3.3.2.2	Criterio de la primera derivada para extremos relativos	103
3.3.2.3	Procedimiento	104
3.3.3	Concavidad y el criterio de la segunda derivada	104
3.3.3.1	Definición de concavidad	104
3.3.3.2	Criterio de concavidad	105
3.3.3.3	Puntos de inflexión y número de inflexión	106
3.3.3.4	Criterio de la segunda derivada	106
3.3.4	Asíntotas	106
3.3.4.1	Asíntotas verticales (paralelas al eje OY)	107
3.3.4.2	Asíntotas horizontales (paralelas al eje OX)	107
3.3.4.3	Asíntotas oblicuas (inclinadas)	107
3.3.4.4	Observaciones	107
3.3.5	Estudio analítico y representación gráfica de funciones	107
3.4	Ejercicios de aplicación: Matlab y matemática simbólica	108
3.4.1	Gráfica de $f(X) = X^3 - 3X^2 - 9X + 2$	108
3.4.1.1	En el entorno de MATLAB	108
3.4.1.2	Obtención de los extremos relativos	109
3.4.1.3	Obtención de los números críticos	110
3.4.1.4	Tabla de valores de x y las pendientes respectivas	110
3.4.2	Asíntotas, máximos, mínimos y puntos de inflexión de una función simple	111
3.4.2.1	La función de este ejemplo es $f(x) = \frac{3x^2 + 6x - 1}{x^2 + x - 3}$	111
3.4.2.2	La función de este ejemplo es $f(X) = \text{sen}(X)^{e-0.4x}$	118
3.4.2.3	La función de este ejemplo es $f(x) = \frac{x^3}{(x^2 - 1)}$	120
3.5	Ejercicio de aplicación a la ingeniería (meteorología)	126

CAPÍTULO IV: MODELO DE LA TELARAÑA	131
<i>John Alejandro Cardona Quintero</i>	
<i>Walter Richars Muñoz Valencia</i>	
<i>Yudy Elena Giraldo</i>	
4.1 Introducción	131
4.2 El modelo de la telaraña.....	132
4.3 Caso de estudio	139
4.4 Caso numérico	144
4.5 Ejemplo con otro producto agrícola	146
CAPÍTULO V: PROLEGÓMENOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA ECONÓMICA	149
<i>José Benjamín Gallego Alzate</i>	
<i>Fray Huber Campo Sepúlveda</i>	
5.1 Introducción	149
5.2 Progresión aritmética y geométrica	150
5.2.1 Progresión aritmética	150
5.2.2 Progresión geométrica	153
5.2.3 Aplicación: progresión aritmética e interés simple.....	157
5.2.4 Progresión geométrica e interés compuesto.....	161
5.2.5 Aplicación en las series uniformes o anualidades.....	165
5.2.6 Aplicación en los gradientes aritméticos	168
5.2.7 Aplicación en los gradientes geométricos.....	173
5.3 La regla L'Hôpital	175
5.4 Interpolación lineal	177
5.4.1 Semejanza de triángulos	177
5.4.2 Aplicación de la interpolación	180
5.4.3 Aplicación en la ingeniería económica.....	181
BIBLIOGRAFÍA	185

LISTA DE TABLAS

TABLA 1.1	Prueba de tracción.....	25
TABLA 1.2	Análisis ANOVA	26
TABLA 1.3	Medias para resistencia según endurecedor con intervalos LSD al 95%	26
TABLA 1.4	Medida de permeabilidad de las muestras	29
TABLA 1.5	Análisis de resultados ANOVA	29
TABLA 1.6	Contraste múltiple de rango para permeabilidad según tipo	30
TABLA 1.7	Fatiga material compuesto de resina epoxi-carbono.....	34
TABLA 1.8	Matriz del experimento tipo 2^3	34
TABLA 1.9	Matriz de signos para cálculo de los efectos.....	38
TABLA 1.10	Efectos estimados para compresiones.....	38
TABLA 1.11	Análisis de la varianza para compresiones	40
TABLA 1.12	Respuesta optimizada.....	40
TABLA 1.13	Intervalos de estudio de diseño experimental con cinco factores a dos niveles	43
TABLA 1.14	Matriz del diseño experimento tipo 2^5	44
TABLA 1.15	Matriz experimento fraccional tipo 2^{5-1}	46
TABLA 1.16	Análisis de funcionalización	49
TABLA 1.17	Matriz del diseño.....	49
TABLA 2.1	Cálculo de la PD discreta.....	70
TABLA 2.2	Pronósticos de las aportaciones durante los próximos 3 meses.....	70

TABLA 2.3	Cálculos correspondientes a la etapa 3	73
TABLA 2.4	Cálculos correspondientes a la etapa 2	75
TABLA 2.5	Cálculos correspondientes a la primera etapa	76
TABLA 3.1	Comando »Whos.....	92
TABLA 3.2	Comandos de MATLAB	93
TABLA 3.3	Operadores relacionales de MATLAB	96
TABLA 3.4	Operadores lógicos de MATLAB.....	97
TABLA 3.5	Valores.....	110
TABLA 3.6	Programa para la aplicación del cálculo en la ingeniería	129
TABLA 4.1	Estadísticas de la producción de café tipo arábigo suave	139
TABLA 4.2	Serie precios del pimentón (\$/Kg)	146
TABLA 5.1	Series aritmética en función del primer término.....	152
TABLA 5.2	Series geométricas en función del primer término	155
TABLA 5.3	Resumen de fórmulas.....	157
TABLA 5.4	Evolución de la deuda bajo interés simple.....	159
TABLA 5.5	Generalización evolución de la deuda bajo interés simple	160
TABLA 5.6	Evolución de la deuda bajo interés compuesto	163
TABLA 5.7	Generalización evolución de la deuda bajo interés compuesto	164
TABLA 5.8	Ingresos por venta.....	169

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1	Comparación de la resistencia con respecto al tipo de endurecedor empleado mediante intervalos de confianza.....	27
FIGURA 1.2	Comparación de la resistencia con respecto al tipo de endurecedor empleado mediante un gráfico de cajas	27
FIGURA 1.3	Comparación de la resistencia con respecto al tipo de endurecedor empleado mediante la media de cada nivel del factor	28
FIGURA 1.4	Gráfico de caja y bigotes para la permeabilidad con respecto al porcentaje de nano (Tipo)	30
FIGURA 1.5	Intervalos de confianza al 95% para la permeabilidad con respecto al porcentaje de nano (Tipo)	31
FIGURA 1.6	Comparación de la permeabilidad con respecto al porcentaje de nano (Tipo) empleado mediante la media de cada nivel del factor.....	31
FIGURA 1.7	Gráfico de Pareto para la influencia de los factores en función del número de compresiones	39
FIGURA 1.8	Gráfico de probabilidad para la influencia de los factores en función del número de compresiones	40
FIGURA 1.9	Gráfico de interacciones de los factores en función del número de compresiones.....	41
FIGURA 1.10	Gráfico de superficie de respuesta (superior)	
FIGURA 1.11	Gráfico de contorno o curva de nivel (inferior).....	
FIGURA 2.1	Problema de optimización con N etapas	57
FIGURA 2.2	Esquema etapas del problema	59

FIGURA 2.3	Esquema de decisiones múltiples etapas	72
FIGURA 2.4	Esquema de proceso de decisiones múltiples	79
FIGURA 3.1	Gráfica de tres funciones	98
FIGURA 3.2	Mínimo local.....	102
FIGURA 3.3	Máximo local	103
FIGURA 3.4	Gráfica función cóncava hacia arriba	104
FIGURA 3.5	Gráfica función cóncava hacia abajo	105
FIGURA 3.6	Función con dos concavidades.....	105
FIGURA 3.7	Gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$	109
FIGURA 3.8	Gráfica Matlab	112
FIGURA 3.9	Asíntotas verticales y horizontales.....	114
FIGURA 3.10	Máximo y mínimo de f	116
FIGURA 3.11	Punto de inflexión de f	117
FIGURA 3.12	Gráfica de $f(x) = \text{sen}(x)^{e-0.4x}$	118
FIGURA 3.13	Máximos y mínimos	119
FIGURA 3.14	Gráfica de $f(x) = \frac{x^3}{(x^2 - 1)}$	121
FIGURA 3.15	Gráfica de las asíntotas	123
FIGURA 3.16	Máximos y mínimos de la función $f(x) = \frac{x^3}{(x^2 - 1)}$	126
FIGURA 3.17	Gráfica de posición, velocidad y aceleración	128
FIGURA 4.1	Relación precio - cantidades	132
FIGURA 4.2	Modelo convergente.....	136
FIGURA 4.3	Relación precio- tiempo.....	136

FIGURA 4.4	Modelo explosivo.....	137
FIGURA 4.5	Relación precio-tiempo.....	137
FIGURA 4.6	Modelo con dinámica constante.....	138
FIGURA 4.7	Relación precio-tiempo.....	139
FIGURA 4.8	Producción mensual de café en kilos.....	141
FIGURA 4.9	Modelo de la telaraña relación: precio-cantidad para el café	142
FIGURA 4.10	Modelo de la telaraña relación: precio-cantidad para el café verde	142
FIGURA 4.11	Modelo de telaraña relación: precio-cantidad para el café verde	143
FIGURA 4.12	Modelo de la telaraña: relación entre precios y tiempo (en meses)	144
FIGURA 4.13	Modelo lateral de telaraña explosiva	145
FIGURA 4.14	Precio pimentón	147
FIGURA 5.1	Valor futuro simple	158
FIGURA 5.2	Valor futuro compuesto.....	162
FIGURA 5.3	Valor presente de anualidades	165
FIGURA 5.4	Valor presente gradiente aritmético	170
FIGURA 5.5	Valor presente gradiente geométrico.....	173
FIGURA 5.6	Triángulo No. 1	178
FIGURA 5.7	Triángulo No. 2	178
FIGURA 5.8	Interpolación lineal	179
FIGURA 5.9	Interpolación para TIR.....	182

PRESENTACIÓN

Los comienzos de la ciencia moderna se han fijado a partir de Galileo Galilei (1564-1642) y René Descartes (1596-1650) en el siglo XVII. Una de sus novedades fue el tratamiento matemático de la experiencia; la experiencia fue subordinada al razonamiento bajo la forma matemática.

El hecho no fue aplicar matemáticas a la interpretación de la experiencia, se trató de expresar los problemas de la ciencia en un lenguaje de medida, dimensiones, de forma cuantitativa. No es por lo tanto “investigar las relaciones de sucesión o de coexistencia entre dos o más fenómenos mantenidos en su heterogeneidad; sino analizar un solo fenómeno en sus *dimensiones* características, para determinar la relación matemática según la cual tal dimensión varía en función de otra, tomando aquélla como variable independiente. Encontrar estas “dimensiones”, es decir, las nociones abstractas que se presentan a una determinación experimental de su magnitud, tal es la tarea primera del sabio”¹. La consecuencia es la representación en un mundo geométrico y abstracto, por ello, tratar matemáticamente los fenómenos empíricos, es una de las primeras labores del tecnólogo/ingeniero.

Las innovaciones tecnológicas, duras o blandas, requieren de capital humano formado para concebir, formular, diseñar, fabricar, operar, mantener y renovar los

1 BLANCHÉ, Robert (1976). *El método experimental y la filosofía de la física*. México: Fondo de Cultura Económica. pp. 36-38.

tecnofactos haciendo uso de los conocimientos científicos y tecnológico. En este sentido, las ciencias básicas (matemáticas, físicas, química) son los pilares de la formación del tecnólogo/ingeniero y de la posterior aplicación de su ingenio en la solución de problemas propios de la ingeniería.

Este libro está dedicado a la presentación de varias opciones y ejemplos de aplicación de las matemáticas en diversos campos de la realidad fáctica; el propósito es, por medio de esta ilustración, motivar en los estudiantes el estudio serio y riguroso de, probablemente, la mejor herramienta para su práctica profesional: las matemáticas.

En particular, se ilustra la aplicación de esta ciencia formal en: el diseño de experimentos para materiales compuestos, la técnica de programación dinámica utilizada en la operación de embalses, aplicaciones de la primera y segunda derivada, análisis de la dinámica entre precios y cantidades de un mercado, deducción de modelos (factores) para el análisis y evaluación de alternativas de inversión. Estos ejemplos permiten observar el papel de esta ciencia en la captura y sistematización de los fenómenos, en la formulación y su análisis riguroso.

José Benjamín Gallego
Compilador

CAPÍTULO I

APLICACIONES DE LA METODOLOGÍA DE DISEÑO DE EXPERIMENTOS EN MATERIALES COMPUESTOS

SALVADOR NAYA FERNÁNDEZ*

1.1 INTRODUCCIÓN

El diseño de experimentos, como herramienta estadística, surge en el año 1935 con Ronald Fisher, quien lo aplicó a problemas agrícolas cuando se encontraba trabajando en la estación experimental de Rothamsted (Harpenden, Inglaterra). Allí comenzó el estudio de una extensa colección de datos, que culminaría en con la publicación del primer libro sobre esta metodología (The Design of Experiments, 1935). Fisher quería averiguar cómo influía el tipo y cantidad de fertilizante sobre la cosecha. Para este fin parceló el terreno, asignando al azar, una cierta cantidad de fertilizante a cada parcela. Estas técnicas, que en un principio fueron usadas en agricultura, hoy en día son imprescindibles en cualquier estudio experimental, así, los resultados que se logren de un experimento bien diseñado siempre serán más fiables que otros que se hayan obtenido sin tener en cuenta diseño alguno, o utilizando uno erróneo.

La metodología del Diseño de Experimentos estudia cómo variar deliberadamente las condiciones habituales de un proceso empírico

* Profesor Titular del Área de Estadística e Investigación Operativa del Departamento de Matemáticas de la Universidad de A Coruña (España). Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Santiago de Compostela y Doctor en el área de Ingeniería Industrial por la Universidad de A Coruña. Profesor de Estadística y Fiabilidad en la Escuela Politécnica Superior de Ingeniería Naval y Oceánica (Universidad de A Coruña). e-mail: salva@udc.es

para aumentar la probabilidad de detectar cambios significativos en la respuesta y obtener así un conocimiento más profundo sobre el comportamiento de un proceso. La experimentación tiene por objetivo forzar, artificialmente, la aparición de circunstancias “extrañas” en presencia de personas preparadas para interpretar y extraer conclusiones de lo que ocurre. En la actualidad el diseño de experimentos se utiliza para la mejora de la calidad y la reducción de los costes, y esto es aplicable tanto al diseño como a la mejora de productos, procesos y servicios.

En este capítulo se presentará la aplicación del diseño de experimentos a los materiales compuestos cuyo creciente interés reside en el hecho de que los nuevos materiales, como son los nanomateriales, prometen un gran futuro. Las propiedades de los materiales cuando son modificados con nanopartículas difieren de las que se obtienen cuando la modificación se realiza con macropartículas. Cuando las partículas que se añaden son más pequeñas que la longitud característica de un determinado fenómeno, existen nuevos comportamientos químicos y físicos contribuyendo a un sinergismo único entre los materiales.

El capítulo se completa con un segundo apartado en el que se analizan las técnicas básicas de la metodología del diseño experimental haciendo hincapié en el análisis de la varianza como primer modelo estadístico; en un tercer apartado se analizará un ejemplo de aplicación a nanoarcillas; en el cuarto apartado se hará una introducción a los diseños factoriales con un ejemplo de aplicación a materiales de resinas con fibras de carbono; y se presenta un quinto apartado sobre la metodología de superficie de respuesta que se aplicará al estudio de un material compuesto.

1.2 CONCEPTOS BÁSICOS DEL DISEÑO DE EXPERIMENTOS

En un diseño de experimentos se utiliza una serie de términos específicos de esta metodología que definimos para comenzar. Se llama variable respuesta a aquella que interesa medir con el experimento; fuentes de variación será cualquier característica de interés que puede

producir variabilidad en la respuesta. Dentro de estas fuentes de variación distinguiremos entre aquellas cuyo efecto sobre la respuesta interesa ser controlado (*factores tratamiento*) y aquellas que no son de interés directo, pero que se contemplan en el diseño con objeto de reducir la variabilidad no planificada (*factores "nuisance"*). Dentro de los factores nuisance se distinguen distintos niveles que en ocasiones conviene agrupar en un factor bloque, y otras veces son tratados de forma independiente como *covariables*. Dentro de los factores se distinguen diferentes grados o tipos que denominaremos *niveles*. En el supuesto de que existan observaciones en todas las posibles combinaciones de los niveles se hablará de diseños factoriales, y en el caso en que todos los tratamientos son asignados a un número igual de unidades experimentales se llamará diseño equilibrado o balanceado. Las unidades experimentales serán la muestra sobre la que se valoran los factores. El tamaño de un experimento será el número total de observaciones recogidas en el diseño.

En la realización de un experimento se pueden planificar las siguientes etapas:

- Fijar objetivos: se confecciona una lista de cuestiones concretas a las que debe dar respuesta nuestro experimento.
- Elegir las variables: se identifican las posibles fuentes de variación en la respuesta (factores tratamiento y sus niveles, unidades experimentales y factores bloque o covariables).
- Elegir el tipo de diseño: se asignan las unidades experimentales que se observarán bajo cada tratamiento, diseño factorial o no, bloquear o no, anidamiento, etc.
- Ejecutar un experimento piloto: es útil partir de un primer experimento que sólo involucre un número pequeño de observaciones para detectar posibles problemas en el proceso de toma de datos.
- Especificar un modelo matemático: se explicita una relación matemática entre la variable respuesta y las principales fuentes de variación.

- Determinar el tamaño muestral: existen, dependiendo del modelo, algunas fórmulas que nos indican el número de observaciones que se deben tomar para alcanzar los objetivos del experimento.
- Analizar e interpretar los resultados: se esquematizan los pasos del estudio estadístico que dependerá de los objetivos marcados en el paso 1.
- Planificar nuevos experimentos si es necesario.

1.2.1 DISEÑOS EXPERIMENTALES CON UN FACTOR

Uno de los diseños más simples es aquel que analiza una sola variable con distintos niveles, se llama diseño completamente aleatorizado, pues para construirlo se asignan al azar las unidades experimentales a los tratamientos, con el modelo matemático:

$$\text{Respuesta} = \text{Constante} + \text{Efecto tratamiento} + \text{Error}.$$

Un modelo matemático para este tipo de experimentos es el Análisis de la Varianza o modelo ANOVA (ANalysis Of VAriance) que fue propuesto por Ronald Fisher con el fin de descomponer la variabilidad de un experimento en componentes independientes que puedan asignarse a causas distintas. Esta técnica hoy en día se usa para comprobar si varias muestras proceden o no de la misma población, o para averiguar si las medias de diferentes variables pueden suponerse iguales.

Aunque en un principio el ANOVA nace ligado a experimentos agrícolas, su uso se ha extendido a diversos campos de la ciencia, por ejemplo para comparar 4 máquinas A , B , C y D , o en general podríamos tener I máquinas, de las cuales se mide una respuesta que puede ser la producción diaria. Al medir esta producción durante n_i días en la máquina i -ésima (con $\sum n_i = n$) y llamando y_{ij} a la variable producción diaria de la máquina i el día j . El objetivo del ANOVA es doble, por un lado comparar si todas las máquinas son idénticas respecto a la producción media diaria y por otro, en el caso de no ser iguales, estimar la producción media diaria de cada una.

1.2.2 MODELO DEL ANOVA CON UN FACTOR

El ANOVA de un factor parte de I muestras aleatorias e independientes procedentes de distribuciones normales con la misma varianza, cada una de tamaño n_i , con $\sum n_i = n$. Si y_{ij} es una observación de la variable respuesta del valor j -ésimo de la muestra i -ésima, se establece el contraste de hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_I \\ H_1 : \text{Existe } i, j, \mu_i \neq \mu_j \end{cases}$$

Para la resolución de este contraste se necesitan los siguientes cálculos:

El número total de valores de las I muestras es $\sum_{i=1}^I n_i = n$

La media total es:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$$

Teniendo en cuenta la siguiente relación (que se obtiene sumando y restando la misma cantidad \bar{y}_i):

$$y_{ij} - \bar{y} = (y_{ij} - \bar{y}_i) + (\bar{y}_i - \bar{y})$$

Resulta

$$\begin{aligned} STC &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + \\ &\quad \sum_{i=1}^I n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2 = SCR + SCF \end{aligned}$$

La descomposición anterior es una estimación de la variabilidad total (STC) como suma de la variabilidad explicada por el factor (SCF)

y de la variabilidad residual (*SCR*). Teniendo en cuenta los grados de libertad de cada uno de los sumando anteriores (se puede pensar que el número de grados de libertad es el número de datos menos el número de restricciones), se definen las medias cuadráticas *MTC*, *MCR* y *MCF* (que son estimadores centrados de las respectivas varianzas) como:

$$MTC = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2; \quad MCR = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2;$$

$$y \quad y \quad MCF = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^I n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2$$

Bajo la hipótesis nula se verifica que la distribución del cociente entre *MCF* y *MCR* sigue una distribución *F* de Fisher-Snedecor con *I* - 1 y *n* - 1 grados de libertad, lo que permite resolver el contraste haciendo uso de algún paquete estadístico en el cual se representa el cuadro ANOVA con los distintos valores de las sumas de los cuadrados entre grupos (*SCF*), la suma de cuadrados intra-grupos (*SCR*) y la suma total de cuadrados (*STC*). Además de los respectivos grados de libertad también se presentan las medias cuadráticas, el valor del cociente de la *F* y el *p*-valor del contraste.

1.3 APLICACIÓN DEL ANOVA AL ESTUDIO DE MATERIAL COMPUESTO

1.3.1 APLICACIÓN DEL MODELO ANOVA A 3 TIPOS DE RESINA EPOXI

En un primer ejemplo estudiaremos la aplicación del diseño de experimentos en el estudio de 3 tipos distintos de material compuesto. Se analizará una resina epoxi, que es un polímero termoestable que se endurece cuando se mezcla con un agente catalizador o “endurecedor”. Con el fin de analizar qué endurecedor es mejor se realizó un estudio de laboratorio en el que utilizaremos 3 tipos distintos de endurecedor que llamaremos *A*, *B* y *C*; el objetivo era averiguar si los tres tipos distin-

tos de endurecedor producían diferencias significativas en cuanto a su resistencia a la tracción (variable respuesta). Para este fin se eligieron al azar 15 muestras de los tres tipos de material a las que se sometió a pruebas de tracción en laboratorio de forma aleatoria, que son los resultados que se recogen en la siguiente tabla (medidas en Rc).

TABLA 1.1 PRUEBA DE TRACCIÓN

A	39	33	39	35	32
B	36	40	35	30	29
C	33	33	36	26	35

Este es un diseño en el que la respuesta es la resistencia a la tracción y los factores serán los tres tipos de endurecedor (*A*, *B* y *C*). Además puesto que se han asignado aleatoriamente los endurecedores a las muestras, formará parte de un diseño completamente aleatorizado, que en este caso se puede estudiar como un ANOVA de un factor. La idea es contrastar la hipótesis nula de igualdad de efectos medios de los 3 endurecedores frente a la alternativa de que no sean los 3 iguales.

Calculamos las diferentes sumas entre grupos y intragrupos, para cada factor *i*:

$$SCT = 39^2 + 33^2 + \dots + 35^2 - (511^2 / 15) = 208.933$$

$$SCF = (178^2 / 5) + (170^2 / 5) + (163^2 / 5) - (511^2 / 15) = 22.533$$

$$SCR = SCT - SCF = 208.933 - 22.533 = 186.4$$

Los cuadrados medios correspondientes a cada fuente de variación se determinan dividiendo cada suma de cuadrados entre sus grados de libertad. A continuación se puede hallar el valor del estadístico del contraste:

$$F = \frac{22.253/2}{186.4/12} = 0.725$$

TABLA 1.2 ANÁLISIS ANOVA

FUENTE	SUMAS DE CUADRAD.	GL	CUADRADO MEDIO	COCIENTE-F	P-VALOR
Entre grupos	22.533	2	11.267	0.73	0.504
Intra grupos	186.4	12	15.533		
Total (Corr.)	208.93	14			

Puesto que el p-valor es 0.504 no hay motivos para rechazar la hipótesis nula, por lo que no tiene sentido seguir con más pruebas. Haciendo uso de un programa estadístico (en este caso el Statgraphics) se puede ampliar la información para este experimento con las siguientes tablas y gráficos:

TABLA 1.3 MEDIAS PARA RESISTENCIA SEGÚN ENDURECEDOR CON INTERVALOS LSD AL 95%

ENDURECEDOR	FREC.	MEDIA	LÍMITE INF.	LÍMITE SUP.
A	5	35.6	32.885	38.315
B	5	34.0	31.285	36.715
C	5	32.66	29.885	35.315
Total	15	34.067		

En esta tabla se muestra la media para cada muestra y los intervalos de confianza basados en el procedimiento de las menores diferencias significativas de Fisher (LSD), que se construyen de tal manera que si dos medias son iguales, sus intervalos se solaparán el 95% de las veces. Estos intervalos pueden observarse de forma gráfica en la siguiente figura:

FIGURA 1.1 COMPARACIÓN DE LA RESISTENCIA CON RESPECTO AL TIPO DE ENDURECEDOR EMPLEADO MEDIANTE INTERVALOS DE CONFIANZA

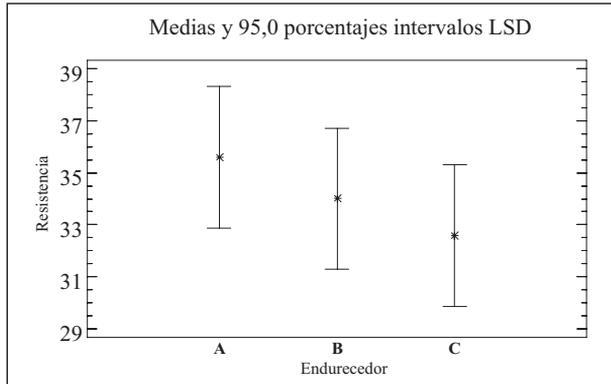


FIGURA 1.2 COMPARACIÓN DE LA RESISTENCIA CON RESPECTO AL TIPO DE ENDURECEDOR EMPLEADO MEDIANTE UN GRÁFICO DE CAJAS

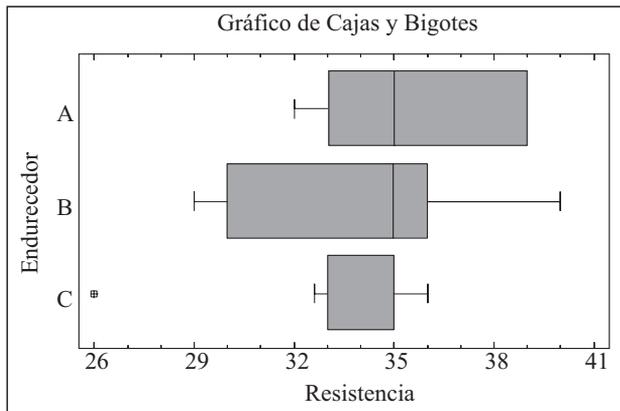
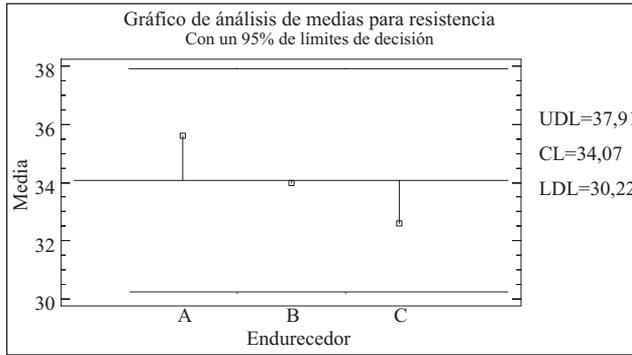


FIGURA 1.3 COMPARACIÓN DE LA RESISTENCIA CON RESPECTO AL TIPO DE ENDURECEDOR EMPLEADO MEDIANTE LA MEDIA DE CADA NIVEL DEL FACTOR



En los gráficos anteriores pueden verificarse que no se aprecian diferencias significativas en la resistencia en función del endurecedor utilizado.

1.3.2 APLICACIÓN DEL MODELO ANOVA A NANOARCILLAS

En una segunda aplicación del diseño de experimentos a materiales compuestos, analizamos cómo influye la modificación de una resina epoxi con la inclusión de nanopartículas de arcilla que es un material utilizado en el recubrimiento de depósitos de combustible de los transbordadores espaciales. El factor de interés en este caso es el porcentaje de nanoarcillas (concretamente la nanoarcilla analizada se denomina Cloisite®30B) y la respuesta será la permeabilidad al hidrógeno. Para este experimento se utilizaron muestras de resina epoxi (marca Epon™826) combinadas con distintos porcentajes de nanoarcillas (4 niveles) para someterlos a una prueba de permeabilidad en el laboratorio. Se quería comprobar si las nanoarcillas al dispersarse apropiadamente en materiales compuestos podían ayudar en la reducción de la permeabilidad del combustible líquido de los tanques espaciales.

La medida de la permeabilidad de las muestras se obtuvo del detector de fugas como valores de flujo del Helio en $\text{atm}\cdot\text{cm}^3/\text{s}$. Se midió

el área a través de la cual se produce el flujo y se calculó el coeficiente de permeabilidad en metros cuadrados para cada muestra utilizando la ley de Darcy.

Los resultados obtenidos, realizados de forma aleatoria, son los siguientes:

TABLA 1.4 MEDIDA DE PERMEABILIDAD DE LAS MUESTRAS

A	15.45	14.58	15.16	16.12
B	13.41	13.56	12.86	12.46
C	10.13	11.15	10.48	10.33
D	13.11	12.44	12.34	11.89

Analizando estos datos en la tabla ANOVA:

TABLA 1.5 ANÁLISIS DE RESULTADOS ANOVA

FUENTE	SUMAS DE CUADRAD.	GL	CUADRADO MEDIO	COCIENTE-F	P-VALOR
Entre grupos	47.07	3	15.69	56.21	0.0000
Intra grupos	3.35	12	0.279		
Total (Corr.)	50.42	15			

Además, el Test de Levene para igualdad de varianzas ha dado un *p-valor* de 0.867 con lo que podemos suponer que no existe diferencia entre las varianzas y permite validar los resultados del ANOVA.

El F-ratio, cociente de la estimación entre grupos y la estimación dentro de los grupos, en este caso es igual a 56.21. Puesto que el *p-valor* del test *F* es inferior a 0.05, si hay diferencia estadísticamente significativa entre las Permeabilidades medias, según los niveles de nano usados a un nivel de confianza del 95%. Para determinar qué medias son estadísticamente diferentes realizamos un contraste de rangos múltiple:

TABLA 1.6 CONTRASTE MÚLTIPLE DE RANGO PARA PERMEABILIDAD SEGÚN TIPO

CONTRASTE	DIFERENCIAS	+/- LÍMITES
A - B	*2.255	0.813991
A - C	*4.805	0.813991
A - D	*2.8825	0.813991
B - C	*2.55	0.813991
B - D	0.6275	0.813991
C - D	*-1.9225	0.813991

Nota: * indica una diferencia significativa.

Las salidas gráficas para este experimento se muestran a continuación:

FIGURA 1.4 GRÁFICO DE CAJA Y BIGOTES PARA LA PERMEABILIDAD CON RESPECTO AL PORCENTAJE DE NANO (TIPO)

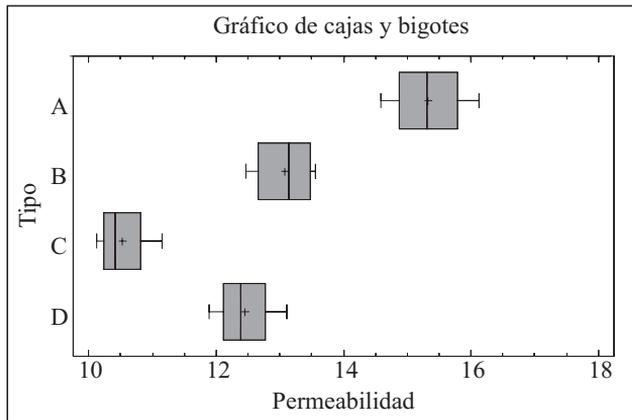


FIGURA 1.5 INTERVALOS DE CONFIANZA AL 95% PARA LA PERMEABILIDAD CON RESPECTO AL PORCENTAJE DE NANO (TIPO)

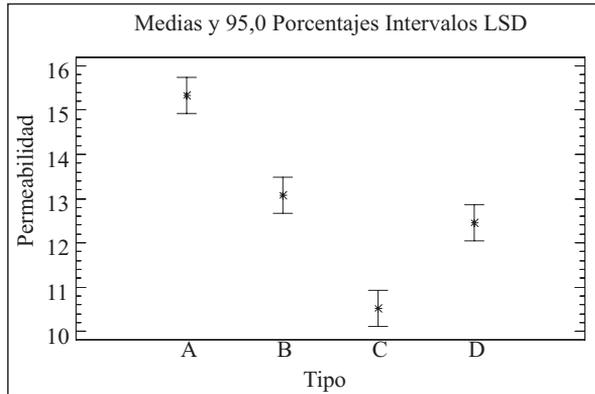
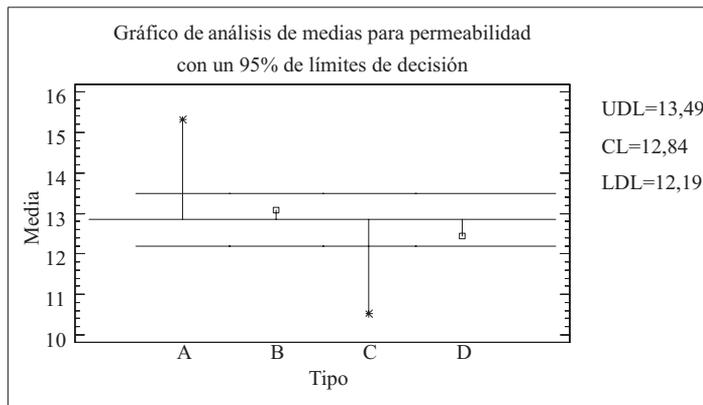


FIGURA 1.6 COMPARACIÓN DE LA PERMEABILIDAD CON RESPECTO AL PORCENTAJE DE NANO (TIPO) EMPLEADO MEDIANTE LA MEDIA DE CADA NIVEL DEL FACTOR



1.4 DISEÑOS FACTORIALES

Dentro de los diferentes tipos de diseño es de especial importancia para el estudio en la industria el **diseño factorial**, que se basa en planificar los experimentos de forma que se pueda determinar el efecto de cada factor y cada una de las maneras en que ese factor se puede

ver modificado por la influencia de los demás factores, combinándose cada nivel de cada factor con todos los niveles de los restantes. Este modelo presenta la ventaja de requerir una cantidad mínima de pruebas por factor, y puede servir como experimento base para hacer posteriormente una mayor exploración de los datos. Además de ser sencillos de construir y analizar proporcionan estimaciones de los efectos de las variables y de sus interacciones y permiten experimentar en todas las combinaciones de variables y niveles. La desventaja de este diseño es que requiere un gran número de experimentos, inconveniente que se resuelve utilizando sólo dos niveles por factor o, como veremos en el próximo apartado, por medio de diseños factoriales fraccionales.

En estos diseños es muy importante el efecto que un factor puede tener combinado con otro en la respuesta, a este efecto se denomina interacción. Por ejemplo, en el caso de combinar un medicamento, con alguna bebida alcohólica, es conocido el efecto contrario de cara al bienestar producido. Este fenómeno de interacción ocurre con frecuencia en experimentos industriales provocando paradojas que son resueltas con un diseño bien planificado.

1.4.1 DISEÑOS FACTORIALES COMPLETOS

En los diseños factoriales completos el número de experimentos queda determinado por el número de variables utilizadas k y por el número de niveles en cada variable. En este caso trabajamos con diseños factoriales a 2 niveles, con lo que el número de experimentos será 2^k , que por este motivo se conocen también como diseños 2^k . Estos diseños se realizan haciendo uso de una matriz (matriz del diseño) que tiene tantas columnas como factores en la que se van situando las distintas combinaciones de niveles. Para su construcción se van ordenando los niveles de cada factor, conocido el número de experimentos a realizar, para el primer factor se van alternando signos - y + (o también -1 y +1) hasta completar todas las filas, para el segundo factor se alternan dos signos - y dos + (o bien dos -1 y dos +1) hasta completar todas las filas, para el tercero cuatro - y cuatro +, para el cuarto 8 signos - y 8 +,

y así sucesivamente, hasta completar los factores. Esta construcción, que se denomina orden estándar, tiene la ventaja de combinar todos los factores sin omitir ni repetir ningún valor y además resulta muy sencillo determinar los efectos de las variables.

En el supuesto de querer medir la variabilidad es conveniente realizar varios experimentos en cada condición experimental que se denominan réplicas. Las réplicas reducen el efecto de la variabilidad en la respuesta, en la práctica, se considera la media de las réplicas como única respuesta procediendo con el cálculo de los efectos como si sólo se hubiese experimentado una vez en esas condiciones y el resultado fuese esa media.

1.4.2 APLICACIÓN A LA FIABILIDAD DE UN MATERIAL DE FIBRA DE CARBONO

Deseamos estudiar la fiabilidad (fatiga en este ejemplo) de un material compuesto de resina epoxi-carbono (de los utilizados en los barcos de competición, raquetas de tenis, bicicletas, etc.). Partiendo de otros estudios sobre este tipo de material, se tomó la decisión de medir en laboratorio probetas de este material en el que como factores se consideren la inclinación de las fibras de carbono (tomando dos posibles niveles: a 0° y a 90°), otro factor de interés fue el grosor de las probetas (utilizando dos niveles: un primer laminado con 46.6% de fibra de carbono y un segundo laminado con un 49% de fibra), y como tercer factor se sometió el compuesto a un postcurado (en una estufa de laboratorio), o no. La respuesta que se midió fue el número de deformaciones hasta la rotura de cada probeta, para lo cual se someten las unidades experimentales a un análisis mecanodinámico (deformación senoidal y se mide el esfuerzo en función del tiempo). Por tanto, la variable respuesta es el número de compresiones (en miles) hasta la rotura de la muestra, lo que permite estimar el tiempo de vida, es decir, la fiabilidad del material.

TABLA 1.7 FATIGA MATERIAL COMPUESTO DE RESINA EPOXI-CARBONO

VARIABLE	MÍNIMO (-1)	MÁXIMO (+1)
Inclinación fibras de carbono (I)	0° (-1)	90° (+1)
Grosor de las probetas (G)	46% (-1)	49% (+1)
Postcurado (P)	Si (-1)	No (+1)

En la tabla anterior se recogen los intervalos de estudio en el diseño experimental con tres factores a dos niveles que se recoge la matriz del diseño para este experimento de tipo 2^3 en la tabla siguiente (el orden de realización de los experimentos fue aleatorio según el indicado en la primera columna):

TABLA 1.8 MATRIZ DEL EXPERIMENTO TIPO 2^3

EXPERIMENTO (ORDEN)	INCLINACIÓN (I)	GROSOR (G)	POSTCURADO (P)	NÚMERO DE COMPRESIONES
1 (3)	-1	-1	-1	68771
2 (5)	+1	-1	-1	86550
3 (1)	-1	+1	-1	64189
4 (2)	+1	+1	-1	81233
5 (8)	-1	-1	+1	53122
6 (6)	+1	-1	+1	73226
7 (4)	-1	+1	+1	62087
8 (7)	+1	+1	+1	79875

El **efecto principal de un factor** mide cuánto cambia la respuesta, en promedio, al pasar del nivel más bajo (-1) al nivel más alto (+1) y se calcula restando las respuestas medias que se obtienen con ese factor al nivel más alto (+1) menos las respuestas medias que se obtienen con ese factor al nivel más bajo (-1). En el caso de la resina, resultaron

los siguientes efectos principales (para el factor inclinación, grosor y postcurado):

$$I = \frac{86550 + 81233 + 73226 + 79875}{4} - \frac{68771 + 64189 + 53122 + 62087}{4} = 18179$$

$$G = \frac{64189 + 81233 + 62087 + 79875}{4} - \frac{68771 + 86550 + 53122 + 73226}{4} = 1428.8$$

$$P = \frac{53122 + 73226 + 62087 + 79875}{4} - \frac{68771 + 86550 + 64189 + 81233}{4} = -8108.3$$

La interpretación de estos efectos nos lleva a afirmar que el número de compresiones hasta la rotura aumenta, en promedio, en 18179 compresiones, al pasar del nivel más bajo del factor Inclinación (0°) al más alto (90°). El número de compresiones hasta la rotura aumenta, en promedio 1428.8 compresiones, al pasar del nivel más bajo del factor Grosor (46.6%) al más alto (49%). Sin embargo, el número de compresiones hasta la rotura disminuye, en promedio 8108.3 compresiones, al pasar del nivel más bajo del factor postcurado (con postcurado) al más alto (sin postcurado). A la vista de estos resultados, cabe preguntarse hasta qué punto estos valores son estadísticamente significativos, pero este aspecto lo resolveremos más adelante. Otra pregunta es cómo afecta cada factor dejando fijos los niveles de otro, concretamente, a la vista de la respuesta, parece interesante estudiar las combinaciones del efecto grosor con el efecto postcurado.

Efecto principal del factor Grosor (G) con el material sin postcurado (+1):

$$G = \frac{62087 + 79875}{2} - \frac{53122 + 73226}{2} = 7807$$

El número de compresiones hasta la rotura aumenta, en promedio, en 7807 compresiones, al pasar del nivel más bajo del factor Grosor (46.6%) al más alto (49%) para una resina sin postcurado.

Efecto principal del factor Grosor (G) con el material con postcurado (-1):

$$G = \frac{64189 + 81233}{2} - \frac{68771 + 86550}{2} = -4949.5$$

El número de compresiones hasta la rotura disminuye, en promedio 4949.5 compresiones, al pasar del nivel más bajo del factor Grosor (46.6%) al más alto (49%) para una resina con postcurado, lo que demuestra una clara interacción entre los factores Grosor y Postcurado.

A la vista de los resultados, puede afirmarse que el cálculo de los efectos principales no es suficiente para explicar el experimento, siendo necesario contemplar las interacciones entre los factores, pues observando el cubo se pone de manifiesto que la respuesta aumenta al cambiar la inclinación de la fibra pero también al realizar un postcurado en estufa.

Para cuantificar el valor de las interacciones entre dos factores se hace la diferencia de los efectos de un factor con él al nivel más alto menos el efecto al nivel más bajo y se dividen estos efectos entre dos para que la varianza de los factores sea igual que la de los efectos principales. Por tanto, la cuantificación de la interacción entre un factor A y otro B será:

$$\text{Interacción } AB = (1/2) (\text{Efecto de } A \text{ con } B \text{ a nivel } + 1) - (1/2) (\text{Efecto de } A \text{ con } B \text{ a nivel } - 1)$$

Si esta diferencia es cero (o próxima a cero) indica que el efecto de un factor es independiente del nivel del otro, y por tanto no interactúan. Es fácil observar que la interacción AB es la misma que la BA .

En el ejemplo de la resina las interacciones entre grosor y postcurado resultará:

$$GP = PG = (1/2) 7807 - (1/2) (-4949.5) = 6378.3$$

De igual forma se calcularían las otras dos posibilidades IG, IP.

Las interacciones también se pueden representar gráficamente, lo que aporta una información visual además del valor numérico. Para esta representación se sitúa en un eje cartesiano la respuesta en las ordenadas (eje Y) y los niveles (-1 y +1) en las abscisas graficando los valores de la respuesta para el factor y uniendo las del mismo nivel por medio de un segmento. Un ejemplo de este tipo de gráfico puede verse en la figura 1.9

Hemos estudiado cómo se pueden calcular los efectos principales y los de las interacciones de dos factores. Diremos que tres factores interaccionan cuando la intersección de dos de ellos depende del nivel de la tercera. Habitualmente se consigue explicar la variabilidad de la respuesta mediante los efectos principales y los de dos factores.

En el caso de la resina si queremos calcular la interacción IPG se hallaría la interacción de IP cuando G está al nivel más alto y restarle el valor de IP cuando G está al nivel más bajo, dividiendo el resultado entre 2.

En caso de interesar el cálculo de los efectos de tres o más factores se puede hacer uso del algoritmo de los signos también llamado de Box, Hunter y Hunter o el de Yates (llamado de los signos) que requiere menos cálculos.

El Algoritmo de los signos se basa en añadir tantas columnas como efectos se quiera estimar a la matriz del diseño de forma que los nuevos signos de estas columnas se obtienen multiplicando algebraicamente los signos de las variables que la componen, añadiendo también una columna con todos 1 que se utiliza para calcular la media de la respuesta:

En el caso de la resina la matriz de los signos para el cálculo de los efectos hasta tercer orden queda de la forma siguiente:

TABLA 1.9 MATRIZ DE SIGNOS PARA CÁLCULO DE LOS EFECTOS

MEDIA	(I)	(G)	(P)	(IG)	(IP)	(GP)	(IGP)	COMPRESIONES
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	68771
1	+1	-1	-1	-1	-1	1	1	86550
1	-1	+1	-1	-1	1	-1	1	64189
1	+1	+1	-1	1	-1	-1	-1	81233
1	-1	-1	+1	1	-1	-1	1	53122
1	+1	-1	+1	-1	1	-1	-1	73226
1	-1	+1	+1	-1	-1	1	-1	62087
1	+1	+1	+1	1	1	1	1	79875

Para calcular los efectos se suma la respuesta de acuerdo a los signos correspondientes en la columna del efecto y se divide entre la mitad del número de condiciones experimentales, excepto en el caso de la media que lógicamente se multiplica la matriz de 1 por la respuesta y se divide entre el número de experimentos.

Fácilmente podrían calcularse los efectos del experimento de la resina mediante este método, resultando los mismos valores encontrados en el apartado anterior.

TABLA 1.10 EFECTOS ESTIMADOS PARA COMPRESIONES

PROMEDIO	=	71131.6	+/-	197.625
A:I	=	18178.8	+/	395.25
B:G	=	1428.75	+/	395.25
C:P	=	-8108.25	+/	395.25
AB	=	-762.75	+/	395.25
AC	=	767.25	+/	395.25
BC	=	6378.25	+/	395.25

En esta tabla se muestran cada uno de los efectos estimados y las correspondientes interacciones, y el error normal de cada uno de los efectos, que mide su error de muestreo.

FIGURA 1.7 GRÁFICO DE PARETO PARA LA INFLUENCIA DE LOS FACTORES EN FUNCIÓN DEL NÚMERO DE COMPRESIONES

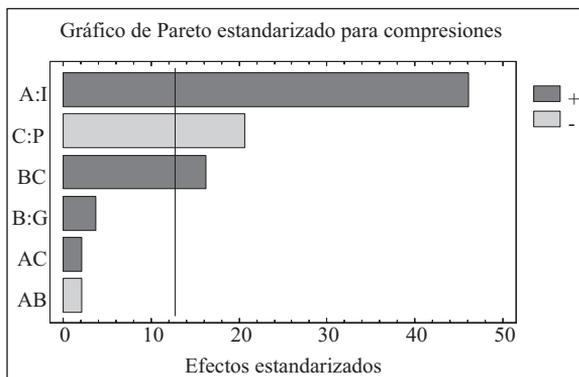
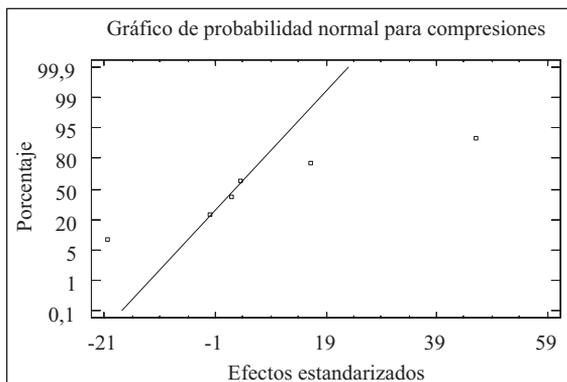


FIGURA 1.8 GRÁFICO DE PROBABILIDAD PARA LA INFLUENCIA DE LOS FACTORES EN FUNCIÓN DEL NÚMERO DE COMPRESIONES



BIBLIOGRAFÍA

- ALLEN. (1960). *Economía matemática. El modelo de la telaraña y otros modelos dinámicos simples*. Aguilar S.A. de ediciones Juan Bravo. Madrid.
- BACA URBINA, GABRIEL. *Ingeniería económica*. México: Mc Graw –Hill.
- BLANK LELAND y TARQUIN ANTHONY (2006). *Ingeniería Económica*. México: Mc Graw – Hill.
- BOX, G.E.P; HUNTER, W.G. y HUNTER, J.S. (1987). *Estadística para investigadores. Introducción al diseño de experimentos, análisis de datos y construcción de modelos*. Editorial Reverte.
- BOX, G.E.P. y DRAPER, N.R. (1987) *Empirical model-building and response surfaces*. John Wiley and Sons.
- COOB, G.W. (1998). *Introduction to design and analysis of experiments*. Springer-Verlag.
- COX, D. y REID, N. (2000). *The theory of the design of experiments*. Chapman & Hall CRC Press.
- DEAN, A. y VOSS, D. (1999). *Design and analysis of experiments*. Springer-Verlag, New York.
- DIAZ, DANIEL. *Teorema la telaraña*. Disponible en www.zonaeconomica.com.
- DIEZ M., LUIS H (1998). *Matemáticas operativa*. Medellín. Servigráficas
- ETHER, DELORES M. *Solución de problemas de ingeniería con Matlab*. 2ª.ed.
- GILAT, AROS. *Matlab: una introducción con ejemplos prácticos*.
- HICKS, C.R.(1993). *Fundamental concepts in the design of experiments*. 4th ed. Oxford University Press Inc, New York.
- JAMES STEWART. *Cálculo, conceptos y contextos*. 3ª.ed.
- KUEHL, R. O. (2001). *Diseño de Experimentos. Principios estadísticos para el diseño y análisis de investigaciones*. 2nd ed. Thomson Learning.
- LARROULET, CRISTIAN. y MOCHON, FRANCISCO. (1995). *Economía. Una telaraña dinámica*. McGraw-Hill. Aravaca, Madrid.
- LEITHOLD, LOUIS (1994). *El cálculo con geometría analítica*. México: Oxford. Louis Leithold. El cálculo.7.ed.
- MADDALA, G.S. y MILLER, ELLEN. (1996). *Microeconomía. Un modelo dinámico de oferta y demanda: El modelo de la telaraña*. McGraw-Hill. México.

- MILLER, ROGER L. (1989). *Microeconomía. Movimientos en precios y cantidades: El teorema de la telaraña*. McGraw-Hill. Bogotá.
- MONTGOMERY, C. (1991). *Diseño y análisis de experimentos*. Grupo Editorial Iberoamérica.
- MYERS, R.H. y MONTGOMERY, D.C.(1995). *Response surface methodology. Process and product optimization using designed experiments*. John Wiley and Sons.
- NASA (2000). *Final report of the x-33 liquid hydrogen tank test investigation team*, George C. Marshall Space Flight Center, Huntsville, NASA Report.
- NAYA S., MARTÍNEZ S., ARTIAGA R., ZHOU, J. y HUI, D. (2006). *Statistical tools applied on the design of experiments of nanoclay-epoxy composites*. International Conference on Composites/Nano Engineering Boulder. Colorado.
- PEÑA SÁNCHEZ DE RIVERA, D. (2002). *Regresión y diseño de experimentos*. Alianza Editorial.
- SULLIVAN WILLIAM G. et al (2004). *Ingeniería económica de Degarmo*. México: Pearson.
- THE MATH WORKS INC. *Matlab: edición de estudiante: versión 4: guía del usuario*.
- WU C. y HAMADA M. (2000). *Experiments: planning, analysis and parameter design optimization*. Wiley.
- YANDELL, B. S. (1997). "Practical data analysis for designed experiments". Chapman & Hall.



Aplicaciones matemáticas en la ingeniería

se terminó de reimprimir en diciembre de 2009.

Para su elaboración se utilizó papel Bond de 70 g,
en páginas interiores, y cartulina Propalcote 240 g para la carátula.
Las fuentes tipográficas empleadas son Times New Roman 11 puntos,
en texto corrido, y Myriad Pro 14 puntos en títulos.