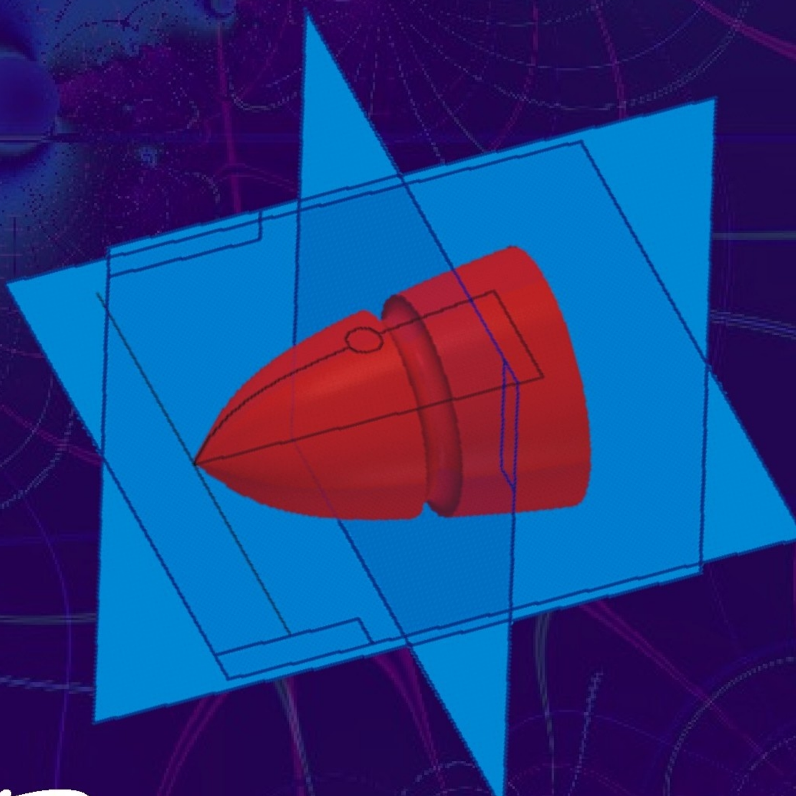
TEXTOS ACADÉMICOS

YOLANDA ÁLVAREZ RÍOS
JORGE AGUDELO QUICENO

CÁLCULO INTEGRAL

Guía de trabajo independiente



ITM

Textos Académicos

Instituto Tecnológico Metropolitano
Institución Universitaria

CÁLCULO INTEGRAL: GUÍA DE TRABAJO INDEPENDIENTE

1a. Edición: diciembre de 2009

ISBN: 978-958-8351-76-6

Dirección editorial
Fondo Editorial ITM

Diagramación y montaje
L. Vieco e Hijas Ltda.

Impreso y hecho en Medellín, Colombia

Instituto Tecnológico Metropolitano
Calle 73 No. 76A 354
Tel.: (574) 440 51 00
Fax: 440 51 01
www.itm.edu.co
Medellín - Colombia

A Bertha y Lichejo

“Si lo oigo, lo olvido
Si lo veo, lo recuerdo
Si lo hago, lo comprendo
Si lo descubro, me motivo
Si lo construyo es mío”
Confucio

Índice general

Índice de figuras

Introducción

El sistema de créditos ha impuesto una redefinición del tiempo de trabajo académico en cada uno de los planes de estudio y por ende en cada uno de los microdiseños que los conforman. Compaginar este sistema y el trabajo por competencias obliga a concentrar todos los esfuerzos en el diseño de estrategias que permitan un uso eficiente del tiempo que conlleve a un aprendizaje significativo del Cálculo Integral y evidencien la presencia pedagógica y la intencionalidad formativa de estos cursos en el ITM.

Como actividad inherente a nuestra labor docente, permanentemente revisamos los microcurrículo tanto en su contenido como en el día a día que orienta el desarrollo del mismo y estamos convencidos de que la única forma en la cual el estudiante puede seguir el desarrolo de un curso a la par con el profesor es realizando por fuera de la clase el trabajo independiente asociado con el eje temático trabajado en la misma.

La racionalización del tiempo de trabajo académico, nos ha llevado a intervenir los microdiseños curriculares reorientando el tiempo de trabajo presencial y el tiempo de trabajo independiente, componentes que sumados conforman el tiempo requerido para alcanzar las competencias. El éxito del trabajo académico está en la perfecta combinación del tiempo de la clase y del tiempo por fuera de ella y en la planeación de ambos en función del logro de las competencias propuestas.

La elaboración de este texto está guiada principalmente por el deseo de formar para el asombro, la inquietud, propiciar la discusión, la argumentación, educar la mirada a través de la construcción y deconstrucción de conceptos, categorías y estructuras básicas del Cálculo Integral. Este trabajo materializa todos los elementos aportardos al proyecto de investigación **Estrategias Didácticas para la Enseñanza del Cálculo** por distintos encuentros propiciados por la Facultad de Ciencias del ITM, tales como el Seminario permanente de Pedagogía, la socialización de estrategias exitosas de algunos de nuestros compañeros docentes, la presentación que realizaron algunos profesores explicitando la forma como construyen en sus clases conceptos pilares del Cálculo Integral, así como también la interacción con expositores externos que incentivaron el uso de diferentes escenarios y materiales didácticos para la enseñanza del Cálculo Integral.

El hacer es el pilar fundamental para obtener un saber. Concebimos el hacer como un proceso activo de relación y diferenciación. Cuanto más activo sea este proceso, más significativos y útiles son los conceptos asimilados. Por ello ofrecemos una serie de actividades pensadas para incentivar las diferentes formas de aprender, cada una de esta páginas es mucho más que una lista de ejercicios que se deben realizar mecánicamente. En ellas el lector puede encontrar :

- Ejercicios enfocados a ejercitar la comprensión lectora que permite la necesaria conexión entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático.
- Rutas didácticas que guirán de manera sistemática la solución de un problema.
- Preguntas guiadas para comprender las expresiones matemáticas presentes en un problema.
- Completación o identificación de secuencias lógicas al resolver un problema.
- Clasificación e interpretación de información presente en gráficos, tablas o fórmulas.
- Desarrollos paso a paso.
- Algunos elementos teóricos importantes para afianzar conceptos.
- Análisis e interpretación de gráficos.

Esperamos que este texto sea percibido por cada uno de los estudiantes de los cursos de Cálculo Integral como una invitación llena de opciones que les permitan:

- Elaborar y reelaborar conceptos.
- Mejorar la calidad y la rapidez para procesar información.
- Mejorar la memoria viso espacial para trabajar con diagramas, gráficos, tablas y fórmulas.
- Mejorar la memoria semántica para recordar conceptos y códigos.
- Mejorar la memoria visoconstruccional para manipular objetos y formas de representación y construcción.
- Adquirir habilidad para resolver problemas.
- Mejorar su rendimiento académico.
- Optimizar el tiempo de trabajo independiente.
- Disponer de un material de consulta.
- Crear hábitos de valor universal en las actividades que se realizan tales como compromiso, diversión y autorealización.

Finalmente queremos aclarar que si bien hay una gran variedad de actividades en el texto, esperamos ampliar la oferta de ellas sobre todo en lo que aplicaciones se refiere. Además está pendiente la inclusión de actividades relacionadas con el eje temático de sucesiones y series.

Parte I

INTEGRAL INDEFINIDA

Capítulo 1

Antiderivadas

1.1. Concepto de antiderivada

El problema de hallar una función cuya derivada es conocida, está presente en muchas áreas del conocimiento.

Un ingeniero que conoce la velocidad a la que se deforma una determinada estructura requiere encontrar la deformación total sufrida por la misma en cierto periodo. Un administrador que conoce la rapidez a la cual se deprecia cierta máquina, puede interesarse en determinar el valor de la misma en un instante cualquiera. Un biólogo que conoce la razón de crecimiento de cierta población puede calcular la cantidad de individuos en la misma en cualquier instante de tiempo.

El concepto de antiderivada es el que permite resolver estas y muchas otras situaciones. De ahí su utilidad en múltiples contextos.

Definición 1.1. Sea f una función definida en un intervalo abierto I subconjunto de $\mathbb{R}$. Una función F tal que

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in I,$$

es una **Antiderivada** de f.

Por ejemplo, considere la función $f(x) = 2x$.

Las funciones $\left\{x^2 - \frac{1}{2},\ x^2 - 1,\ x^2 - \sqrt{2},\ x^2,\ x^2 + 2,\ x^2 + 0.25\right\}$ de acuerdo con la definición anterior son antiderivadas de la función f ya que la derivada de cada una de ellas es $F'(x) = f(x) = 2x$.

ACTIVIDAD 1.1.1

Comprensión del concepto**.**

1. ¿Qué diferencia observa entre las antiderivadas del ejemplo anterior?

2. ¿Las funciones $x^2 + 2x$, $x^2 - 3x + 8$ y $4 - x^2$ son antiderivadas de f? Justifique.

3. Sean $g(x) = 4x^3$ y $h(x) = e^x$. Escriba cinco antiderivadas de cada una de ellas.

Definición 1.2. Sea F una antiderivada de f. La **antiderivada** o **integral indefinida** de f denotada por $\displaystyle\int f(x)\,dx$ es $F(x) + C$ donde C es una constante arbitraria denominada **constante de integración**.

Se escribe,

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

El lado izquierdo de la igualdad anterior se lee “integral de $f(x)$”. En ella dx indica que la variable con respecto a la cual se realiza el proceso de integración es x.

De acuerdo con la definición 1.2 se sigue que $\displaystyle\int 2xdx = x^2 + C$.

Al integrar una función dada se encuentran todas las antiderivadas de dicha función, las cuales constituyen una familia de funciones que tienen algunas características geométricas comunes.

En adelante se usa el término integrar en lugar de antiderivar.

1.2. Análisis gráfico

$F(x) = x^2 + C$ es la integral de la función $f(x) = 2x$. Al variar la constante C se obtiene una familia de funciones. La figura 1.1 muestra varios elementos de esta familia uniparamétrica.

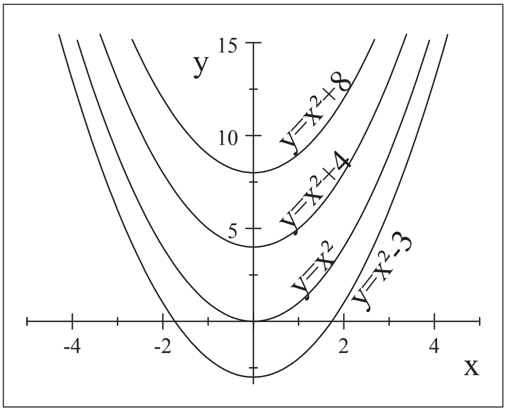


Figura 1.1: Familia uniparamétrica de curvas

De la figura 1.1 se infieren las siguientes características geométricas y analíticas que son comunes a cada una de las funciones que conforman la familia:

- Todas son parábolas cóncavas hacia arriba, ya que el coeficiente del término x^2 es positivo.
- Ninguna de las curvas se cortan entre ellas.
- Para cualquier punto de la curva en que la abscisa es mayor que cero, por ejemplo $x = 1$, las pendientes de las rectas tangentes en dichos puntos son positivas ya que $F'(x) = f(x) > 0$ para $x > 0$.
- Análogamente para cualquier punto de la curva en que la abscisa es menor que cero, por ejemplo $x = -1$, las pendientes de las rectas tangentes en dichos puntos son negativas ya que $F'(x) = f(x) > 0$ para $x < 0$.
- Para un valor de x dado, las rectas tangentes a cada curva en el punto $(x, F(x))$ son paralelas, puesto que tienen la misma pendiente. Por ejemplo, en el punto $(1, F(1))$.

$$m_{\tan} = F^{'}(1) = f(1) = 2(1) = 2$$

La figura 1.2 ilustra la situación y en ella se observan cuatro rectas tangentes a cada una de las curvas respectivamente en el punto $(1, F(1))$.

Para $f(x) = 2x$ es claro que

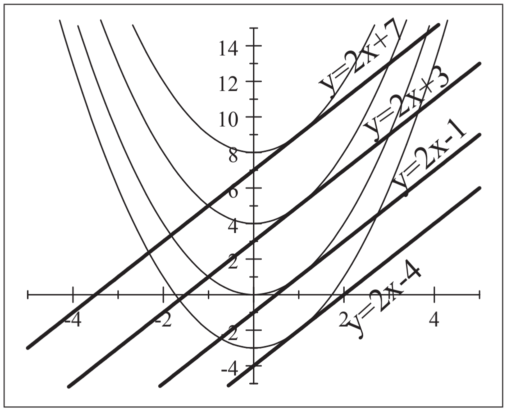


Figura 1.2: Rectas tangentes a la familia de curvas

$$f(x) = 0 \text{ en } x = 0$$
$$f(x) > 0 \text{ para } x > 0$$
$$f(x) < 0 \text{ para } x < 0$$

Por lo tanto las antiderivadas tienen un mínimo en el punto $(0, F(0))$, son crecientes en el intervalo $(0, \infty)$ y decrecientes en el intervalo $(-\infty, 0)$.

ACTIVIDAD 1.2

Dadas las funciones, halle la antiderivada de cada función, grafique tres funciones que pertenezcan a la familia de antiderivadas en cada caso y analice las similitudes y diferencias que se presentan entre las gráficas de cada familia.

1. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ 3. $f(x) = \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$

2. $f(x) = -3x^4$ 4. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$

1.3. Fórmulas básicas de integración

ACTIVIDAD 1.3.1

Observe y analice la conexión entre la derivación y la integración

Si $\frac{d}{dx}(4x) = 4$ entonces por la definición de antiderivada se sigue que $\int 4\, dx = 4x + C$.

Si $\frac{d}{dx}(-\frac{5}{3}x) = -\frac{5}{3}$ entonces $\int -\frac{5}{3}\, dx = -\frac{5}{3}x + C$.
Si $\frac{d}{dx}(\sqrt{\pi}x) = \sqrt{\pi}$ entonces $\int \sqrt{\pi}\, dx = \sqrt{\pi}x + C$.

1. Proponga tres ejemplos adicionales.

2. De acuerdo con lo observado se puede concluir que para $k \in \mathbb{R}$,

$$\int k dx = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Si $\dfrac{d}{dx}(x^2) = 2x$ entonces al despejar la variable x del lado derecho de la igualdad y hacer uso de las propiedades de derivación se tiene que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right) = x$$

y en consecuencia,

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Si $\dfrac{d}{dx}(x^5) = 5x^4$ entonces $\displaystyle\int x^4\, dx = \frac{x^5}{5} + C$.
Si $\dfrac{d}{dx}(x^{21}) = 21x^{20}$ entonces $\displaystyle\int x^{20}\, dx = \frac{x^{21}}{21} + C$.

3. Así, para $n \in \mathbb{N}$ se infiere que,

$$\int x^n dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

4. La fórmula inferida se extiende a exponentes negativos y racionales. Para verificarlo resuelva las siguientes integrales y compruebe el resultado mediante derivación.

a. $\displaystyle\int x^{-4}dx$ **b.** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}dx$ **c.** $\displaystyle\int x^{\frac{9}{2}}dx$ **d.** $\displaystyle\int \sqrt{x^3}dx$ **e.** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}dx$

ACTIVIDAD 1.3.2

Siguiendo un procedimiento análogo al descrito en la actividad anterior, se pueden deducir las fórmulas básicas de integración de algunas funciones elementales.

A continuación se presentan algunas integrales básicas. Complete los espacios en blanco.

INTEGRAL	RESULTADO
1.	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n\neq -1$
2. $\displaystyle\int \cos x dx$	
3.	$-\cos x + C$
4. $\displaystyle\int \sec x \tan x dx$	
5.	$-\csc x + C$
6. $\displaystyle\int \sec^2 x dx$	
7. $\displaystyle\int \csc^2 x dx$	
8.	$\ln x + C$
9. $\displaystyle\int e^x dx$	
10.	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$
11. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	
12.	$\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)+C$
13.	$\cos^{-1} x + C$
14. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$	

Tabla 1.1: Antiderivadas básicas

1.4. Propiedad de la integral indefinida

Dado que la integración es el proceso inverso de la derivación, las propiedades de la integral indefinida se heredan de las propiedades de la derivada.

Sean f y g funciones reales y α y β constantes. Entonces,

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx) = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

Esta igualdad expresa que la integral de una combinación lineal de funciones es igual a la combinación lineal de integrales y se denomina propiedad de linealidad y homogeneidad.

ACTIVIDAD 1.4.1
Usando la propiedad de linealidad y homogeneidad, resuelva las siguientes integrales.

1. $\displaystyle\int \left(3x^5 - \frac{5}{4}x^{-2} + \frac{3}{2}\sqrt{x}\right) dx$

2. $\displaystyle\int \left[\pi(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\sec t\ \tan t\right] dt$

3. $\displaystyle\int \left(\frac{\pi}{y^3} - 7\csc y \cot y + 8e\right) dy$

4. $\displaystyle\int \left[5(2^x) - 7\left(1+x^2\right)^{-1}\right] dx$

5. $\displaystyle\int \left(-5\mathrm{sen}x + \sqrt{3}\cos x\right) dx$

6. $\displaystyle\int \left(\frac{8}{7\theta} - 2e^\theta + \frac{\sqrt{2}}{3}\sec^2\theta + \frac{9}{4}\right) d\theta$

Para resolver algunas integrales en ocasiones es necesario manipular algebraicamente la función a integrar.

En la siguiente actividad se proponen ejercicios que requieren de dicha manipulación.

ACTIVIDAD 1.4.2

Desarrolle las operaciones algebraicas indicadas y a continuación aplique la propiedad de la integral dada para resolver las siguientes integrales.

1. $\int \left[(ax)^{-1} + 8\sqrt[3]{x^2} + (\frac{1}{bx})^{-4}\right] dx$

2. $\int \frac{2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x^3}}{6x\sqrt{x}} dx$

3. $\int \frac{x^5 - x^a}{x^2} dx$

4. $\int \frac{4x - x^3}{2x^2 - x^3} dx$

5. $\int x(x-1)^2 dx$

6. $\int \frac{a^3 - x^3}{a - x} dx$

7. $\int \frac{x^2 + 2x\mathrm{sen}x - 1}{4x} dx$

8. $\int \sec^2\theta\,(1 + \mathrm{sen}\theta)\,d\theta$

ACTIVIDAD 1.4.3

Determine si las siguientes afirmaciones son falsas ó verdaderas, justificando matemáticamente cada respuesta.

1. $\int x dz = \frac{1}{2}x^2 + C$ ________________________________.

2. Suponga que F y G son dos antiderivadas de una función f entonces se concluye que $F = G$ __________________________.

3. $\int e^2 dx = e^2 x + C$ ____________________________________.

4. La función $F(x) = 2 - x^{-1}$ es un elemento de la familia de antiderivadas de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ________________________.

5. La gráfica que se muestra en la figura 1.3 corresponde a una antiderivada de una función lineal __________________________.

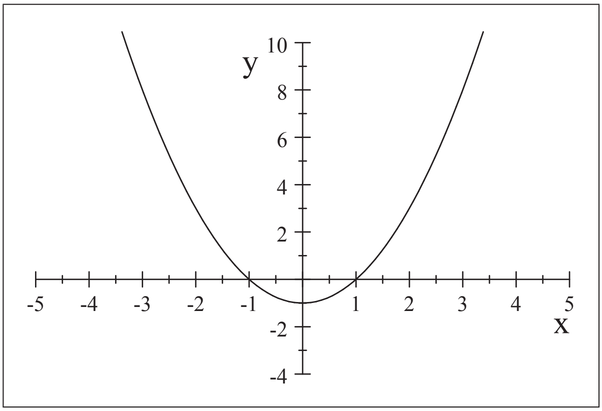


Figura 1.3: Antiderivada lineal

En las aplicaciones del Cálculo es muy común tener una situación en la que se requiere calcular una función de la cual se conoce su segunda o tercera derivada y el valor de la función o su derivada en un punto que permiten calcular las constantes que resultan de los procesos de integración especificando de manera única la función.

ACTIVIDAD 1.4.4

Dada f' ó f'' encuentre la función f en cada caso.

1. $f''(x) = -5x + 2$
2. $f'(x) = -3\text{sen}x + \dfrac{x^4 - 6x^2}{x^3}$
3. $f''(s) = e^s$
4. $f'(t) = -\pi(1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} + (1 + t^2)^{-1}$
5. $f''(x) = 2\sqrt{x}$
6. $f''(t) = A\text{sen}t + B\cos t$
7. $f''(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$
8. $f'(x) = (1 - x)^2$

Determine la función $f(x)$ que satisface las condiciones iniciales dadas.

9. $f'(x) = 4(1+x)^2 - e^x$, $f(0) = -3$
10. $f'(x) = \sec^2 x + 6(1+x^2)^{-1}$, $f(\pi) = 1$
11. $f''(t) = t^{-3}$, $t > 0$, $f(1) = 1$ y $f'(1) = 2$
12. $f''(t) = \dfrac{1}{2}e^t + 7\cos t$, $f(0) = 0$ y $f'(\pi) = e^{\frac{\pi}{2}}$

Textos Académicos

CÁLCULO INTEGRAL: Guía de trabajo independiente

se terminó de imprimir en diciembre de 2009.
Para su elaboración se utilizó papel Bond de 75 g,
en páginas interiores, y cartulina Propalcote 240 g para la carátula.
Las fuentes tipográficas empleadas son Times New Roman 11 puntos,
en texto corrido, y Myriad Pro 14 puntos en títulos.