Textos Académicos

SERGIO ALBERTO ALARCÓN VASCO
MARÍA CRISTINA GONZÁLEZ MAZUELO
HERNANDO MANUEL QUINTANA ÁVILA

Cálculo diferencial:
límites y derivadas

ITM

Cálculo diferencial: límites y derivadas

Sergio Alberto Alarcón Vasco
María Cristina González Mazuelo
Hernando Manuel Quintana Ávila

TEXTOS ACADÉMICOS

INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO
Institución Universitaria

CÁLCULO DIFERENCIAL: LÍMITES Y DERIVADAS

1a. Edición: julio de 2008

ISBN: 978-958-8351-03-2

Dirección editorial
FONDO EDITORIAL ITM

Digitación
NADEZDA LONDOÑO SILVA

Diagramación y montaje
L. VIECO E HIJAS LTDA.

Impreso y hecho en Medellín, Colombia

Instituto Tecnológico Metropolitano
Calle 73 No. 76A 354
Tel.: (574) 440 51 00
Fax: 440 51 01
www.itm.edu.co
Medellín - Colombia

Se debe hacer todo tan sencillo como sea posible, pero no más sencillo.

Albert Einstein

Contenido

Índice de tablas

ÍNDICE DE GRÁFICAS

Introducción

Desde hace algunos años, el ITM, bajo la dirección de la Escuela de Pedagogía, adelanta estudios encaminados al mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje en las distintas asignaturas, particularmente las que tienen relación con las Ciencias Básicas.

Producto de ese propósito es el proyecto de investigación "Incidencia de estrategias de razonamiento lógico en la estructuración del pensamiento formal", como un aporte a estos esfuerzos, y cuyo fin es diseñar y aplicar estrategias que faciliten estos procesos. *Cálculo diferencial* implementa algunas de las estrategias propuestas en el proyecto, tales como la visualización y la ejercitación. Esta última se hace con distintos niveles de complejidad, desde situaciones sencillas hasta otras cada vez más elaboradas. A partir de distintos contextos se tienen en cuenta las competencias básicas de pensamiento y tipos de razonamiento, como el heurístico. Así facilitamos a los estudiantes la comprensión de los conceptos básicos del Cálculo diferencial.

El texto se divide en dos capítulos: límites y continuidad, y la derivada y aplicaciones, cada uno de los cuales comienza con situaciones introductorias que facilitan la construcción del concepto. Luego se presentan, de manera formal, los conceptos, resultados y aplicaciones.

En la parte final se ofrecen talleres de ejercitación de cada capítulo, con el fin de profundizar en los conceptos y aplicaciones. Algunas de las situaciones propuestas en los talleres son diseñadas por los autores; otros son adaptaciones de ejercicios tomados de los libros de referencia.

1. LÍMITES Y CONTINUIDAD

Competencia

Comprender y aplicar el concepto de límite, sus operaciones y propiedades básicas para dar solución a situaciones en distintos contextos.

Indicadores de logro

- **Analiza** la existencia del límite de una función
- **Evalúa** el límite de diferentes funciones, utilizando diferentes técnicas.
- **Verifica** la continuidad de funciones en un intervalo abierto y cerrado de forma analítica y gráfica.

Introducción

El cálculo proporciona dos herramientas básicas (la derivada y la integral de una función) que son útiles para resolver diversos problemas de otros campos del saber. Estas herramientas se fundamentan en el concepto de límite, el cual distingue al cálculo de otras áreas de las matemáticas como son el álgebra y la geometría.

El concepto riguroso del límite no es de fácil comprensión para el estudiante que lo estudia por primera vez, por lo que es preciso una aproximación a dicho concepto de manera intuitiva.

Una vez desarrollado dicho concepto, se abordarán algunas propiedades ó teoremas que le permitirán al estudiante el cálculo de límites de funciones.

Igualmente se tratará el concepto de continuidad de una función a partir del concepto de límite.

1.1 Límites

"Los cuartos infinitos"

Cuando estaba solo, José Arcadio Buendía se consolaba con el sueño de los cuartos infinitos.

Soñaba que se levantaba de la cama, abría la puerta y pasaba a otro cuarto igual, con la misma cama de cabecera de hierro forjado, el mismo sillón de mimbre y el mismo cuadrito de la virgen de los Remedios en la pared del fondo. De ese cuarto pasaba a otro exactamente igual, y luego a otro exactamente igual, hasta el infinito, como en una galería de espejos paralelos, hasta que Prudencio Aguilar le tocaba el hombro.

Entonces regresaba de cuarto en cuarto, despertando hacia atrás recorriendo el camino inverso, y encontraba a Prudencio Aguilar en el cuarto de la realidad.

Pero una noche, dos semanas después de que lo llevaran a la cama, Prudencio Aguilar le tocó el hombro en un cuarto intermedio, y él se quedó allí para siempre, creyendo que era el cuarto real[1]."

---

[1] Tomado de *Cien años de soledad* de Gabriel García Márquez.

1.1.1 Concepto intuitivo de límite

Situación: "Hacia el concepto de límite"

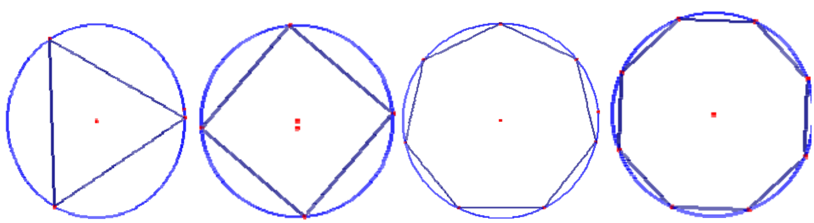
Con la siguiente situación nos trataremos de aproximar, de manera intuitiva al concepto de límite, considerando polígonos regulares inscritos y circunscritos en un círculo de radio R y analizando el comportamiento de las áreas de dichos polígonos cuando el radio R del círculo es fijo y el número de lados n de los polígonos va aumentando indefinidamente.

Situación introductoria 1 (Hacia el concepto del límite)

Caso 1 (Polígonos inscritos en un círculo)

Sea A el área de un círculo de radio R=10 unidades y cuyo valor viene dado por $A=\alpha\ (10)^2 \approx 314.159$ unidades cuadradas.

Consideremos, además, A_n el área de un polígono regular de n lados, n=3, 4, 5, 6..., inscrito en A. La gráfica siguiente muestra el círculo y algunos polígonos, A_3, A_4, A_7 y A_8, inscritos en el círculo.



n=3 (Triángulo Equilátero) n=4 (Cuadrado) n=7 (Heptágono) n=8 (Octágono)

Gráfica 1.1 Polígonos de área A_n, inscritos en un círculo de radio R=10

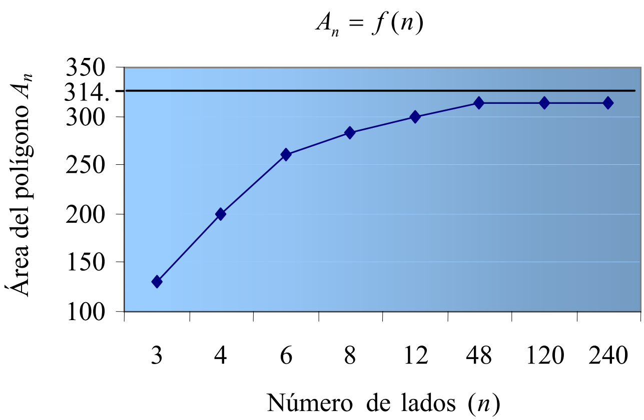
En la siguiente tabla mostramos los valores que va tomando el área A_n a medida que n va aumentando indefinidamente (el área A_n depende del número de lados de n. Esto es $A_n=f(n)$.)

Tabla 1.1 Valores que toma el área A_n del polígono cuando el número de lados n aumenta indefinidamente

n	3	4	6	8	12	48	120	240
$A_n=f(n)$	129,9	200	346,41	331,37	321,54	314,61	314,23	314,18

Observemos que cuando $n=3$, $A_n=A_3=129{,}9$ unidades cuadradas es el área de un triángulo equilátero; para $n=4$, $A_n=A_4=200$ unidades cuadradas es el área de un cuadrado; A_6 es el área de un hexágono, A_8 de un octágono y así sucesivamente.

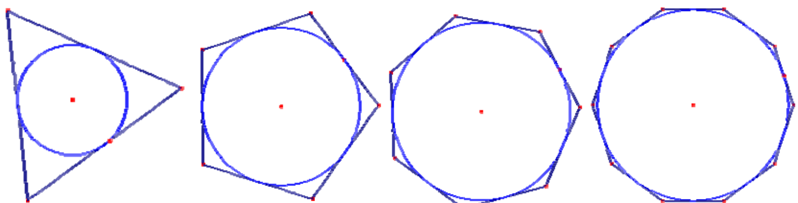
La gráfica siguiente muestra el comportamiento de A_n cuando n crece indefinidamente.



Gráfica 1.2 Comportamiento del área A_n cuando n crece indefinidamente

Caso 2 (Polígonos circunscritos en un círculo)

Consideremos de nuevo el círculo de radio R=10 unidades y cuya área es A≈314.159 unidades cuadradas. Sea, además, S_m el área de un polígono regular de m lados, $m = 3,4,5,6...$, circunscrito en A (ver Gráfica 1.3).



m=3 (Triángulo Equilátero) m=5 (Pentágono) m=7 (Heptágono) m=10 (Decágono)

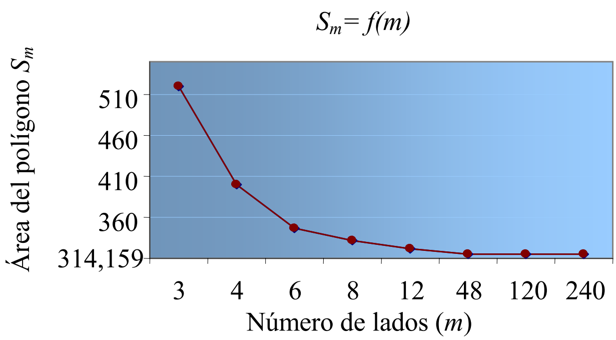
Gráfica 1.3 Polígonos de área S_m, circunscritos en un círculo de radio R=10

Los valores que toma S_m a medida que m crece indefinidamente, pueden observarse en la tabla siguiente:

Tabla 1.2 Valores que toma el área S_m del polígono cuando el número de lados *m* crece indefinidamente

n	3	4	6	8	12	48	120	240
S_m=$f(m)$	519,62	400	346,41	331,37	321,54	314,61	314,23	314,18

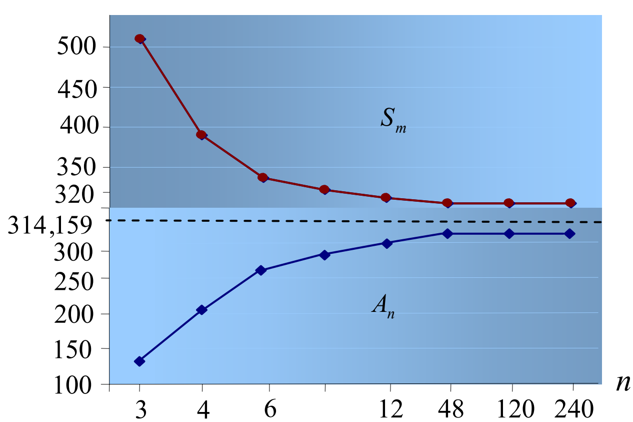
El comportamiento de S_m cuando m crece de manera indefinida podemos verlo en la siguiente gráfica:



Gráfica 1.4 Comportamiento del área S_m cuando m crece indefinidamente

Caso 3 (Análisis conjunto del comportamiento de A_n y S_m)

En la gráfica siguiente presentamos, de manera conjunta, el comportamiento de las áreas de los polígonos inscritos, A_n y de los polígonos circunscritos, S_m, en el área A, a medida que n y m crecen indefinidamente:



Gráfica 1.5 Comportamiento de las áreas A_n y S_m cuando m y n crecen indefinidamente

Preguntas para reflexionar:

Observa las gráficas 1.2, 1.4 y 1.5 y responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Si n, m son naturales mayores o iguales que tres ($n,m \geq 3$), la relación correcta entre las áreas de los polígonos regulares inscritos y circunscritos en un circulo de radio R es?
   a. $A_n = S_m$ b. $A_n < S_m$ c. $A_n > S_m$
2. Para $n, m \in N$, con $n, m \geq 3$, la relación entre el área A del círculo y el área de los polígonos inscritos y circunscritos es:
   a. $A_n \leq A \leq S_m$ b. $A_n = A = S_m$ c. $A_n < A < S_m$
3. ¿Cuál es el comportamiento de los valores de las sucesiones A_n y S_m con respecto a su decrecimiento, a medida que n y m se hacen más grandes ($n, m \in N$)?
   A_n es ___________________ S_m es___________________
   ¿A que valor se aproximan las cantidades A_n y S_m cuando n y m crecen indefinidamente?

1.1.2 Definición de límite

Observaremos en unidades posteriores, que el cálculo es una valiosa rama de las matemáticas con una amplia gama de aplicaciones. Lo que otorga dicho poder al cálculo y lo diferencia del álgebra es el concepto de límite. En esta parte introducimos este importante concepto. El enfoque que seguiremos será intuitivo, en lugar de formal.

Para ilustrar el concepto de límite, consideraremos la siguiente situación.

Situación introductoria 2 (Introducción al concepto de límite)

Supongamos que deseamos saber que pasa con la función $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ cuando x toma valores muy cercanos a 1, es decir, cuado x tiende a 1.

Aunque *f(x)* no está definida en x=1 (es decir, x=1, no está en el dominio de *f(x)* es posible calcular $f(x)$ tomando valores de x próximos a 1, tanto por la izquierda (valores menores que 1), como por la derecha (valores mayores que 1). La siguiente tabla resume el comportamiento de *f(x)* cuando x tiende a 1.

Tabla 1.3 Comportamiento de *f(x)* cuando *x* tiende a 1

x se aproxima a 1 por la izquierda → ← x se aproxima a 1 por la derecha

x	0.8	0.9	0.95	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.05	1.1
$f(x)$	2.8	2.9	2.95	2.99	2.999	?	3.001	3.01	3.05	3.10

$f(x)$ se aproxima a 3 → ← $f(x)$ se aproxima a 3

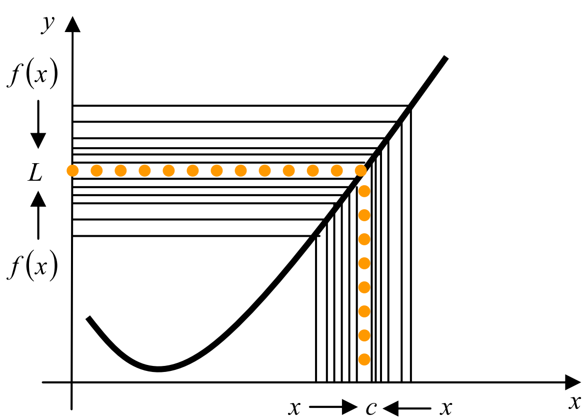
A pesar de que x no puede ser igual a 1 ($f(x)$ no está definida en x=1), podemos acercarnos arbitrariamente a 1 y, como resultado, $f(x)$ se acerca arbitrariamente a 3. De esta forma, decimos que “el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1 es 3”, y se escribe: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$

En general, el límite de $f(x)$ cuando x tiende a un número c puede definirse informalmente como sigue:

Definición

Si $f(x)$ se aproxima cada vez más a un número L cuando x se acerca cada vez más a c por cualquier lado, entonces L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a un número c. El comportamiento se escribe como: $\underset{x\to c}{Lim}\, f(x) = L$ y se lee “el límite de $f(x)$, cuando x tiende a c, es igual a L”

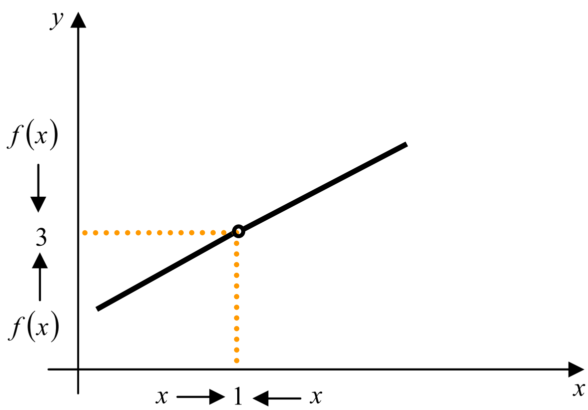
Geométricamente $\underset{x\to c}{Lim}\, f(x) = L$ significa que la altura de la gráfica $y=f(x)$ tiende a L a medida que x tiende a c (ver Gráfica 1.6).



Gráfica 1.6 Límite de una función *f(x)* cuando *x* se acerca a un número *c*

Observaciones

1. El $\underset{x\to c}{Lim}\ f(x)=L$ no depende de lo que pasa con la función $f(x)$ en $x=c$. Al hallar el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c, nunca consideramos $x=c$. De hecho, no es necesario que $f(x)$ esté definida en $x=c$, lo único que importa es el comportamiento de $f(x)$ para x próximos a c. Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$, es una recta que tiene un "hueco" en (1,3), los puntos (x,y), en la gráfica, se aproximan a este hueco cuando x se acerca a 1, por cualquiera de los lados. (Ver Gráfica 1.7).



Gráfica 1.7 Comportamiento de $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ cuando x tiende a 1

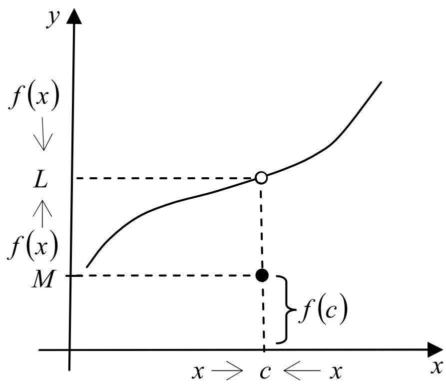
Observemos que, $f(x)$ no está definida en $x=1$, pero cuando x toma valores muy cercanos a 1, $f(x)$ toma valores muy próximos a 3, esto es, $\underset{x\to 1}{Lim}\ f(x)=3$

2. El $\underset{x \to c}{Lim}\, f(x) = L$ no es necesariamente igual a *f*(*c*), en el caso de que este exista.

   En la siguiente gráfica (Gráfica 1.8), podemos ver que

$$\underset{x \to c}{Lim}\, f(x) = L \ \ y \ \ f(c) = M$$

   Es decir, $\lim_{x \to c} f(x) \ \ y \ \ f(c)$ existen, pero $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$



Gráfica 1.8 El $\lim_{x \to c} f(x)$ y $f(c)$ existen, pero $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

3. En resumen, si el límite de *f*(*x*) cuando *x* tiende a *c* existe, esto es,

$$\lim_{x \to c} f(x) = L\,,$$

   puede darse la siguiente relación entre este valor y *f(c):*

   - Que *f*(*c*) existe y además

$$\lim_{x \to c} f(x) = L = f(c)\,,$$

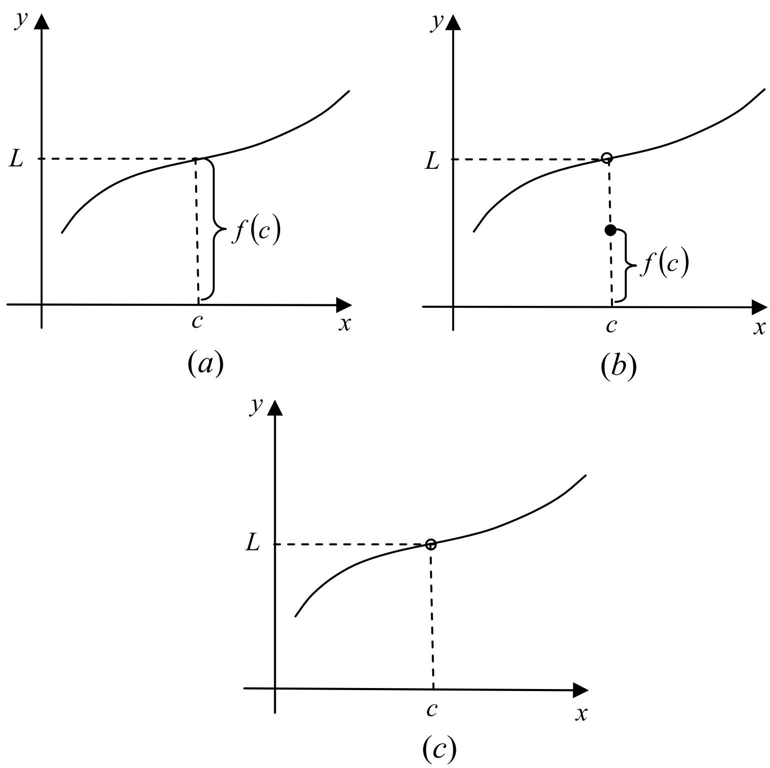
Cuando esto ocurre, decimos que la función es continua en x=c (ver gráfica 1.9 (a))

- Que f(c) exista, pero

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \neq f(c)$$

Como podemos verlo en la gráfica 1.9 (b)

- Que f(c) no esté definida (ver gráfica 1.9 (c))



Gráfica 1.9 El $\lim_{x\to c} f(x) = L = f(c)$

Ejercicio 1.1 (Estimación numérica de un límite)

Consideremos la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$

En la siguiente tabla podremos observar el comportamiento de $f(x)$ cuando x toma valores cada vez más próximos a 1 (Observemos que en x=1, $f(x)$ no está definida). Indica, en el recuadro que está en blanco en la tabla, hacia que valor tiende la función $f(x)$.

Tabla 1.4 Comportamiento de f(x) cuando x toma valores cercanos a 1

x tiende a 1 por la izquierda → ← *x* tiende a 1 por la derecha

x	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1	1,5
$f(x)$	0,6666	0,5263	0,5025	0,5002	0,5000		0,4999	0,4997	0,4975	0,4761	0,4000

$f(x)$ *tiende* a → ← $f(x)$ tiende a

Ejercicio 1.2

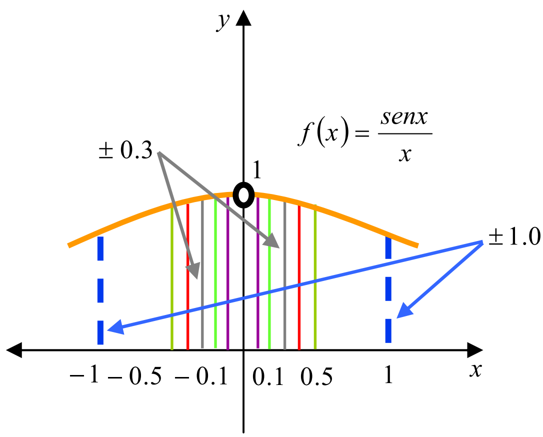
Consideremos la función $f(x) = \dfrac{senx}{x}$, donde $x \in R$ es el valor del ángulo cuya medida está dada en radianes. En la siguiente tabla mostramos los valores de $f(x)$, para algunos valores dados de x.

Tabla 1.5 Valores de $f(x)=\dfrac{senx}{x}$ para algunos valores de *x*

x	± 1.0	± 0.5	± 0.4	± 0.3	± 0.2	± 0.1	± 0.05	± 0.01	± 0.005	± 0.001
Sen x/x	0.84147	0.95885	0.9735	0.9850	0.9933	0.9983	0.9995	0.9999	0.9999	0.9999

¿Cuál es el comportamiento de *f*(*x*) cuando *x* tiende a cero?

El gráfico de esta función es el siguiente:



Gráfica 1.10 Comportamiento de $f(x)=\dfrac{senx}{x}$ cuando *x* se acerca a cero

Preguntas para reflexionar:

a. Escribe en el cuadro el valor que consideres correcto:
A partir de la Tabla 1.5 y de la Gráfica 1.10, podemos conjeturar que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x} = \boxed{}$$

b. Responde la siguiente pregunta y justifica tu respuesta. ¿La existencia del $\underset{x\to c}{Lim}\, f(x)$ depende del valor de la función en $x=c$?

Con el siguiente ejemplo mostraremos el peligro que puede correrse al presumir el valor de un límite utilizando una tabla de valores.

Ejemplo 1

Encontrar $\underset{x\to 0}{Lim}\, sen\,\dfrac{\pi}{x}$

Solución

Observemos que la función $f(x) = sen\left(\pi/x\right)$ no está definida para x=0. Veamos qué pasa si evaluamos la función para algunos valores de x próximos a cero:

- $f(1) = sen\pi = 0$
- $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = sen 2\pi = 0$
- $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = sen 3\pi = 0$
- $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = sen 4\pi = 0$
- $f\left(x = \dfrac{1}{n}\right) = sen\ n\pi = 0$ para cualquier entero n.

Observemos que si n es un número entero muy grande (positivo o negativo), entonces $x = \frac{1}{n}$ es una cantidad próxima a cero.

Con base en esta información, podríamos sentirnos tentados en presumir que

$$\underset{x \to 0}{Lím}\, sen \frac{\pi}{x} = 0$$

Pero en esta ocasión, nuestra conjetura es errónea. También se cumple que $f(x)=1$ para un número infinito de valores de x que tienden a cero. En efecto $f(x) = sen \frac{\pi}{x} = 1$ cuando $\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ con $n \in Z$, esto es cuando $x = \frac{2}{4n+1}$ (despejando x).

Por lo tanto, $f\left(x = \frac{2}{4n+1}\right) = 1$, para una numero infinito de valores de x próximos a cero (cuando n es un entero grande, positivo o negativo, $x \to 0$).

Debido a que los valores de $f(x)$ no tienden a un número fijo cuando x tiende a cero, podemos afirmar que

$$\underset{x \to 0}{Lím}\, Sen \frac{\pi}{x}$$

no existe.

Para el cálculo de un límite utilizaremos algunas propiedades de los límites que nos permiten calcular el valor del límite, sin necesidad de utilizar tablas de valores, y así evitarnos posibles errores, como el presentado en el ejemplo anterior. A continuación presentamos dichas propiedades.

1.1.3 Propiedades de los límites

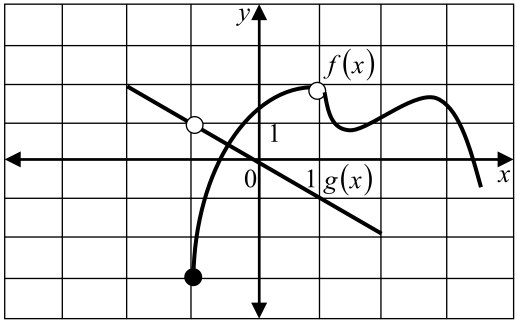
Si c es una constante y $\underset{x \to a}{Lim} f(x)$ y $\underset{x \to a}{Lim} g(x)$ existen, entonces se tienen las siguientes propiedades para los límites:

Tabla 1.6 Propiedades de los límites

Nombre	Propiedad
Límite de una constante	$\underset{x \to a}{Lím}\, c = c$
Límite de una suma	$\underset{x \to a}{Lím}[\mathrm{f(x)} + \mathrm{g(x)}] = \underset{x \to a}{Lím}\, \mathrm{f(x)} + \underset{x \to a}{Lím}\, \mathrm{g(x)}$
Límite de un producto	$\underset{x \to a}{Lím}\left[f(x)g(x)\right] = \underset{x \to a}{Lím}\, f(x) \cdot \underset{x \to a}{Lím}\, g(x)$
Límite de un cociente	$\underset{x \to a}{Lím} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\underset{x \to a}{Lím}\, f(x)}{\underset{x \to a}{Lím}\, g(x)};\ g(x) \neq 0$

Ejemplo 1

Use las propiedades de los límites y las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$, de la siguiente figura, para evaluar cada uno de los límites que se dan a continuación:



Gráfica 1.11 Gráficas de las funciones *f*(*x*) y *g*(*x*) para el ejemplo 1

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)+g(x)\right]$

Solución

A partir de las gráficas de *f*(*x*) y *g*(*x*), puede verse que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ y $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=-1$

Por tanto, se tiene, aplicando la propiedad del límite de una suma que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left[f(x)+g(x)\right] &= \lim_{x\to 1} f(x)+\lim_{x\to 1} g(x)\\ &=2+(-1)\\ &=1\end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)g(x)}{3}$

Solución

Analizando, de nuevo, las gráficas de *f*(*x*) y *g*(*x*), observamos que $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-3$ y, haciendo uso de las

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS DE REPASO
(LA DERIVADA Y SUS APLICACIONES)

7. -6

8. $14x$

9. $8-10x$

10. $3x^2-1$

11. $-\dfrac{1}{2x^2}$

12. 0

13. $\dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

14. $-\dfrac{1}{(x-2)^2}$

15. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

16. $\dfrac{-2}{x^3}-1$

17. $\dfrac{6x}{(1-x^2)^2}$

18. $-\dfrac{1}{(x-1)^2}$

19. $\cos x$

20. $-\operatorname{sen} x$

21. $6x+5$

22. $2x^2+x+1$

23. $\dfrac{2}{3}x^{-1/3}-10x^{3/2}$

24. $3x-1$

25. $1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

26. $12x^2-24x-40$

27. $\dfrac{10}{(1-3x)^2}$

28. $\dfrac{x^2+2x+8}{(x+1)^2}$

29. 1

30. $6x^5-30x$

31. $x(2\operatorname{sen}x+x\cos x)$

32. $\dfrac{\cos x+x\ln x\operatorname{sen}x}{x\cos^2 x}$

33. $e^x(\tan x+\sec^2 x)$

34. $\dfrac{\sec x(x\tan x-3)}{x^4}$

35. $x(\ln x^2+x)$

36. $\dfrac{e^x(2x^2-4x+1)}{2x^2+1}$

37.

a. $2x+5$

b. $m=13$

c. $y=13x-50$

d. $\left(-\frac{5}{2},-\frac{1}{4}\right)$

e. $(-1,2)$, $y=3x+5$

38.

a. $-2x+12$

b. $(6,1)$

c. $x>6$

d. $x<6$

Cálculo diferencial: límites y derivadas

se terminó de imprimir en julio de 2008.
Para su elaboración se utilizó papel Bond de 75 g,
en páginas interiores, y cartulina Propalcote 240 g para la carátula.
Las fuentes tipográficas empleadas son Times New Roman 11 puntos,
en texto corrido, y Myriad Pro 14 puntos en títulos.