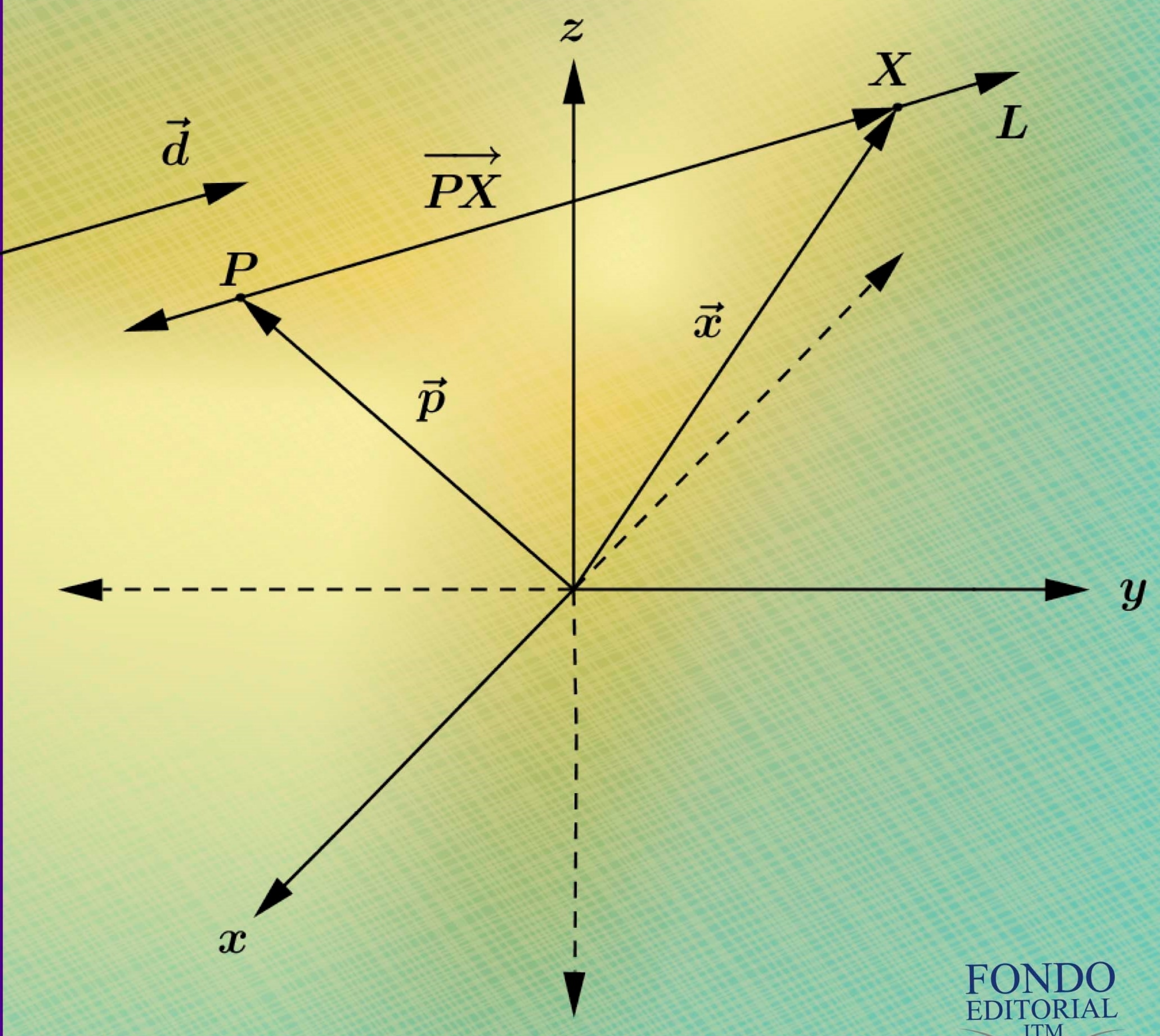
MÓDULO DE GEOMETRÍA VECTORIAL

FRANCISCO JAVIER CÓRDOBA GÓMEZ
PABLO FELIPE ARDILA ROJO



FONDO EDITORIAL ITM

MÓDULO DE GEOMETRÍA VECTORIAL

FRANCISCO JAVIER CÓRDOBA GÓMEZ ■ PABLO FELIPE ARDILA ROJO

Córdoba Gómez, Francisco Javier
Módulo de geometría vectorial / Francisco Javier Córdoba Gómez, Pablo Felipe Ardila Rojo.--1a ed. – Medellín : Fondo Editorial ITM, 2014.
149 p. -- (Colección Textos académicos)

Incluye referencias bibliográficas
ISBN 978-958-8743-52-3

1. Geometría vectorial 2. Vectores I. Ardila Rojo, Pablo Felipe II. Tít. III. Serie

516.182 SCDD 21 ed.

Catalogación en la publicación - Biblioteca ITM

Edición: octubre 2014
ISBN: 978-958-8743-52-3

Hechos todos los depósitos legales

Impresión
EDICIONES DIARIO ACTUAL
Editado en Medellín, Colombia
Fondo Editorial ITM
Instituto Tecnológico Metropolitano
Calle 73 No. 76A 354
Tel.: (574) 440 5197
www.itm.edu.co

Resumen

La geometría vectorial hace parte de la formación básica de cualquer ingeniero o tecnólogo y en especial en carreras de perfil técnico. Pretendemos con este módulo reforzar los conceptos escenciales que deben hacer parte de cualquier profesional en áreas tecnológicas o ingenieriles. El módulo trabaja inicialmente, con los conceptos básicos de vectores, en el plano y luego en el espacio. Se muestran las aplicaciones en rectas y planos, con sus repectivas ecuaciones. Hacemos el paralelo entre vectores coordenados y geométricos con el fin de unificar conceptos. Se finaliza con una lista de ejercicios planteados para que el estudiante mediante una práctica comprensiva domine los aspectos conceptuales.

Contenido

Introducción

El tema de los vectores es de amplia aplicación en diferentes campos, además de las matemáticas, como en la física, la biología y en general en asignaturas relacionadas con distintas ingenierías como civil, mecánica, entre otras. Este texto presenta, de manera práctica, las características esenciales de la Geometría Vectorial, las operaciones entre vectores y sus aplicaciones. Se incluyen algunas demostraciones necesarias para la comprensión de conceptos y su posterior aplicación; otras demostraciones se dejan como ejercicio para que el estudiante ponga en juego diferentes estrategias cognitivas.

Adicionalmente, hay una sección dedicada a pruebas de la Geometría Euclidiana y Trigonometría usando la Geometría Vectorial de una manera práctica y sencilla. Dependiendo del desarrollo del curso y del tiempo, se puede trabajar en mayor o menor profundidad este tema.

El texto se ha dividido en tres capítulos iniciando con vectores geométricos para pasar luego a vectores coordenados. Una vez se han caracterizado los vectores coordenados tanto en $\mathbb{R}^2$ como en $\mathbb{R}^3$, se llega a los diferentes productos entre vectores: producto escalar y producto vectorial. Estos productos sirven a su vez como base para el trabajo con rectas y planos, que constituyen la parte final del texto.

En cada capítulo se presentan algunos ejemplos resueltos y se dejan varias actividades para realizar como ejercicios y problemas, los cuales han sido adaptados de diferentes fuentes y del trabajo en el aula en diferentes instituciones de educación superior (Universidad Nacional de Colombia, Escuela de Ingeniería de Antioquia e Instituto Tecnológico Metropolitano-ITM).

En el desarrollo de los ejemplos y también dentro del texto se han incluido algunas preguntas, que no solo orientan en la comprensión sino que también exigen una revisión permanente de lo estudiado previamente. Es una forma de ir retando al estudiante para que vaya regulando su proceso.

Un elemento adicional que le agregará valor al texto, y que se implementará posteriormente a manera de complemento interactivo, es el trabajo con aplicaciones en GeoGebra. El estudiante tendrá la posibilidad, de manera interactiva y colaborativa, de construir, verificar y conjeturar sobre problemas y ejercicios propuestos.

CAPÍTULO 1

Vectores geométricos

1.1 Aproximación al concepto

La palabra vector viene del latín vector, *vectoris* y este a su vez de *veho*, verbo que significa "el que acarrea, el que conduce, el que transporta", según la etimología de la palabra. En medicina, por ejemplo, un vector es un portador, un vehículo intermedio. Por ejemplo, en la trasmisión de la malaria el mosquito (Anopheles) sirve como un vector que lleva y transfiere el agente contagioso (Plasmodium) a una persona sana mediante una picadura.

En matemáticas un vector es un objeto matemático, es una abstracción que sirve para representar entes físicos. En la geometría vectorial se presenta el vector como un objeto matemático, una "cantidad" que posee dos características o propiedades fundamentales: magnitud y dirección, y de forma asociada a la dirección el sentido (es decir, de dónde parte y hasta dónde llega).

En el campo de la física y la ingeniería, se usan principalmente dos clases de magnitudes: las magnitudes escalares y las magnitudes vectoriales. Las primeras quedan completamente determinadas por su medida o valor numérico, en función de una unidad adecuada. Por ejemplo: la masa, la densidad, la temperatura, el tiempo, el volumen, la rapidez, el área, etc., estas magnitudes no requieren información adicional para ser interpretadas y utilizadas en una determinada situación, basta con conocer su valor numérico y la unidad de medidad.

Las segundas, en cambio, no pueden definirse únicamente por su valor numérico, sino que requieren que se precise además otra característica, la noción de dirección (un ángulo o inclinación respecto a una línea de referencia). Por ejemplo, para caracterizar una velocidad es esencial indicar su dirección tanto como su valor, es decir, su magnitud. Así, la velocidad de un barco tiene una magnitud (rapidez del movimiento) que puede ser fija o variable, y una dirección (que determina el curso del barco). Estas dos características definen con suficiente precisión la magnitud vectorial velocidad. Otros ejemplos de magnitudes vectoriales son: fuerza, momento, desplazamiento, aceleración, campo eléctrico, campo magnético, etc. Así mismo, los vectores, no se rigen por las mismas propiedades para las operaciones básicas que se cumplen con los números reales, sino que siguen ciertas reglas que se verán más adelante.

El estudio de los vectores puede hacerse desde un punto de vista geométrico o analítico. En este caso, iniciaremos con el estudio geométrico de manera general, y con un poco más de detalle, continuaremos con el estudio analítico.

1.2 Vectores geométricos

Geométricamente un vector puede representarse por un segmento rectilíneo dirigido, es decir, que interesa tanto su longitud como su sentido (positivo o negativo), así el segmento $\overline{AB}$ es contrario al segmento $\overline{BA}$, (pero geométricamente representan el mismo segmento) en el primer caso el punto inicial es A y el punto final es B, en el segundo, el punto inicial es B y el punto final es A. La representación gráfica de un vector es una flecha, que tiene punto inicial y punto final. En la Figura 1[1] se tiene el vector $\overrightarrow{AB}$.

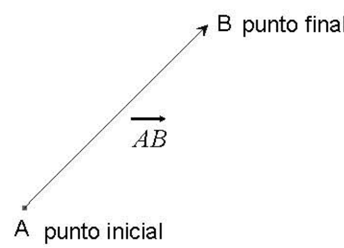


Figura 1

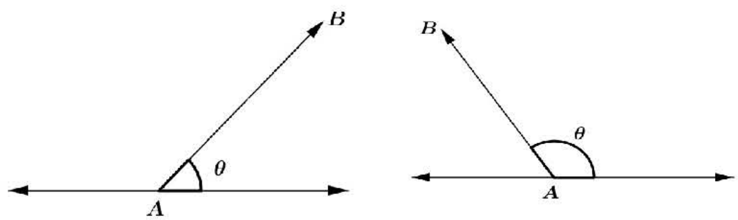
Para nombrar un vector se puede utilizar la notación con el punto inicial y el punto final como $\overrightarrow{AB}$ o una letra minúscula o mayúscula con una flecha encima $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{A}$. En algunos ocasiones tambien se representa con una letra minúscula resaltada (negrita) $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Definición 1.2.1 (Magnitud o norma de un vector) *Es la longitud del segmento $\overline{AB}$, definida en una unidad de medida y con una escala seleccionada. La magnitud del vector $\overrightarrow{AB}$ se representa por $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, es un valor que siempre es positivo. Por ejemplo $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 5\ N$ ó $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 120\ km/h$.*

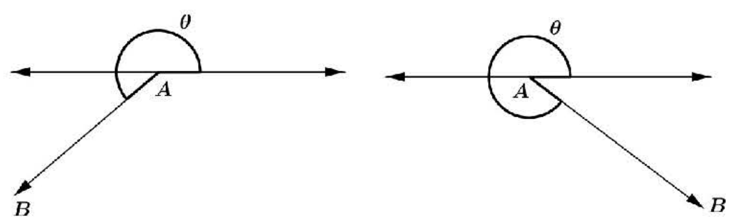
Definición 1.2.2 (Dirección de un vector) *Es la misma de la recta que contiene al vector (dado que todo vector está sobre una recta imaginaria). Si*

[1]Todas las Figuras de este texto han sido realizadas por los autores

el vector está en el plano, la dirección está determinada por el ángulo menor, no negativo, que se forma entre el vector y una línea de referencia cualquiera, que por facilidad se toma horizontal, trazada por su punto inicial, medido de forma contraria al movimiento de las manecillas del reloj, desde la horizontal hasta el vector con, $0° \leq \theta < 360°$. *En las Figuras 2a, 2b, 2c y 2d la dirección del vector* $\overrightarrow{AB}$ *es* $dir(\overrightarrow{AB}) = \theta$.



Figuras 2a y 2b



Figuras 2c y 2d

Dos vectores tienen dirección opuesta o contraria cuando la dirección de uno de ellos difiere de la del otro en 180°. Por ejemplo si $dir(\overrightarrow{a}) = 130°$ y $dir(\overrightarrow{b}) = 310°$, luego sus direcciones son contrarias, pues $310° - 130° = 180°$. Ver Figura 3.

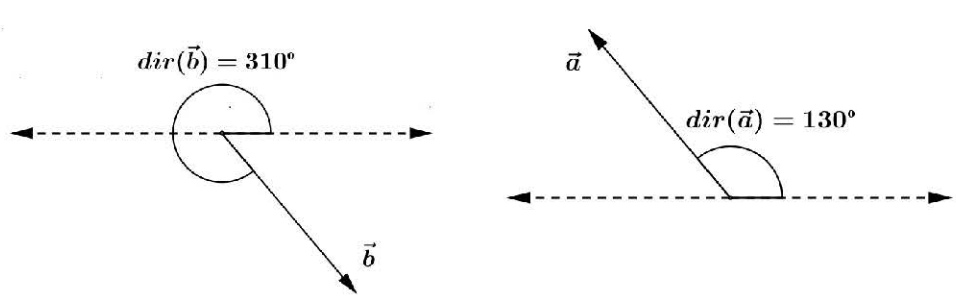


Figura 3

Definición 1.2.3 (Sentido de un vector) *El sentido está indicado por el de la flecha y queda determinado por el punto inicial y el punto final (el sentido del vector* $\overrightarrow{AB}$ *es del punto inicial* A *al punto final* B*). En términos generales para caracterizar un vector nos referiremos a su magnitud y a su dirección, el sentido se especificará cuando sea necesario.*

Dos vectores son iguales si y sólo si tienen igual magnitud y dirección. Así $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, si y sólo si

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{CD}\right\|, dir(\overrightarrow{AB}) = dir(\overrightarrow{CD})$$

Ver Figura 4.

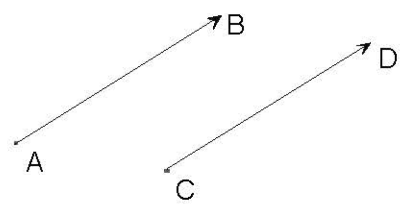


Figura 4

En la Figura 4 los vectores son iguales, y los puntos iniciales A y C no coinciden. Todos los vectores que sean iguales al vector $\overrightarrow{AB}$ forman un conjunto de vectores llamado **vectores libres**, es decir, todos los vectores que tengan la misma magnitud y dirección del vector $\overrightarrow{AB}$ representan el mismo vector.

Lo anterior es útil, ya que permite que un vector se pueda representar en otro lugar del plano o del espacio por otro vector de igual magnitud y dirección, es decir, es como si se pudiera trasladar un vector conservando su magnitud y dirección. Por lo tanto, para efectos de alguna operación matemática, es lo mismo trabajar con el vector $\overrightarrow{AB}$ que trabajar con el vector $\overrightarrow{CD}$.

Definición 1.2.4 (Igualdad entre vectores) *La igualdad entre vectores es una relación de equivalencia, esto implica que cumple las siguientes tres propied*

1. *Reflexiva:* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$
2. *Simétrica: si* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *entonces,* $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$
3. *Transitiva: si* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *y* $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ *entonces,* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$

1.3 Álgebra de vectores

Al igual que con otros objetos matemáticos, con los vectores también se pueden realizar algunas operaciones matemáticas teniendo en cuenta ciertas propiedades. Las operaciones definidas son: suma, resta (aunque es un caso especial de la suma) y multiplicación de un escalar por un vector. La división entre vectores no está definida como operación.

1.3.1 Suma y métodos para sumar vectores

La suma de vectores, como se había mencionado anteriormente, no obedece las leyes de la aritmética y álgebra ordinarias, es decir, no se pueden sumar vectores como si fuesen números reales, puesto que no lo son. Para sumar vectores geométricos se pueden emplear diferentes métodos y se aplican en algunos casos las layes del coseno y del seno de manera normal, en las cuales se trabaja con magnitudes vectoriales.

1.3.1.1 Método del triángulo

Dados dos vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$, el vector suma (o resultante) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, se obtiene de la siguiente manera: se ubican los vectores de tal modo que el punto final de uno de ellos coincida con el punto inicial del otro, es decir, se dibuja el vector $\overrightarrow{a}$ y desde su punto final se dibuja el vector $\overrightarrow{b}$ (no olvidar que al ser vectores libres conservan su magnitud y dirección), luego el vector $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ será el vector que va desde el punto inicial de $\overrightarrow{a}$ hasta el punto final de $\overrightarrow{b}$. Ver Figura 5.

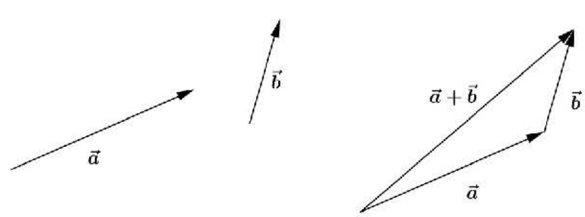


Figura 5

1.3.1.2 Método del polígono

Para sumar tres o más vectores (Figura 6a), se aplica sucesivamente el método del triángulo (se suman dos de ellos y la resultante de esta suma se suma con el tercero, y así con los demás), lo cual equivale a colocar un vector a continuación del otro, de esta manera el vector suma será el vector que va del punto inicial del primero hasta el punto final del último. Figura 6b.

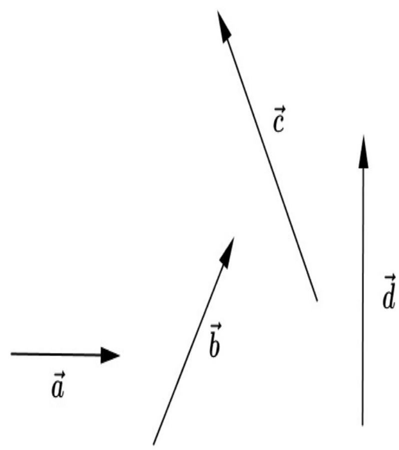


Figura 6a

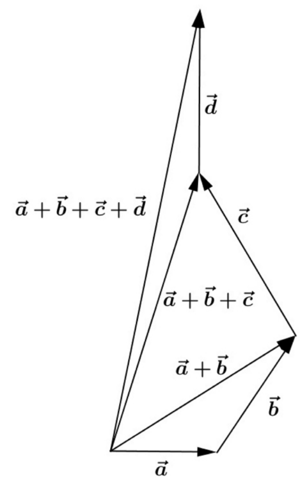


Figura 6b

Otra alternativa es poner los vectores uno a continuación del otro, conservando las respectivas magnitudes y direcciones. El vector resultante es el que se obtiene de unir el punto inicial $\overrightarrow{a}$ de con el punto final de $\overrightarrow{d}$ (Figura 7). Si los vectores se representan a escala, gráficamente se puede obtener el vector resultante, su magnitud y dirección.

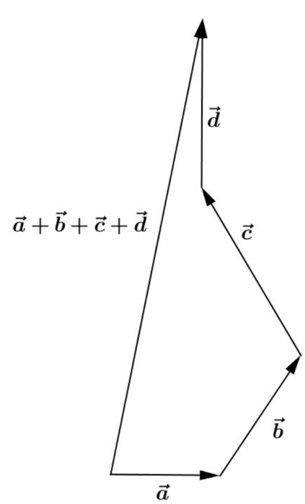


Figura 7

Obsérvese que en la Figura 6 y la Figura 7, los vectores resultantes son iguales.

1.3.1.3 Método del paralelogramo

Para sumar dos vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$, se trasladan de tal manera que sus puntos iniciales coincidan y se completa el paralelogramo determinado por ellos, trazando paralelas por sus puntos finales. El vector $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$, será el que va del origen común de $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ hasta el vértice opuesto del paralelogramo formado. En realidad el vector resultante está sobre la diagonal del paralelogramo. Para calcular su magnitud y dirección se puede utilizar también la ley del coseno. Ver Figura 8.

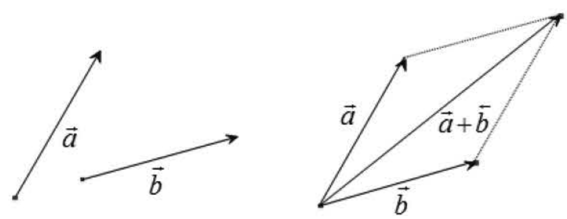


Figura 8

Ejemplo 1.3.1 *Sean los vectores* $\overrightarrow{p}$ *y* $\overrightarrow{q}$ *con*

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{p}\| &= 3, \|\overrightarrow{q}\| = 4, \\ dir(\overrightarrow{p}) &= 40^\circ, dir(\overrightarrow{q}) = 250^\circ \end{aligned}$$

Encontrar el vector resultante $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}$, *su magnitud y dirección.*

Solución

En este caso se va a utlilizar el método del triángulo vectorial. Veamos primero cada uno de los vectores en su posición original (Ver Figura 9).

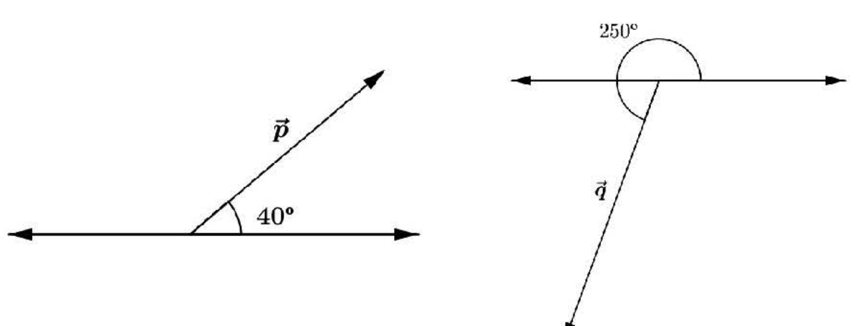


Figura 9

Ahora, y por facilidad en la representación, se pueden ubicar los dos vectores a partir de un mismo punto, conservando por supuesto su magnitud y dirección (Ver Figura 10).

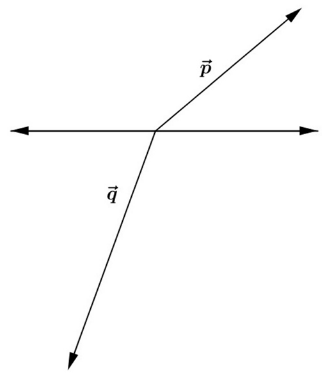


Figura 10

Si los vectores son graficados a escala (con dirección y magnitudes medidas) se podría determinar la magnitud y dirección del vector resultante $\overrightarrow{r}$. De manera analítica encontremos $\|\overrightarrow{r}\|$ utilizando la ley del coseno.

Se ha dibujado un vector igual al vector $\overrightarrow{q}$, (magnitud y dirección), haciendo coincidir el punto final de $\overrightarrow{p}$ con el punto inicial de $\overrightarrow{q}$. El vector resultante $\overrightarrow{r}$, va desde el punto inicial de $\overrightarrow{p}$ hasta el punto final de $\overrightarrow{q}$.

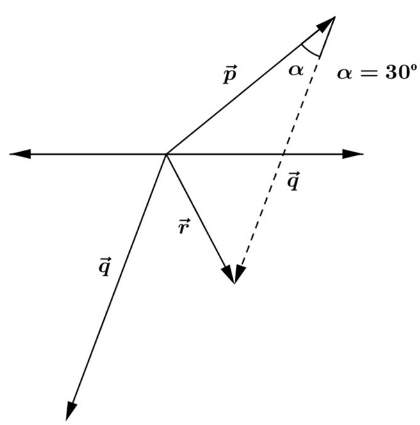


Figura 11

¿Por qué $\alpha = 30°$? (Trace por el punto final de $\overrightarrow{p}$ una paralela a la línea horizontal de referencia, use ángulos entre paralelas). Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{r}\|^2 &= \|\overrightarrow{p}\|^2 + \|\overrightarrow{q}\|^2 - 2\,\|\overrightarrow{p}\|\,\|\overrightarrow{q}\|\cos(\alpha) \\
\|\overrightarrow{r}\|^2 &= 3^2 + 4^2 - 2(3)(4)\cos(30°) \\
\|\overrightarrow{r}\|^2 &= 9 + 16 - 24\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
\|\overrightarrow{r}\|^2 &= 25 - 12\sqrt{3} \\
\|\overrightarrow{r}\| &= \sqrt{25 - 12\sqrt{3}} \\
\|\overrightarrow{r}\| &= 2.05
\end{aligned}$$

Encontremos ahora la dirección de $\overrightarrow{r}$, con

$$dir(\overrightarrow{r}) = \theta$$

(Ver Figura 12).

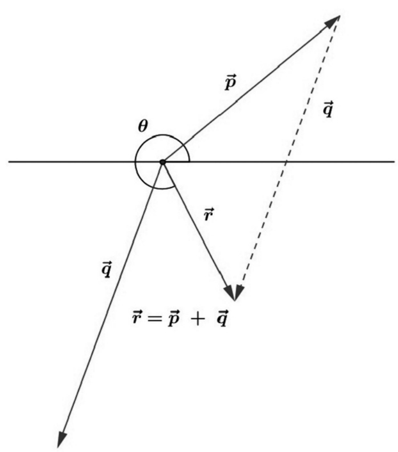


Figura 12

En la Figura 13 se observa que

$$dir(\overrightarrow{r}) = \theta = 360° - \phi$$

pero $\phi = \beta - \delta$, con $\delta = 40°$, que es precisamente la dirección del vector $\overrightarrow{p}$.

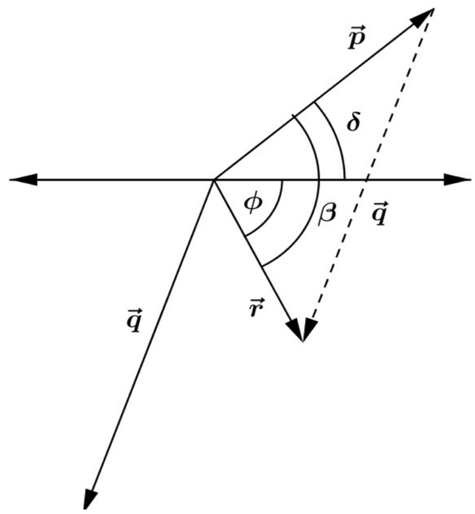


Figura 13

Para hallar el ángulo β se puede aplicar la ley de senos o la ley del coseno, como se ve en la Figura 14.

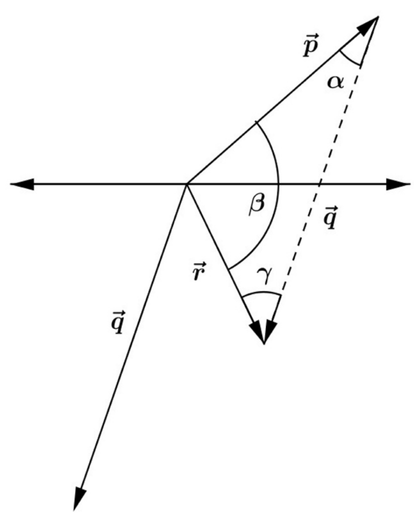


Figura 14

$$\frac{sen\,(\beta)}{\|\overrightarrow{q}\|} = \frac{sen\,(\alpha)}{\|\overrightarrow{r}\|} = \frac{sen\,(\gamma)}{\|\overrightarrow{p}\|}$$

tomando los dos primeros términos de esta igualdad se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{sen\,(\beta)}{4} &= \frac{sen(30°)}{2.05} \\ sen(\beta) &= \frac{4sen(30°)}{2.05} \\ sen(\beta) &= 0.98 \\ \beta &= sen^{-1}\,(0.98) = 77.3° \end{aligned}$$

Aunque el valor de este ángulo está bien calculado, no es el valor real ya que en el intervalo de 0° a 360° existe otro ángulo cuyo seno es también 0.98 y que es el suplemento del ángulo anterior, es decir, $180° - 77.3° = 102.7°$. ¿Cómo saber si está bien calculado o no? Para ello se puede encontrar el ángulo γ, mediante la ley de senos nuevamente, y verificar si la suma de esos ángulos es 180°. Al hacer estos cálculos obtenemos que:

$\alpha + \beta + \gamma = 30° + 77.3° + 47.0 = 154.3°$, por lo tanto el valor real de β es 102.7° y no 77.3°.

Tal como se había mencionado anteriormente

$dir(\overrightarrow{r}) = \theta = 360° - \phi$, pero $\phi = \beta - \delta$, con $\delta = 40°$ se tiene que $\phi = \beta - \delta = 102.7° - 40° = 62.7°$, para obtener finalmente que:

$dir(\overrightarrow{r}) = \theta = 360° - \phi$

$dir(\overrightarrow{r}) = 360° - 62.7° = 297.3°$

Si se quiere evitar el problema de saber si el ángulo es el correcto o no cuando se usa la ley de senos, basta con encontrar el valor del ángulo utilizando la ley del coseno, tal como se muestra a continuación:

$$\|\overrightarrow{q}\|^2 = \|\overrightarrow{p}\|^2 + \|\overrightarrow{r}\|^2 - 2\,\|\overrightarrow{p}\|\,\|\overrightarrow{r}\|\cos(\beta)$$

Encuentre el valor del ángulo β a partir de la expresión anterior (el valor del ángulo puede diferir dependiendo del orden de las operaciones y de las cifras decimales que se tomen), compare con el valor obtenido previamente.

Nota 1.3.1 *1. Si* $\overrightarrow{a}$ *y* $\overrightarrow{b}$ *tienen la misma dirección entonces:*

$$\left\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right\| = \|\overrightarrow{a}\| + \left\|\overrightarrow{b}\right\|$$

2. Si $\overrightarrow{a}$ *y* $\overrightarrow{b}$ *tienen dirección contraria, entonces:*

a. $\left\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right\| = \|\overrightarrow{a}\| - \left\|\overrightarrow{b}\right\|, \quad si \ \|\overrightarrow{a}\| \geq \left\|\overrightarrow{b}\right\|$

b. $\left\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right\| = \left\|\overrightarrow{b}\right\| - \|\overrightarrow{a}\|, \quad si \ \|\overrightarrow{a}\| \leq \left\|\overrightarrow{b}\right\|$

c. *Lo anterior también se puede escribir como*

$$\left\| \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \right\| = \left| \left\| \overrightarrow{b} \right\| + \left\| \overrightarrow{a} \right\| \right|$$

1.3.2 Vector nulo

En algunos casos al sumar dos vectores, se puede obtener como resultado un vector cuyo punto inicial y final coincidan. Esto ocurre cuando los vectores tienen igual magnitud pero dirección contraria. Ver Figura 15.

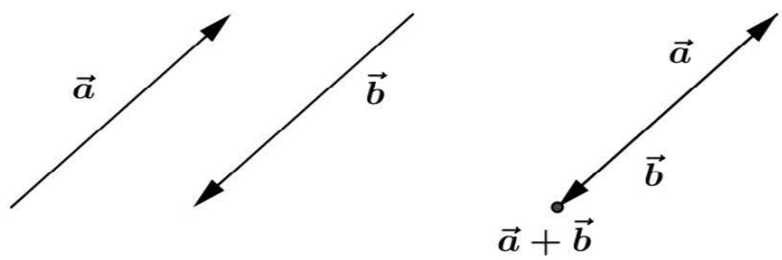


Figura 15

En este caso, geométricamente, la resultante de la suma es un punto, es decir, la magnitud del vector resultante $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ es $\|\overrightarrow{r}\| = 0$.

Simbólicamente, el vector cero o nulo se representa como $\overrightarrow{o}$. A este vector no se le puede asignar una dirección, y es tal que $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{o} = \overrightarrow{a}$, este vector es el módulo para la suma de vectores.

Nota 1.3.2 *Si* $\overrightarrow{a}$ *y* $\overrightarrow{b}$ *son no nulos y no paralelos entonces se cumple que*

$$\left\| \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \right\| < \|\overrightarrow{a}\| + \left\| \overrightarrow{b} \right\|$$

que se conoce como la desigualdad triangular.

1.3.3 Vector unitario o versor

Todo vector cuya magnitud es 1 se llama vector unitario. Se dice entonces que el vector $\overrightarrow{p}$ es unitario si y solo sí $\|\overrightarrow{p}\| = 1$.

1.3.4 Ángulo entre dos vectores

Sean $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ vectores no nulos, el ángulo entre ellos θ, es el menor ángulo formado por dichos vectores cuando sus puntos iniciales se hacen coincidir (aún cuando los vectores no se corten, puesto que se pueden trasladar). El valor de este ángulo es $0° \leq \theta \leq 180°$. Figura 16.

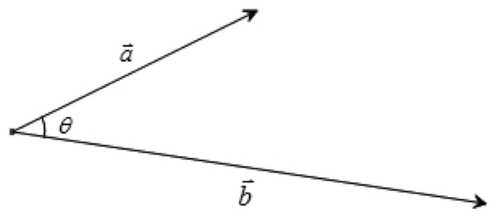


Figura 16

1.3.5 Vectores paralelos (primera parte)

Dos vectores no nulos $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son paralelos si tienen la misma dirección o dirección contraria, lo cual también es cierto si están en la misma línea de acción (Figura 17). Ya que al vector nulo no se le puede asignar dirección, se dice que es paralelo así mismo. Simbólicamente:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} \quad &\| \quad \overrightarrow{b} \text{ si } dir(\overrightarrow{a}) = dir(\overrightarrow{b}) \text{ ó} \\ \overrightarrow{a} \quad &\| \quad \overrightarrow{b} \text{ si } dir(\overrightarrow{a}) = dir(\overrightarrow{b}) \pm 180° \end{aligned}$$

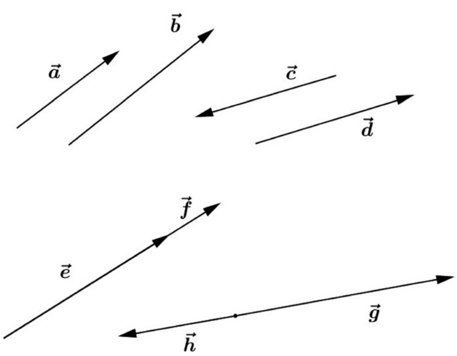


Figura 17

1.3.6 Opuesto o inverso aditivo de un vector

Sea $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{o}$, se define el opuesto o inverso aditivo de $\overrightarrow{a}$, como aquel vector que tiene la misma magnitud de $\overrightarrow{a}$ pero dirección contraria, y se denota como $-\overrightarrow{a}$. Se cumple que $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{o}$ y $\|-\overrightarrow{a}\| = \|\overrightarrow{a}\|$. El opuesto del vector $\overrightarrow{AB}$ es $-\overrightarrow{BA}$, es decir, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ ya que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{o}$ (Figura 18).

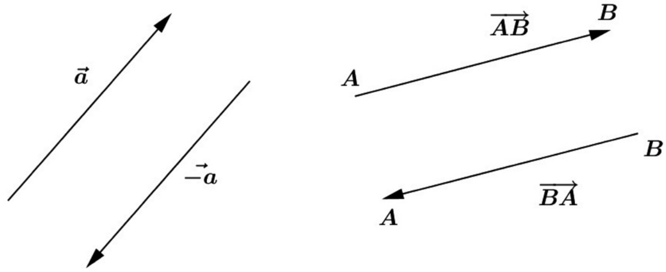


Figura 18

1.3.7 Resta y métodos para la resta

Dados dos vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$, se define la resta de $\overrightarrow{a}$ con $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, como la suma de $\overrightarrow{a}$ con el inverso aditivo de $\overrightarrow{b}$:

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b})$$

En este caso para hallar magnitud y dirección de vector resultante se procede igual que en la suma. Ver Figura 19.

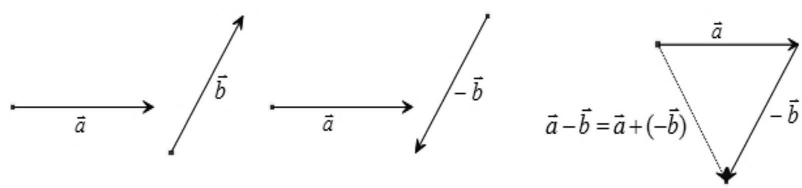


Figura 19

Existe una forma alternativa para restar vectores y es simplemente hacerlos coincidir en sus puntos iniciales. El vector diferencia será el que va desde el punto final de uno hasta el punto final del otro. Figura 20.

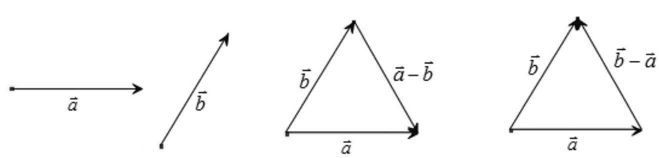


Figura 20

Como se observa en ambos casos se cumple que:

$$\overrightarrow{b} + (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a} \text{ y } \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) = \overrightarrow{b}$$

En este caso para hallar la margnitud y dirección del resultante de la resta se procede igual que en la suma.

1.3.8 Propiedades de la suma de vectores

Sea V el conjunto de los vectores geométricos . Si $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c} \in V$ entonces:

a. La suma de dos vectores es un vector que está determinado de forma única y que también pertenece a V, es decir, la suma de vectores es una operación interna (Es decir el conjunto formado por los vectores es cerrado bajo la suma)

b. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$

c. $\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = (a + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = a + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$

d. Existe un único vector $\overrightarrow{o} \in V$, tal que $\overrightarrow{o} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{o} = \overrightarrow{a}$

e. Para todo $\overrightarrow{a} \in V$, existe $-\overrightarrow{a} \in V$, que cumple con:

$$\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{o} = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a}$$

1.3.9 Producto de un vector por escalar

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, y $\overrightarrow{a}$ un vector no nulo. El vector $\lambda\overrightarrow{a}$ es un múltiplo escalar de $\overrightarrow{a}$ y cumple que:

a. El vector $\lambda\overrightarrow{a}$ tiene la misma dirección de $\overrightarrow{a}$ si $\lambda > 0$

b. El vector $\lambda\overrightarrow{a}$ tiene dirección contraria de $\overrightarrow{a}$ si $\lambda < 0$

c. La magnitud de $\lambda\overrightarrow{a}$ es tal que $\|\lambda\overrightarrow{a}\| = |\lambda| \, \|\overrightarrow{a}\|$

En la Figura 21 se muestran algunos casos

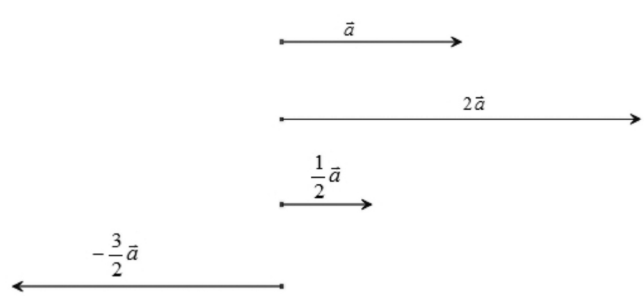


Figura 21

Se observa de la figura anterior que:
d. $\|\lambda\overrightarrow{a}\| > \|\overrightarrow{a}\|$, si $|\lambda| > 1$, (es decir si $\lambda > 1$ ó si $\lambda < -1$)
e. $\|\lambda\overrightarrow{a}\| < \|\overrightarrow{a}\|$, si $|\lambda| < 1$, (es decir $-1 < \lambda < 1$)

Tenga presente que entre el escalar y el vector no se coloca ningún símbolo para indicar el producto.

1.3.10 Vectores paralelos (segunda parte)

Dos vectores no nulos son paralelos si y solo si uno de ellos es múltiplo escalar del otro.

Simbólicamente,

$$\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{b} \text{ ó } \overrightarrow{b} = \alpha\overrightarrow{a}$$

con λ y α números reales diferentes de cero.

1.3.11 Propiedades del producto de un vector por un escalar

Teorema 1.3.1 *Sea V el conjunto de los vectores geométricos. Si $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V$, y $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, con $\alpha, \lambda \neq 0$, entonces:*
a. $(\lambda\alpha)\overrightarrow{a} = \lambda(\alpha\overrightarrow{a}) = \alpha(\lambda\overrightarrow{a})$
b. $(\lambda + \alpha)\,\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \alpha\overrightarrow{a}$
c. $\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$
d. $1(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a}$ *y* $-1(\overrightarrow{a}) = -\overrightarrow{a}$
e. $0\overrightarrow{a} = \overrightarrow{o}$ *y* $\lambda\overrightarrow{o} = \overrightarrow{o}$

A continuación se demuestra la primera igualdad de la propiedad **a.**, las demás propiedades quedan como ejercicio:

Prueba. Hipótesis: se asumirá que $\lambda > 0$ y $\alpha < 0$, esto es $\lambda\alpha < 0$.

Tesis: $(\lambda\alpha)\overrightarrow{a} = \lambda(\alpha\overrightarrow{a})$, esto es equivalente a demostrar que los vectores $(\lambda\alpha)\overrightarrow{a}$ y $\lambda(\alpha\overrightarrow{a})$ tienen igual magnitud y dirección.

	Afirmación	**Razón**
(1)	$\|(\lambda\alpha)\overrightarrow{a}\| = \lvert\lambda\alpha\rvert\,\|\overrightarrow{a}\|$	Definición de magnitud del producto por escalar
(2)	$= \lvert\lambda\rvert\,\lvert\alpha\rvert\,\|\overrightarrow{a}\|$	Propiedad del valor absoluto
(3)	$= \lvert\lambda\rvert\,\|\alpha\overrightarrow{a}\|$	Propiedad del producto por escalar
(4)	$= \|\lambda(\alpha\overrightarrow{a})\|$	Propiedad del producto por escalar

Por tanto, $\|(\lambda\alpha)\overrightarrow{a}\| = \|\lambda(\alpha\overrightarrow{a})\|$. Veamos ahora que ambos vectores poseen la misma dirección

	Afirmación	**Razón**
(1)	$dir((\lambda\alpha)\overrightarrow{a}) = dir(-\overrightarrow{a})$	Ya que $\lambda\alpha < 0$. Vector por un escalar
(2)	$dir(\lambda(\alpha\overrightarrow{a})) = dir(\alpha\overrightarrow{a})$	Por que $\lambda > 0$. Vector por un escalar
(3)	$dir(\alpha\overrightarrow{a}) = dir(-\overrightarrow{a})$	Puesto que $\alpha < 0$. Vector por un escalar
(4)	$dir(\lambda(\alpha\overrightarrow{a})) = dir(-\overrightarrow{a})$	De (2) y (3)
(5)	$dir((\lambda\alpha)\overrightarrow{a}) = dir(\lambda(\alpha\overrightarrow{a}))$	De (1) y (4)

Luego, $dir((\lambda\alpha)\overrightarrow{a}) = dir(\lambda(\alpha\overrightarrow{a}))$. Por lo tanto, al tener igual magnitud y dirección se concluye que $(\lambda\alpha)\overrightarrow{a} = \lambda(\alpha\overrightarrow{a})$.

1.3.12 Normalización de un vector

Para encontrar un vector unitario y que además vaya en la dirección de otro, se puede hacer la siguiente operación: Sea $\overrightarrow{a}$ un vector no nulo, entonces se define $\overrightarrow{U}_{\overrightarrow{a}}$ como el vector unitario que tiene la misma dirección que $\overrightarrow{a}$, y es tal que:

$$\overrightarrow{U}_{\overrightarrow{a}} = \frac{1}{\|\overrightarrow{a}\|}\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|}$$

Al proceso de encontrar un vector unitario en la dirección de otro se le llama **Normalización.**

Si se quiere encontrar un vector unitario en la dirección contraria simplemente se le antepone el signo menos. Veamos:

$$\overrightarrow{U}_{\overrightarrow{a}} = -\frac{1}{\|\overrightarrow{a}\|}\overrightarrow{a} = -\frac{\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|}$$

este vector es unitario y está en dirección contraria al vector $\overrightarrow{a}$.

1.4 Combinación lineal de vectores

Sean los vectores $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \cdots, \overrightarrow{a}_n \in V$, y los escalares λ_1, $\lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Utilizando las operaciones producto de un vector por un escalar y suma de vectores, se pueden obtener otros vectores de la forma $\lambda_1\overrightarrow{a}_1 + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{a}_n$, cada uno de esos vectores obtenidos se denomina combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \cdots, \overrightarrow{a}_n$, es decir, si se puede escribir un vector $\overrightarrow{b}$ de la forma

$$\overrightarrow{b} = \lambda_1 \overrightarrow{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{a}_2 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{a}_n$$

entonces $\overrightarrow{b}$ es combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \cdots, \overrightarrow{a}_n$.

En otras palabras un vector combinación lineal no es más que la suma de múltiplos escalares de otros vectores, en este caso cada uno de los vectores $\lambda_i \overrightarrow{a}_i$ para $i = 1, 2, \cdots, n$, es un múltiplo escalar de los vectores $\overrightarrow{a}_i$.

1.5 Independencia lineal

Sean los vectores $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \cdots, \overrightarrow{a}_n \in V$, y los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Se dice que los vectores $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \cdots, \overrightarrow{a}_n$ son linealmente independientes (L.I) si y sólo si $\lambda_1 \overrightarrow{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{a}_2 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{a}_n = 0$ cuando todos los $\lambda_i = 0$, para $i = 1, 2, \cdots, n$. En caso contrario se dice que son linealmente dependientes (L.D), es decir, si existe por lo menos un $\lambda_i \neq 0$ para el cual se verifica que $\lambda_1 \overrightarrow{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{a}_2 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{a}_n = 0$. En este caso, hay por lo menos un vector que puede ser escrito como combinación lineal de los $n-1$ vectores restantes. En particular dos vectores paralelos son L.D.

1.6 Base para el plano

Sea V el conjunto de todos los vectores del plano. Una base para V es el conjunto, con el mínimo número de vectores, que puede generar todos los demás vectores del plano mediante las operaciones producto de un vector por un escalar y suma de vectores. En otras palabras, una base es un conjunto de vectores tal que cualquier vector del plano se puede escribir como una combinación lineal de los vectores de ese conjunto de forma única.

Así, un conjunto de vectores forma una base para V si se verifica que:

1. $\{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \cdots, \overrightarrow{a}_n\}$ es linealmente independiente (L.I).
2. $\{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \cdots, \overrightarrow{a}_n\}$ genera a todos los demás vectores de V.

1.6.1 Teorema de la base para el plano

Teorema 1.6.1 *Sean $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ vectores del plano no nulos y no paralelos (son L.I), entonces todo vector $\overrightarrow{c}$ del mismo plano (que contiene a los vectores $\overrightarrow{a}$*

y $\overrightarrow{b}$) se puede escribir como combinación lineal única de $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$, esto es

$$\overrightarrow{c} = \lambda_1 \overrightarrow{a} + \lambda_2 \overrightarrow{b}, \ \ con\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Prueba. Hipótesis: Sean los vectores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$ no nulos y no paralelos, en el mismo plano.Tesis $\overrightarrow{c} = \lambda_1 \overrightarrow{a} + \lambda_2 \overrightarrow{b}$,

	Afirmación	**Razón**
(1)	Se hacen coincidir los vectores en sus puntos iniciales	Vectores libres Ver Fig. 22

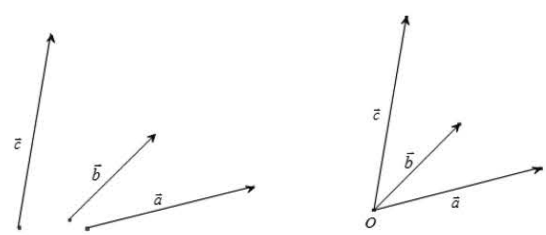


Figura 22

(2)	Se traza por el punto final M de $\overrightarrow{c}$ $L_1 \parallel \overrightarrow{b}$	Construcción
(3)	Se traza $L_2 \parallel \overrightarrow{a}$, en este caso $\overrightarrow{a} \subset L_2$	Construcción

Afirmación	**Razón**

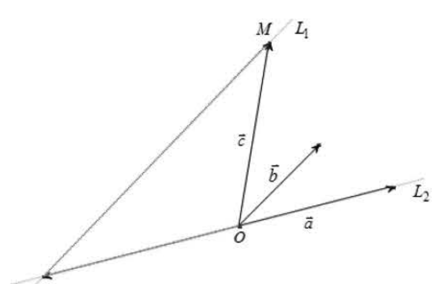


Figura 23

(4)	L_1, L_2 se cortan en el punto I	$\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ vectores no paralelos
(5)	Se forma el triángulo vectorial OIM con $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$	Suma de vectores
(6)	$\overrightarrow{OI} = \lambda_1 \overrightarrow{a}, \overrightarrow{IM} = \lambda_2 \overrightarrow{b}$	$\overrightarrow{OI} \parallel \overrightarrow{a}, \overrightarrow{IM} \parallel \overrightarrow{b}$
(7)	$\overrightarrow{c} = \lambda_1 \overrightarrow{a} + \lambda_2 \overrightarrow{b}$	De (5) y (6)

Para demostrar que esta combinación lineal es única, o que λ_1 y λ_2 son únicos, supongamos que existe otra combinación lineal, es decir que el vector $\overrightarrow{c}$, también se puede escribir como $\overrightarrow{c} = \alpha_1 \overrightarrow{a} + \alpha_2 \overrightarrow{b}$.

	Afirmación	**Razón**
(1)	$\overrightarrow{c} = \lambda_1 \overrightarrow{a} + \lambda_2 \overrightarrow{b}$ $\overrightarrow{c} = \alpha_1 \overrightarrow{a} + \alpha_2 \overrightarrow{b}$	Suposición inicial
(2)	$\lambda_1 \overrightarrow{a} + \lambda_2 \overrightarrow{b} - \alpha_1 \overrightarrow{a} - \alpha_2 \overrightarrow{b} = 0$	Operaciones vectoriales
(3)	$(\lambda_1 - \alpha_1)\overrightarrow{a} + (\lambda_2 - \alpha_2)\overrightarrow{b} = 0$	Producto de un escalar por un vector
(4)	$\lambda_1 - \alpha_1 = 0$ y $\lambda_2 - \alpha_2 = 0$	ya que $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son L.I
(5)	$\lambda_1 = \alpha_1$ y $\lambda_2 = \alpha_2$	Luego la combinación lineal es única

1.6.2 Teorema de la proporción

Sean A, B y C puntos colineales tales que A-C-B y O un punto exterior a $\overline{AB}$. Si C divide a $\overline{AB}$ en la proporción $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{k}{t}$, con $k, t \in \mathbb{R}^+$, entonces se cumple que (Figura 24):

$$\overrightarrow{OC} = \frac{t\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{t+k} = \frac{t}{t+k}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{t+k}\overrightarrow{OB}$$

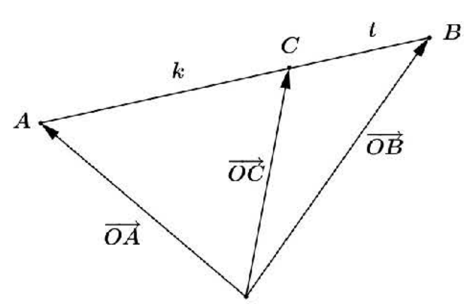


Figura 24

Referencias bibliográficas

Asmar, A., Restrepo, P., Franco, R. y Vargas, F. (2005). *Geometría analítica y vectorial*. Universidad Nacional de Colombia. Sede Medellín.

Calad, J. (2005). *Geometría vectorial y analítica*. Universidad Nacional de Colombia. Sede Medellín. Sexta edición.

Cuesta, N. (1968). *Geometría vectorial: introducción intuitiva al álgebra lineal*. Madrid: Alhambra.

De Burgos, J. (2006). *Álgebra lineal y geometría cartesiana*. Madrid: McGraw-Hill.

Ferández, L. y Saldarriaga, G. (2007). *Geometría Integrada*. Medellín: Fondo Editorial ITM.

Heinz, K. (2011). *Vectors and Plane Geometry*. University of Hawaii.

Larson, R. y Falvo, C. (2010). *Fundamentos de Álgebra Lineal*. Cengage Learnig: México D.F.

Lehman, C. (1989). *Geometría analítica*. Editorial Limusa: México, D.F.

Polanía, C. y Sánchez, C. (2012). *Un acercamiento al pensamiento geométrico*. Medellín: Sello Universidad de Medellín.

Ospina, O. (1990). *Nociones de geometría vectorial*. Universidad Nacional de Medellín. Sede Manizales.

Poole, D. (2006). *Álgebra lineal: una introducción moderna*. Thomson: México D.F.

Ramírez, M. y Velásquez, M. (1999). *Introducción al álgebra lineal con geometría analítica y vectorial*. Universidad Nacional de Colombia. Sede Medellín. Facultad de Ciencias. Medellín: Gráficas Montoya.

Vargas, J., Ramírez, L., Pérez, S. y Madrigal, J. (2008). *Física mecánica*. *Conceptos básicos y problemas*. Medellín: Fondo Editorial ITM.

Wexler, C. y Blumowicz, S. (1977). *Geometría analítica: un enfoque vectorial*. Barcelona : Montaner y Simón.

Referencias electrónicas

http://huitoto.udea.edu.co/GeometriaVectorial.

http://docencia.udea.edu.co/cen/vectorfisico/html/index.html.

http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/Algebra-Lineal/algebra-vectorial-geova-walter/node1.html.

http://www.vitutor.com/analitica/recta/ecuaciones_plano.html.

http://docencia.udea.edu.co/cen/geometrias/PDFs/ vectores_geometricos_coordenados.pdf.
http://www.luiszegarra.cl/moodle/course/view.php?id=6

http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/cursos/MetodosMatematicos1/2007B/MetodosMatematicos1B2007.html
http://etimologias.dechile.net/?vector

http://medical.expert-answers.net/medical-glossary-word/es/Vector.html

Francisco Javier Córdoba Gómez

Ingeniero de Minas y Metalurgia, Licenciado en Matemáticas. Magíster en Educación y Maestro en Ciencias en Matemática Educativa. Profesor Asistente Facultad de Ciencias Exactas y Aplicadas del ITM. Ha participado en diferentes eventos nacionales e internacionales en el ámbito de la educación matemática. Ha publicado algunos textos en el Fondo Editorial del ITM, entre los cuales se destacan: Desarrollo y uso didáctico de Geogebra (2013), Función lineal, cuadrática y volúmenes y Guía para docentes (2012). Se desempeña como Director del Instituto GeoGebra de Medellín desde el año 2012.

Pablo Felipe Ardila Rojo

Matemático de la Universidad Nacional. Magíster en Ciencias Matemáticas. Profesor Asistente de la Facultad de Ciencias Exactas y Aplicadas del ITM. Trabaja en el área de álgebra abstracta en la línea de Teoría de Nudos. Ha participado como ponente en varios eventos internacionales de matemáticas puras y educación matemática. Es miembro del Grupo de Investigación Da Vinci y coordina uno de sus semilleros.

TEXTOS ACADÉMICOS

MÓDULO DE GEOMETRÍA VECTORIAL

*Este libro se terminó de imprimir en Ediciones Diario Actual
en el mes de noviembre de 2014.*

*La carátula se imprimió en propalcote 300 gramos,
las páginas interiores en bond 90 gramos.*