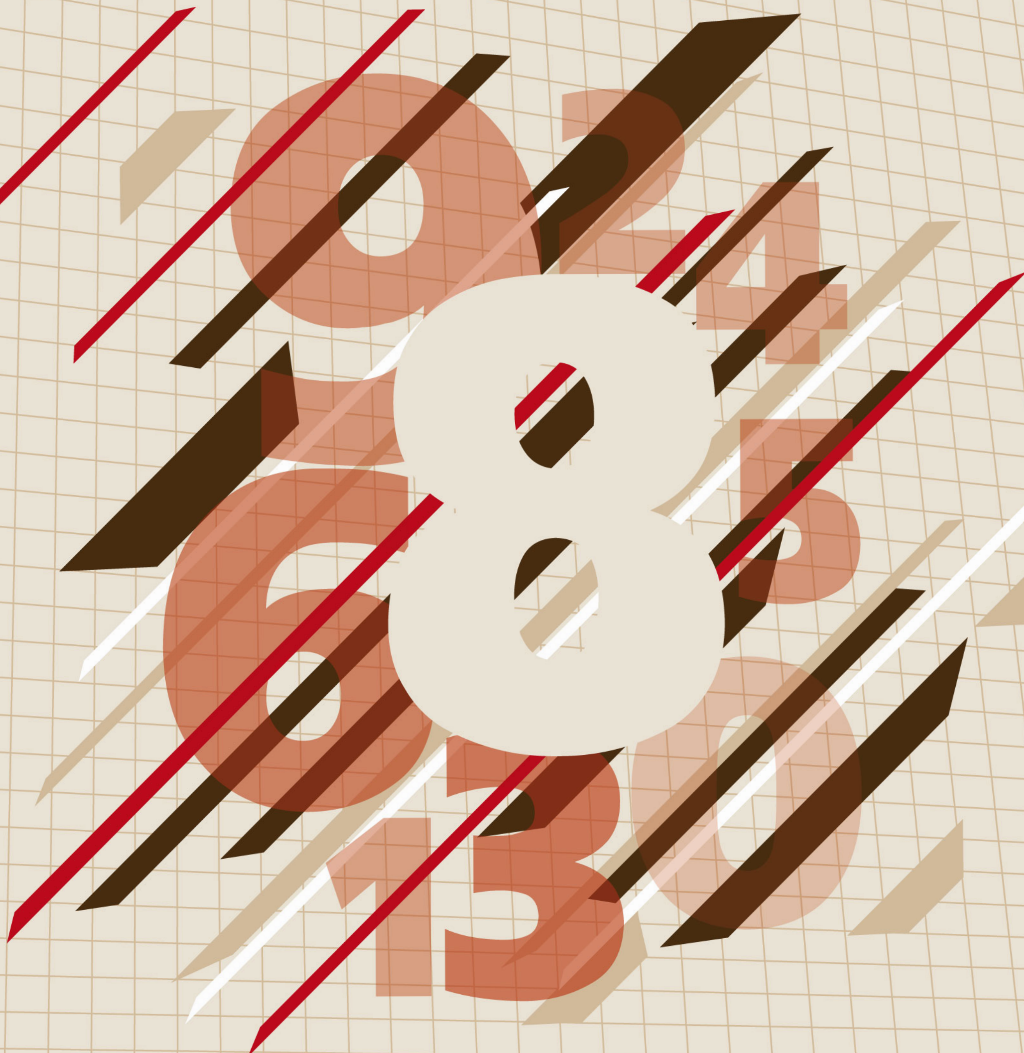
Textos Académicos



Aritmética

Teoría, Ejemplos y Problemas

Marlon D. Arcila Vanegas
Yeison E. Gómez Noreña

FONDO EDITORIAL ITM

ARITMÉTICA
Teoría, ejemplos y problemas

Marlon D. Arcila Vanegas

Yeison E. Gómez Noreña

Institución Universitaria
Acreditada en Alta Calidad

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
COLEGIO MAYOR
DE ANTIOQUIA

Aritmética. Teoría, Ejemplos y Problemas

Primera edición: diciembre de 2016
ISBN: 978-958-8743-94-3

AUTORES
Marlon Arcila Vanegas
Yeison Gómez Noreña

Publicación electrónica para consulta gratuita

Instituto Tecnológico Metropolitano
Calle 73 No. 76ª 354
Tel.: (574) 440 5197
http://fondoeditorial.itm.edu.co/
fondoeditorial@itm.edu.co
Medellín – Colombia

Institución Universitaria Colegio Mayor de Antioquia
Carrera 78 No. 65-46
Tel: (574) 2649081
www.colmayor.edu.co/
colmayor@colmayor.edu.co

Arcila Vanegas, Marlon D.
Aritmética: teoría, ejemplos y problemas / Marlon D. Arcila Vanegas, Yeison E. Gómez Noreña. -- 1a ed. – Medellín : Instituto Tecnológico Metropolitano ; Colegio Mayor de Antioquia, 2016.
91 p. – (Textos académicos)

Incluye referencias bibliográficas
ISBN 978-958- 8743-94-3

1. Aritmética I. Gómez Noreña, Yeison E. II. Tít. III. Serie

513 SCDD 21 ed.

Catalogación en la publicación - Biblioteca ITM

Índice general

Prólogo

La matemática es la reina de las ciencias y la aritmética es la reina de las matemáticas. Ella a menudo se digna a prestar un servicio a la astronomía y a otras ciencias naturales, pero en todas las relaciones, tiene derecho a la primera fila. (Kline, 1972, p.557.)

Esta frase refleja el pensamiento de Karl Friedrich Gauss sobre la aritmética, tema central de este texto, con lo que se quiere comenzar, ya que la autoridad de este matemático es de una notabilidad mayúscula. El valor de esta rama de las matemáticas es prácticamente incuestionable para Gauss, alemán que vivió entre el 30 de abril de 1777 y el 23 de febrero de 1885.
En una ocasión se le interrogó a Pierre-Simon Laplace sobre el matemático alemán más importante, a lo cual este respondió que era Johann Friedrich Pfaff; pero su interlocutor replicó que por que no Gauss, y entonces este respondió: "Gauss es el matemático más importante de todo el mundo", este juicio ha sido compartido por toda la comunidad académica, tanto así que en nuestros días se le reconoce, a Gauus, como el *Matemático más grande desde la antigüedad* y el *Príncipe de los matemáticos*. Sólo él y Arquímedes, al cual se le conoce como el *Dios de las Matemáticas*, son los únicos que ostentan un apelativo superlativo en relación a las mentes más brillantes de la humanidad, y que guardan alguna relación con la producción científica.
Por lo anterior se quiere resaltar dos ideas fundamentales acerca de las razones por las cuales se considera escribir un texto de aritmética para estudiantes de primeros semestres de universidad y de últimos años de bachillerato. La primera es que, para Gauss, hay ramas de las matemáticas y no una sola matemática; cada una de ellas es completa en tanto sus postulados y la forma como se estructura en función de su *objeto* de estudio, que, en este caso, son los sistemas numéricos, las relaciones y propiedades que se cumplen, como consecuencia de las operaciones entre los números. En segundo lugar, la aritmética está presente como un eje transversal en todas las áreas del conocimiento que requieren de este lenguaje para expresar sus ideas y cuantificar el mundo; en este sentido, Gauss sostiene: *Las matemáticas deben reflejar el mundo de una forma real*, echo apenas evidente, como un postulado, ya que las personas, en general, conocen y usan las cuatro operaciones aritméticas fundamentales, y deben recordar una buena cantidad de números como identificación personal, teléfonos, direcciones y contraseñas. Es así como escribir un texto dedicado al estudio de las ideas centrales básicas aritméticas es necesario para quienes se adentran en el estudio de las matemáticas, como eje transversal en su proceso de formación universitaria, en un medio donde el valor y significado de las distintas ramas de las matemáticas se hace prácticamente irreconocible, a causa de la integración que se ha querido hacer de ellas por medio de la concepción unificadora de la teoría de conjuntos. No es que se ostenten los conocimientos ni mucho menos la formación, como para menospreciar tal concepción; tampoco se busca criticar en sí misma a la teoría de conjuntos. Esa función se la dejamos a Georg Cantor, Bertrand Russell o Kurt Gödel.
El objetivo de este libro guarda relación con la intensidad horaria, número de cursos de matemáticas de primer semestre y cantidad de contenidos temáticos abordados en los cursos de matemáticas operativas, que evidencia que al estudiante se le deben brindar los elementos operativos y conceptos mínimos, en función de las temáticas que necesita, para dar respuesta a los planes de estudio que tienen la mayoría de las universidades, que, en su totalidad, están enfocadas al estudio del cálculo, la estadística, matemáticas financieras y materias relacionas con costos, presupuestos y economía, áreas de formación cuyo pre requisito son la aritmética, el álgebra y la geometría analítica.

Este es un texto de aritmética en el cual se tratan de forma simple y concisa los conceptos, sin considerar que para los lectores, este es un primer acercamiento a la aritmética. Se busca que sea un documento para afianzar las ideas ya vistas en la primaria y el bachillerato, optando por dar prelación al uso y comprensión de los conceptos y propiedades de la aritmética, antes que al formalismo propio de las ciencias exactas, sin menoscabo del lenguaje simbólico y preciso que se debe usar en ellas.

¿A quién va dirigido este texto?

Se ha pensado esta obra para estudiantes de últimos años de bachillerato y de primeros semestres de universidad de cualquier programa académico que contemple en su plan de estudios la matemática, además de asignaturas que la usen como su lenguaje, por ejemplo: economía, estadística, costos, presupuestos, etc. De igual manera, para estudiantes que requieran de preparación para olimpiadas de matemáticas o exámenes de admisión para la universidad, dado que los últimos capítulos cuentan con ejercicios NO algorítmicos, que requieren de imaginación y uso creativo de los conceptos de número y operación. Es por esto por lo que la estructura de cada uno de los capítulos se conforma de una serie de ejemplos, por medio de los cuales se da claridad en cuanto a la realización de una determinada operación o procedimiento. Luego se presentan ejemplos de problemas con sus correspondientes estrategias de solución, y una sección final, con ejercicios propuestos clasificados en diferentes tópicos y niveles de dificultad. Se hace énfasis, a lo largo de las unidades, en la diferencia con relación al concepto mismo y el procedimiento de cálculo requerido para efectuar alguna operación aritmética. Por tanto, el lector, encontrará claramente diferenciadas las definiciones, que en la estructura de la matemática, representan las ideas básicas y contienen los términos técnicos con los cuales se debe hacer referencia a cierto objeto abstracto. Las definiciones están escritas con un lenguaje informal, buscando disminuir la carga semántica, con el propósito de que su comprensión no se vea afectada cuando el lector desconozca ciertos símbolos matemáticos; de otro lado, si el concepto lo amerita, se adicionan figuras en las cuales se presentan esquemas que ayudan a entender la idea central de lo que se busca enseñar. Los procedimientos, son básicamente una serie de pasos algorítmicos o instrucciones que tienen como objetivo la obtención de un determinado resultado. Se formulan las propiedades relacionadas con las distintas operaciones o conceptos, dando a cada propiedad su correspondiente denominación, la cual el lector debe recordar, pues son la fuente para la adquisición, apropiación y uso de un lenguaje técnico, como lo es en cierta forma el de las matemáticas. Cada capítulo cuenta con al menos una sección de ejercicios, cuyo fin primordial es el de practicar la teoría. Hay secciones de ejercicios orientadas a la aplicación algorítmica del procedimiento y el concepto; en otras secciones, en cambio, se incentiva el uso de la imaginación y alternativas no algorítmicas de solución. Estas secciones de ejercicios se pueden usar como una fuente de material para la preparación de pruebas de admisión, ECAES u olimpiadas de matemáticas. Los ejemplos cuentan con la debida explicación y argumentación del porqué de cada paso y se presentan a dos columnas para acentuar los distintos pasos que hay que cumplir según los procedimientos que se han enunciado.

Se busca incluir la mayor cantidad de respuestas a los ejercicios de cada capítulo, como un mecanismo de comprobación sobre el proceso de solución, ya que se comprende la frustración que se siente cuando, al solucionar un problema, el lector no cuenta con la manera de establecer si es correcta o no. La mayoría de los ejercicios del libro, se han generado con una serie de trozos de código, programados en PHP. Estos Snippet de código fueron proyectados para que se enuncie el ejercicio con su correspondiente respuesta, asi que salvo algún error de digitación o tipográfico, las soluciones a los ejercicios corresponden fielmente a lo que se pide en el enunciado. Finalmente, el texto cuenta con un índice analítico de temas, posibilitando el acceso de forma rápida a cierto tipo contenido y, asimismo, brindando una idea de conjunto de las relaciones entre los distintos capítulos.

Gracias o todos los que nos han brindado su apoyo en la elaboración de esta obra, y especialmente a Juan David Alzate, por sus valiosos aportes en el desarrollo de los códigos para generar ejercicios.

1 Operaciones y conceptos básicos

Este capítulo está dedicado al estudio de los fundamentos básicos de la aritmética y resalta los conceptos de operación, propiedades y relaciones entre los números reales. Se intenta que el lenguaje de este texto sea simple y práctico, en función de la adquisición de competencias relacionadas con el dominio de la aritmética, que es considerada la base de las matemáticas aplicadas. Para lograr con este objetivo, los ejemplos proporcionan estrategias generales de solución, destacando pasos que se pueden emplear, de forma sistemática, en la solución de los ejercicios propuestos en la temática ejemplificada.

1.1 Sistema de los números enteros

Definición 1.1 Sistema de los números enteros

El sistema de los números enteros está formado por los números del conjunto

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$$

Vale la pena resaltar que los números enteros pueden ser positivos[1] o negativos. Únicamente el número cero es neutro. Al escribir los números enteros positivos se omite el signo $+$, los números negativos van precedidos del signo $-$, y es aquí donde debe tenerse presente que cuando hay un menos que precede un número entero, se puede entender que el número es negativo, pero el signo menos también representa la operación sustracción. La expresión $4-3$ significa que a 4 hay que restarle 3 pero en la expresión $4-(-3)$ se esta restando (-3). Es de vital importancia el uso de los signos de agrupación en expresiones donde aparecen simultáneamente números enteros negativos en operaciones indicadas de adición o sustracción.

Existe una relación entre los puntos de una recta y los números reales[2], a cada punto le corresponde un número real, y a cada número le corresponde un punto. En la Figura 1.1[3] se localizan algunos puntos de la recta y su correspondencia con los números enteros.

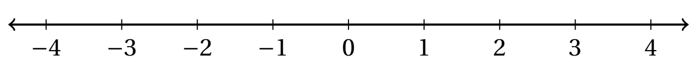


Figura 1.1: Recta real

Ahora se analiza el concepto de valor absoluto, el cual se puede entender como la distancia desde un punto cualquiera de la recta real al origen. La Figura 1.2 muestra dos opciones: cuando el punto corresponde a un número

[1] Los enteros positivos se denominan en algunos textos como naturales e igualmete en algunos teoremas se considera al 0 como natural.
[2] A este tipo de relación se le llama biunívoca o biyección.
[3] Todas las figuras son de elaboración de los autores.

positivo y otra cuando es negativo.

En la Figura 1.2 se aprecian dos ejemplos: en el primero de ellos se determina la distancia que hay desde el punto donde se localiza el -3 y el origen o punto donde está el 0. Es claro que la distancia es de 3 unidades, en razón a que no se puede hablar de valores de distancia negativos. El segundo ejemplo muestra la distancia desde 2 hasta el 0.

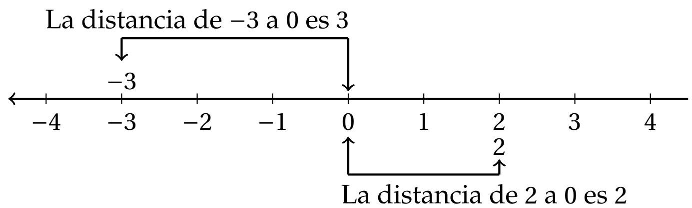


Figura 1.2: Concepto de valor absoluto

Lo anterior permite definir la operación valor absoluto, simbolizada así $|x|$, es decir $|-3| = 3$ y $|2| = 2$, ésta se formaliza en la siguiente definición.

Definición 1.2 Valor absoluto de un número real

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La definición expresa que el valor absoluto de un número es siempre positivo o cero, puesto que una distancia *no* puede ser negativa. Dicho de otra manera, cuando x es positivo o cero $|x|$ es el mismo x sin alterar su signo, y cuando x es negativo $|x|$ le cambia el signo dando como resultado un número positivo, este cambio de signo se representa con $-x$. En el ejemplo anterior, al calcular $|2| = 2$ por ser 2 positivo, ahora al calcular $|-3| = -(-3) = 3$ lo que ocurre es que se cambia el signo, ya que -3 es negativo.

Adición y sustracción de números enteros

La adición de números enteros es una operación definida entre dos enteros que tiene como resultado otro entero.[4] Para calcular la suma de dos números enteros se presentan las siguientes posibilidades en cuanto al signo de los sumandos.

Procedimiento 1.1 Adición de dos números enteros de igual signo

Se suman los valores absolutos de los dos números y se pone el signo que tienen, es decir, si son positivos la suma tiene como signo $+$, si son negativos tendrá signo $-$.

Ejemplo 1.1

Adición de dos números enteros positivos.
$6 + 9 = 15$.

[4] Propiedad clausurativa de la adición, si a y b son enteros ($a, b \in \mathbb{Z}$), entonces $a + b \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 1.2

Adición de dos números enteros negativos.
Para calcular $(-5)+(-4)$ se suman $5+4$, que son los valores absolutos y el resultado tiene signo menos, es decir -9.

Procedimiento 1.2 Adición de dos números enteros de diferente signo
Al número mayor en valor absoluto se le resta el menor en valor absoluto y el resultado tiene el signo del mayor en valor absoluto.

Ejemplo 1.3

Adición de dos números enteros con signo diferente.
Calcular la suma $(-9)+5$. El mayor es 9 y el menor es 5, así que calculamos $9-5=4$, pero el resultado es -4.

Ejemplo 1.4

Adición de dos números enteros con signo diferente.
$8+(-5)$, el mayor es 8 y el menor 5, se calcula $8-5=3$, por tanto el resultado es 3.

En los dos ejemplos anteriores se procede igual si las operaciones fueran $5+(-9)$ y $(-5)+8$, ya que la adición es conmutativa, lo cual se pude enunciar de la siguiente manera.

Propiedad 1.1 La adición de números reales es conmutativa, es decir

$$a+b=b+a$$

Ahora se considera el cálculo de la sustracción de números enteros, en el cual ocasionalmente es necesario usar la ley de los signos, a fin de expresar los cálculos como una adición de enteros.

Propiedad 1.2 Ley de signos

1. El producto de dos números con igual signo es siempre positivo.
2. El producto de dos números con diferente signo es negativo.

Es importante resaltar que la propiedad anterior es válida en el cálculo del signo de la división de dos enteros. Se ilustra la diferencia de dos números enteros con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.5

Diferencia de dos enteros negativos.
Para calcular $(-4)-(-9)$ se aplica la ley de signos, con lo cual la operación se transforma a $(-4)+9$, que es la adición de dos números enteros con diferente signo, por tanto se calcula $9-4=5$ y el resultado es 5, ya que el número mayor en valor absoluto es 9.

Ejemplo 1.6

Diferencia de dos enteros positivos.
Para calcular $8-4=4$, es simple, pero si la operación es $5-9$, se calcula $9-5=4$ y el resultado tendrá el signo del número mayor en valor absoluto, es decir -4 ya que el número mayor en valor absoluto es 9.

Ejemplo 1.7

Diferencia de dos enteros con diferente signo.
Para determinar el valor de $(-4)-5$ se puede emplear la ley de signos para expresar la operación como $(-4)+(-5)$, que es una adición de dos números enteros con igual signo; por tanto la operación es $4+5=9$, pero el resultado tiene el signo menos, ya que se sumaron dos cantidades negativas, es decir -9. Ahora si la operación es $7-(-2)$ se debe usar la ley de signos para expresar la operación como $7+2$ que da como resultado 9.

Polinomios aritméticos

Un polinomio aritmético es una expresión que combina las cuatro operaciones básicas. Aritmético hace referencia a que las operaciones involucran únicamente números. Simplificar un polinomio aritmético tiene como finalidad la obtención del resultado de la expresión, al efectuar todas las operaciones indicadas.

Procedimiento 1.3 Simplificar un polinomio aritmético sin signos de agrupación

1. Efectuar productos o divisiones.
2. Se suman todos los números positivos y todos los números negativos, luego, al mayor en valor absoluto se le resta el menor. El resultado tiene como signo el signo del mayor en valor absoluto.

Ejemplo 1.8

Simplificar $5+6-8-6+5$.
Primero se suman $5+6+5=16$.
Luego se suman $8+6=14$.
Finalmente al mayor: 16 se le resta el menor: 14, es decir, $16-14=2$ con lo cual la respuesta es $+2$.
Se enfatiza en que el signo + corresponde al número mayor 16.

Ejemplo 1.9

Simplificar $10-15+4+8-8-6$.
Primero se suman los positivos: $10+4+8=22$.
Luego se suman los negativos: $15+8+6=29$.
Al mayor 29 se le resta el menor 22, es decir: $29-22=7$.
La respuesta es -7 debido a que el mayor es 29, es decir los negativos.

En ambos ejemplos vale la pena aclarar el por qué se habla de sumar los negativos.
Resulta que la operación $10-15+4+8-8-6$ se puede reescribir como $10+(-15)+4+8+(-8)+(-6)$. Es decir se ha

expresado el polinomio como la suma de 6 números enteros, 3 positivos y 3 negativos.
Al tener varias operaciones indicadas simultáneamente, en los polinomios aritméticos se emplean los signos de agrupación como el paréntesis "( )", el corchete "[ ]" y las llaves "{ }" con el objeto de establecer el orden en que se deben realizar las mismas.

Procedimiento 1.4 Simplificar un polinomio aritmético con signos de agrupación
Se identifican los signos de agrupación más interiores, en los cuales se aplica el procedimiento anterior 1.3.

Ejemplo 1.10

Simplificar $3[(1)(17-24)+(3)[5(20-38)+4(5)]]$

$3[(1)(\boxed{17-24})+(3)[5(\boxed{20-38})+\boxed{4(5)}]]$	Ejercicio dado
$3[\boxed{(1)(-7)}+(3)[\boxed{5(-18)}+\boxed{4(5)}]]$	Se efectuan las dos diferencias y el producto
$3[-7+(3)[\boxed{-90+20}]$	Se efectuan los tres productos
$3[-7+\boxed{(3)[-70]}]$	Se realiza la adición
$3[\boxed{-7+(-210)}]$	Se calcula el producto
$\boxed{3[-217]}$	Se soluciona la adición de los enteros negativos
-651	Resultado, luego de hacer la multiplicación

Para hacer mayor énfasis en el orden en que se desarrollan las operaciones, se resaltan los cálculos usando el sombreado. Observe que en el primer paso se simplifican los dos paréntesis interiores y además, se calcula una multiplicación, con el fin de evidenciar que el procedimiento es una guía de cómo abordar estos cálculos, pero es en últimas la práctica, la que posibilita tomar decisiones en torno a la simplificación de una expresión cualquiera.

Resumen de la sección

1. Adición y sustracción.
2. Valor absoluto.
3. Ley de signos.
4. Simplificación de polinomios aritméticos.

Ejercicio 1.1

Ejercicios sobre polinomios aritméticos

Simplificar las siguientes expresiones:

1. $-5+12-11+6+2+7$
2. $-14-11-12-1$
3. $-12-1-1+5+15-4$
4. $6-12-6+4-5+1+2$
5. $11-21-10-47+18+22$
6. $99-30+51+11-60$

7. $-49+36-25+16-9+2$

8. $12-11+24-22+36-33$

9. $16+25-9+10-9-9+11$

10. $-10-11-12-13$

11. $300-159-41+50-100$

12. $91-7-6-11-78+15$

13. $-45-54+25+52+22-33$

14. $121-53-100+13-24-6$

15. $-2-3-4-5+6+7+8$

16. $-15+45-14+8-11$

17. $-8+[7-(-10)]-(25-13)$

18. $3+\{3+[3+(3+1)]\}-12$

19. $-13-\{[(-16+9)+8]+13\}$

20. $\{-[-20+(-14+19)+5]-1\}$

21. $-\{5-(-4)-1+[-4-11]\}+5$

22. $[15-10+(25-41)]-(20+5)$

23. $[-4+5]-[-3-2]-[10+7-22]+1$

24. $-\{5+4+[-1+(4+8)+1]+3-11\}$

25. $-(5-3)-(3-5)-[14-(29-15)]$

26. $\{3+1[-(6+15)+(5-14)]+(4+5)\}$

27. $\{[-16+(16-27)]-(15+4)-(10-15)\}$

28. $-[-(45-19)-10]-[-(-44+17)-1]+4$

29. $[-2-4-6+(3+5+7)]-[(15+11-23)-9]+1$

30. $(-5+1-4-6)+(25+14-30+(-5+13-5-4))$

31. $[(5-4+15)-(-1-2+3)]+(5-14)-15+(4+7)$

32. $-22+[12+(-49+25-4)-(6+1)]-(-4-5-6)$

33. $[8-(-4)]-[-2-15]-[-12+14]+[-12-1]+(-11)$

34. $-16+[-(-10-14+17)-(12+5-25)]+(-15+6)-4$

35. $\{[4-24-1+7-(-1-2-3)+1]-1+5-(-18+20)\}$

Aplicando los conceptos de operaciones aritméticas, resolver los siguientes problemas:

36. Dentro de 10 años mi nieto Rodrigo tendrá el triple de la edad que tiene ahora. Entonces ahora tiene:

37. Una lata contiene tres latas pequeñas y cada lata pequeña contiene cuatro latas más pequeñas. ¿Cuántas latas hay en total?

38. Una calculadora se echa a perder pues no realiza bien las operaciones de suma, entregando siempre un resultado incorrecto, el que consiste en que en lugar de sumar el último número, lo resta. Según ello, ¿cuál es el resultado *incorrecto* de la siguiente suma $5+4+1$?

39. Si la suma de 3 números impares consecutivos da como resultado 21, entonces el número impar mayor es:

40. Un terreno rectangular de 30 por 60 metros necesita cercarse con una malla de alambre apoyada en postes, que deben ubicarse cada metro y medio. ¿Cuántos postes se necesitarán?

41. ¿Cuántas personas se encuentran en un cuarto, si en él hay 1 gato, 1 gallo y 1 perro y al contar el número de orejas de todos (personas y animales) fueron 26?

42. Tenemos tres cajas separadas de idéntico tamaño y dentro de cada una hay dos cajas separadas pequeñas, y dentro cada una de las cajas pequeñas hay cuatro cajitas aún más pequeñas. ¿Cuántas cajas tenemos en total?

43. Sofía, Isabel, Federico y Vicente cenan en un restaurante. Llega la cuenta, que para todo el grupo es de $90. Para simplificar, deciden dividir la cuenta en 4 partes iguales.¿Cuánto tendrá que pagar cada uno, sabiendo que Federico ofrece una botella de vino ($16), y que por otro lado, deciden dejar $2 de propina?

44. Si 4 fichas blancas se cambian por una azul, 3 azules se cambian por una verde y 4 verdes por una roja. Con 144 fichas blancas, ¿para cuántas verdes alcanzan?

45. Se lanzan 3 dados y se observa que las caras superiores suman 13. Las caras que están contra el piso suman:

Evaluar las expresiones con los valores indicados y luego simplificar.

46. $6[(7m-m)+1-5n]\div 3(m+n)$, Si $m=5$, $n=2$.

47. $(bc - ab + cc - aa) \div (c - a)$, Si $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$.

48. $[(x + y)(x + y) + x + y - 6] \div (x + y + 3)$, Si $x = 18$, $y = 12$.

49. $[(2a - 3b) \div 2c] + \{[8(a - b) \div c] - bc\}$, Si $a = 6$, $b = 4$, $c = 2$.

50. $\{xyz - [2x + y(z + y) \div w]\} \div 2w$, Si $x = 6$, $y = z = 4$, $w = 2$.

1.2 Criterios de divisibilidad

Para presentar los criterios de divisibilidad, en primer lugar, se definen dos conceptos básicos como son el de número primo y compuesto, entre otras ideas.

Definición 1.3 Número primo

Se puede definir de dos maneras

1. Un número es primo si y sólo si tiene exactamente dos divisores.
2. Un número es primo si y sólo si sus únicos divisores son el mismo número y la unidad.

La siguiente sucesión lista algunos números primos.

$$p = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101...\}$$

Definición 1.4 Número compuesto

Se puede definir de dos maneras

1. Un número es compuesto si tiene tres o más divisores.
2. Un número es compuesto si además de ser divisible entre sí mismo y la unidad tiene otro divisor.

Todos los números pares, excepto el 2, son números compuestos, ya que tienen al 2 como divisor; por ejemplo el 20 tiene por divisores $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ y, según la definición, anterior es un número compuesto.

Definición 1.5 Factor o divisor de un número

Un número a es factor o divisor de un número b si y solamente si b dividido a tiene como residuo 0.

Si consideramos nuevamente el número 20, podemos ver que el 10 es un factor o divisor ya que la división del 20 entre 10 es exacta, es decir con residuo 0.

Definición 1.6 Número par e impar

1. Todo número par es múltiplo de 2, es decir, si a es par se cumple que 2 es un divisor o factor de a.
2. Todo número que NO es par, es impar.

La definición anterior se puede expresar de manera simbólica escribiendo que $2n$ y $2n + 1$ con $n \in \mathbb{Z}$, representan números pares e impares, respectivamente.

Los criterios de divisibilidad son reglas que se aplican a un número dado para determinar si es un número compuesto.

Los criterios listados en la definición 1.7, son algunos de los más usados, pero en ocaciones se encuentran ejercicios en los que haya que emplear la divisibilidad por números mayores que el 11.

Definición 1.7 Criterios de divisibilidad

1. Divisibilidad entre 2.
   Un número es divisible entre 2 cuando termina en cifra par.
2. Divisibilidad entre 3.
   Un número es divisible entre 3 cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras es múltiplo de 3.
3. Divisibilidad entre 5.
   Un número es divisible entre 5 cuando su última cifra es 0 ó 5.
4. Divisibilidad entre 7.
   Un número es divisible entre 7 cuando separando la primera cifra de la derecha, multiplicándola por 2, restando este producto de lo que queda a la izquierda y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 7.
5. Divisibilidad entre 11.
   Un número es divisible entre 11 cuando la diferencia entre la suma de los valores absolutos de sus cifras de lugar impar y la suma de los valores absolutos de sus cifras de lugar par, de derecha a izquierda, es cero o múltiplo de 11.

Existen criterios de divisibilidad por números primos y compuestos; por ejemplo, un números es divisible por 6, cuando es divisible por 2 y por 3. Sin embargo, la finalidad al emplear criterios de divisibilidad es la de expresar un número como producto de sus factores primos, lo que se resume en la siguiente definición.

Definición 1.8 Factorización

Cuando se expresa un número como producto de sus factores primos, se dice que el número está factorizado.

Ejemplo 1.11

La factorización del número 20 es $(2)(2)(5)$

Factorizar o descomponer un número en sus factores primos es un proceso en el que se deben aplicar los criterios de divisibilidad de la definición 1.7, lo cual requiere de práctica y manejo de estos. En el siguiente ejemplo se presenta un esquema que ayuda a comprender cómo realizar este procedimiento.

Ejemplo 1.12

Descomponer en factores primos 420

420	2	El 420 es par, así que se puede dividir por 2, es decir $420 \div 2 = 210$
210	2	El 210 es par, así que se puede dividir por 2, es decir $210 \div 2 = 105$
105	3	El 105 es divisible por 3 ya que al sumar sus cifras $1+0+5=6$, que cumple con el criterio dado en la definición 1.7, se puede dividir por 3, es decir $105 \div 3 = 35$
35	5	El 35 termina en 5, así que se puede dividir por 5, es decir $35 \div 5 = 7$
7	7	El 7 es divisible por 7, así que se puede dividir por 7, es decir $7 \div 7 = 1$
1		Siempre la descomposición termina cuando se llega a 1

Por tanto, 420 se puede expresar como $(2)(2)(3)(5)(7)$

En la descomposición de un número en sus factores primos se aplican los criterios de divisibilidad enunciados en la definición 1.7. La descomposición en factores primos es única y no depende del orden en que se apliquen los criterios, pero es conveniente aplicarlos en orden a fin de ir agotando cada uno de ellos, aunque si el lector gusta aplicarlos en cualquier orden, lo puede hacer y la respuesta será la misma.

Ejemplo 1.13

Descomponer en factores primos 17787

17787	3	Como se cumple que $1+7+7+8+7=30$, entonces 17787 es divisible por 3
5929	7	Se cumple que $592-(9)(2)$ es 574, que es múltiplo de 7, por tanto 5929 es divisible por 7
847	7	Nuevamente se cumple que $84-(7)(2)$ da 70, así que dividimos por 7
121	11	las cifras de lugar impar suman 2, la de lugar par es 2, así que $2-2=0$, por lo que es div. por 11
11	11	11 es primo, así que se divide por 11
1		

Por tanto, la descomposición de 17787 es $(3)(7)(7)(11)(11)$

Con el objeto de analizar con más detenimiento los criterios de divisibilidad por 7 y 11, se verá cómo se aplican al número 17787. El criterio de divisibilidad por 7 expresa que se debe restar dos veces el número del extremo derecho de las demás cifras, y el valor obtenido debe ser 7 o 0, así que el cálculo es $1778-14=1764$. Como el número obtenido no se sabe si es múltiplo de 7, entonces aplicamos de nuevo el criterio tantas veces como sea necesario a los sucesivos resultados, por lo tanto $176-8=168$ y finalmente $16-16=0$. Se insite en que se ha aplicado el criterio tres veces, hasta obtener un número del cual se tenga certeza que es divisible por 7 o que se obtenga 0.

Como 17787 también es divisible por 11, entonces debe cumplir con dicho criterio. De izquierda a derecha se enumeran las cifras para luego sumar las de posición par e impar. La suma de las cifras de lugar impar es $7+7+1=15$, las de lugar par es $8+7=15$, ahora la diferencia es $15-15$ igual a 0; por tanto se cumple con el criterio de divisibilidad por 11.

Resumen de la sección

1. Número primo o compuesto.
2. Factor o divisor de un número.
3. Criterios de divisibilidad.
4. Factorización o descomposición en factores primos

Ejercicio 1.2

Ejercicios sobre factorización de números enteros

Descomponer en factores primos cada uno de los siguientes números.

1. 16
2. 100
3. 27
4. 25
5. 343
6. 98
7. 375
8. 216
9. 64
10. 81
11. 132
12. 625
13. 2700
14. 1430
15. 729
16. 49
17. 512
18. 315
19. 210
20. 225

21. 8575
22. 2940
23. 21175
24. 1260
25. 1485
26. 1331
27. 3575
28. 6300
29. 15147
30. 42875
31. 16224
32. 67500

En las secciones anteriores se han establecido conceptos previos básicos y fundamentales que serán la base de los procedimientos y aplicaciones que continúan en el texto. Las dos primeras aplicaciones que se presentan son las de máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

1.3 Máximo común divisor

Las palabras máximo, común y divisor (MCD en lo sucesivo) tienen todas sentido en el concepto que definen, veamos la razón.
Dados los números 20 y 30, ¿cuál será su MCD?. Se consideran inicialmente los divisores de los números dados.
Los divisores de 20 son $\{1,2,4,5,10,20\}$ y los de 30 son $\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$
Nótese que los números $\{1,2,5,10\}$ son comunes, y el número 10 es el máximo de ellos, por tanto el MCD$[20,30] = 10$.

Definición 1.9 Máximo común divisor || MCD

El máximo común divisor de dos o más números es el mayor número que los divide a todos exactamente.

Si bien es clara la idea de qué es el MCD, se requiere de un proceso para calcularlo. Existen tres métodos para el cálculo del MCD: por descomposición en factores primos, mediante el algoritmo de Euclides y usando el mínimo común múltiplo. En este texto se explica su cálculo mediante la descomposición en factores primos en razón a que es un proceso que se usará eventualmente en álgebra y, por tanto, vale la pena practicarlo desde ahora.

Procedimiento 1.5 Cálculo del MCD

El MCD de varios números expresados en sus factores primos, es el producto de los factores primos comunes afectados de su menor exponente.

Ejemplo 1.14

Calcular el MCD de 20 y 30.
Se descomponen los números dados en sus factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Se obtiene que $20 = (2^2)(5)$ y $30 = (2)(3)(5)$. Se puede ver que los factores comunes son 2 y 5 con su menor exponente que es 1, por tanto el MCD es $(2)(5) = 10$

Hay otro esquema con el cual se calcula el MCD, que se presenta en el siguiente ejemplo en el cual se usa el ejercicio anterior para que el lector pueda ver la semejanza entre ambos esquemas.

Ejemplo 1.15

Calcular el MCD de 20 y 30.
Se descomponen los números de forma simultanea, determinando los divisores comunes de ambos.

20	30	2	En la columna de la derecha se escriben los divisores que son comunes a ambos números. Note que sólo se determinan los divisores comunes, no todos los divisores que tengan los números dados.
10	15	5	
2	3		

Resumen de la sección

1. Máximo común divisor, MCD.
2. Procedimiento de cómo calcular el MCD de dos o más números.

Ejercicio 1.3

Ejercicios sobre máximo común divisor || MCD

Calcular el MCD de los grupos de números dados.

1. 60 y 80
2. 24 y 48
3. 75 y 105
4. 44 y 92
5. 221 y 210
6. 24 y 32
7. 180 y 225
8. 110 y 50
9. 200 y 160
10. 33 y 111
11. 66, 99 y 33
12. 100, 225 y 275
13. 102, 180 y 625
14. 63, 9 y 108
15. 660, 105 y 300
16. 432, 222 y 246
17. 132, 330 y 480
18. 400, 180 y 360
19. 336, 144 y 240
20. 120, 126 y 130
21. 120, 176, 256 y 224
22. 75, 105, 165 y 195
23. 78, 130, 273 y 231
24. 100, 324, 225 y 1296
25. 112, 175, 252 y 343
26. 60, 84, 108 y 132
27. 110, 132, 154 y 176
28. 90, 150, 210 y 270
29. 144, 400, 350 y 225
30. 216, 264, 168 y 192

1.4 Mínimo común múltiplo.

Definición 1.10 Mínimo común múltiplo || MCM

El mínimo común múltiplo de dos o más números es el menor número que es divisible por cada uno de ellos.

Obsérvese que de forma análoga al concepto de MCD tratado en la definición 1.10, las palabras con las que se denomina este concepto proporcionan una idea de lo que éste representa; es decir, suponga que se desea calcular el MCM de los números 6 y 8, entonces lo primero es hacer una lista con los múltiplos de los números dados.

Los múltiplos de 6 son $\{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, ...\}$

Los múltiplos de 8 son $\{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, ...\}$

Ahora se hace la lista de múltiplos comunes de 6 y 8 que son $\{24, 48, 72, 96, 120, 144, ...\}$

Por lo tanto, se puede razonar que la expresión mínimo común múltiplo hace referencia al más pequeño de los múltiplos comunes de los números dados, es decir 24 y el siguiente procedimiento describe la forma como se calcula.

Procedimiento 1.6 Cálculo del MCM
El MCM de varios números, expresados en sus factores primos, es el producto de los factores primos comunes y no comunes afectados de su mayor exponente.

El procedimiento anterior permite realizar el cálculo de forma simplificada, sin la necesidad de calcular la lista de múltiplos de los números dados, como se realizó para los números 6 y 8. Para ilustrar este procedimiento se realiza el cálculo del MCM de estos números en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.16

Calcular el MCM de 6 y 8.
Se deben expresar los números en factores primos, $6 = (2)(3)$ y $8 = 2^3$; aplicando el procedimiento anterior se observa que los factores son 2 (común) y 3 (No común), con lo cual el MCM es $(2^3)(3) = (8)(3) = 24$ que es el mismo resultado que se obtuvo con anterioridad.

Ejemplo 1.17

Calcular el MCM de 6, 8 y 10.
Los números dados, expresados en factores primos son: $6 = (2)(3)$, $8 = 2^3$ y $10 = (2)(5)$; los factores son 2, 3 y 5 y su MCM es $(2^3)(3)(5) = (8)(15) = 120$.

A la hora de calcular el MCM de varios números es conveniente contar con un esquema de cálculo eficaz. Los ejemplos que siguen presentan esquemas que posibilitan el cálculo del MCM.

Ejemplo 1.18

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$60 = (2^2)(3)(5)$ $\quad 90 = (2)(3^2)(5)$ $\quad 56 = (2^3)(7)$
Luego de establecer la descomposición en factores primos de los números dados, se usa la definición para determinar que el MCM $(60, 90, 56) = (2^3)(3^2)(5)(7) = 2520$.

El ejemplo anterior presenta un esquema formado por tres pasos: el primero es descomponer cada uno de los números, luego se expresa cada número como producto de sus factores primos, y por último, se aplica la definición de MCM.

Ejemplo 1.19

Calcular el MCM de los números 24, 45 y 50

24	45	50	2
12	45	25	2
6	45	25	2
3	45	25	3
1	15	25	3
	5	25	5
	1	5	5
		1	

El esquema muestra el cálculo de todos los divisores comunes y no comunes de los números dados; el MCM es el producto de todos los divisores obtenidos en la cuarta columna, ello se sintetiza así: $(2^3)(3^2)(5^2) = 1800$.

Este segundo esquema consta de dos pasos, a diferencia del esquema ejemplificado en 1.17(ejemplo anterior); aquí se descomponen todos los números de forma simultánea, comenzando de forma ordenada a calcular divisibilidad por 2, por 3 y finalmente por 5; el orden en que se apliquen los criterios no determina el resultado, pero su finalidad consiste en ir agotando la divisibilidad por cada número.

Resumen de la sección

1. Mínimo común múltiplo, MCM.
2. Procedimiento de cómo calcular el MCM de dos o más números.

Ejercicio 1.4

Ejercicios sobre mínimo común múltiplo | | MCM

Calcular el MCM de los grupos de números dados.

1. 8 y 20
2. 14 y 21
3. 6 y 16
4. 9 y 12
5. 15 y 25
6. 8 y 11
7. 40 y 100
8. 60 y 105
9. 10 y 25
10. 30 y 42
11. 6, 14 y 18
12. 7, 15 y 35
13. 9, 24 y 30
14. 12, 20 y 30
15. 42, 84 y 126
16. 30, 50 y 75
17. 60, 80 y 120
18. 60, 90 y 150
19. 5, 7 y 9
20. 40, 45 y 50
21. 2, 3, 5 y 7
22. 63, 105, 135 y 135
23. 30, 42, 70 y 105
24. 36, 45, 60 y 90
25. 28, 70, 100 y 175
26. 55, 88, 120 y 165
27. 5, 7, 9 y 11
28. 110, 140, 154 y 385
29. 77, 220, 308 y 770
30. 60, 72, 120 y 180

Resolver los siguientes problemas

31. En una pista circular de atletismo, 3 corredores entrenan. Si el primero de ellos debe dar 200 pasos para recorrer toda la pista, el segundo corredor da 2 pasos por cada uno que da el primero y el tercero da 3 pasos por cada 2 que da el segundo. Si parten los 3 desde la meta, ¿cuántos pasos deberá dar el tercer corredor para que se encuentren los tres corredores en la meta nuevamente?

32. La posición más próxima al sol de dos cometas se repite en el primero de ellos cada 100 años y en el segundo cada 75. Si han pasado ambos por su posición más próxima al sol el año 2000, ¿En qué año volverán a encontrarse de igual modo?

33. Con un grupo de fósforos puedo formar montones de 7, 8 y 9 fósforos sin que sobre alguno. cuál es el número de fósforos que tengo.

1.5 Sistema de los números racionales.

Esta sección está dedicada la estudio del sistema de los números racionales, los cuales se definen de la siguiente forma.

Definición 1.11 Sistema de los números racionales

El sistema de los números racionales está formado por los números del conjunto

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \right\}$$

donde p y q son números enteros y q es diferente de 0.

La restricción para q es que no puede ser 0, sin embargo q puede tomar cualquier valor entero, incluido el 1. El hecho de que $q = 1$ implica que el número racional $\frac{3}{1} = 3$ sea a la vez entero y racional, lo cual significa que todo número entero es racional.

Vocabulario 1.1 Clasificación de las fracciones

1. Fracción mixta: suma abreviada de un entero y una fracción propia.
2. Fracción impropia: fracción cuyo numerador es mayor que su denominador.
3. Fracción propia: fracción cuyo numerador es menor que su denominador.
4. Fracción irreducible: fracción en la que numerador y denominador son primos relativos[5]y, por tanto, no puede ser simplificada.
5. Fracción reducible: fracción en la que numerador y denominador NO son primos relativos y por tanto, sí puede ser simplificada.
6. Fracción recíproca: fracción obtenida a partir de otra dada, en la que se han invertido el numerador con el denominador.
7. Fracción entera: fracción en la que el denominador es 1, es decir que representa un número entero.
8. Fracción decimal: fracción cuyo denominador es una potencia de 10.
9. Fracción compuesta: fracción cuyo numerador y/o denominador contienen a su vez fracciones.
10. Fracciones equivalentes: las que representan la misma cantidad.
11. Fracciones homogéneas: fracciones que tienen el mismo denominador.
12. Fracciones heterogéneas: fracciones que tienen diferente denominador.

[5]Dos números a y b son primos relativos, cuando el MCD de ellos es 1 o equivalentemente son números que no tienen factores en común, excepto el 1

Ejemplo 1.20 –Clasificación de las fracciones

1. Fracción mixta: $1\frac{2}{3}$ que se lee "uno y dos tercios"
2. Fracción impropia: $\frac{3}{2}$
3. Fracción propia: $\frac{2}{3}$
4. Fracción irreducible: $\frac{7}{5}$, los números 7 y 5 no tiene un factor común
5. Fracción reducible: $\frac{10}{4}$, note que 10 y 4 tienen como MCM 2
6. Fracción recíproca[6]: dada la fracción $\frac{5}{4}$ su recíproca es $\frac{4}{5}$
7. Fracción entera: $\frac{15}{1} = 15$
8. Fracción decimal: $\frac{3}{10}$ ó $\frac{7}{1000}$
9. Fracción compuesta: $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{7}}$
10. Fracciones equivalentes: $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$
11. Fracciones homogéneas: $\frac{5}{8}$ y $\frac{-31}{8}$ son homogéneas
12. Fracciones heterogéneas: $\frac{-47}{3}$ y $\frac{59}{10}$ son heterogéneas

De la clasificación anterior, es importante resaltar que hay infinitos números racionales que son equivalentes; es así como los números $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ representan la misma cantidad. Para ilustrar esta idea se recurre a la representación gráfica de cada uno de los números.

Propiedad 1.3 Dos fracciones son equivalentes[7] si

$$\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d} \Longleftrightarrow (a)(d) = (c)(d)$$

Simplificar una fracción consiste es expresarla como una fracción equivalente irreducible, en el ejemplo 1.21 se explica este cálculo.

Ejemplo 1.21 –Simplificación de fracciones

Simplificar la fracción

$\frac{20}{8}$	Fracción dada
$\Rightarrow \frac{(\cancel{2^2})(5)}{\cancel{2^3}}$	Se descomponen en factores primos el numerador y el denominador (ver divisibilidad 1.7).
$\Rightarrow \frac{5}{2}$	Se obtiene esta fracción luego de simplificar los factores comunes.

Es claro que $\frac{20}{8} \equiv \frac{5}{2}$, es decir son fracciones equivalentes.

[6] El producto de una fracción con su recíproca es 1, además se representa el recíproco de $\frac{5}{4}$ como $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}$

[7] El símbolo para representar equivalencia es "≡", pero se suele usar el "=".

Ejemplo 1.22 –Amplificación de fracciones

Obtener una fracción equivalente a $\frac{-3}{7}$.
En el ejemplo 1.21 se obtubo una fracción equivalente a partir de la simplificación de factores comunes, ahora, debido a que -3 y 7 son primos relativos, es decir no tienen factores comunes. Para obtener una fracción equivalente se procede de forma inversa al ejemplo 1.21, multiplicando por una cantidad entera el numerador y el denominador.

$\dfrac{-3}{7}$	Fracción dada
$\Rightarrow \dfrac{(-3)(4)}{(7)(4)}$	Multiplicamos por un entero, en este caso 4.
$\Rightarrow \dfrac{-12}{28}$	Se obtiene esta fracción luego de efectuar las multiplicaciones indicadas.

Según los ejemplos 1.21 y 1.22 se puede concluir que de una fracción cualquiera se pueden obtener fracciones equivalentes, bien sea por simplificación o amplificación. Ambos procesos son empleados con frecuencia en las operaciones entre racionales.

Ejemplo 1.23 –Reducción de fracciones a fracciones homogéneas

Expresar las fracciones $\frac{-5}{3}$ y $\frac{11}{4}$ como fracciones homogéneas.
Para ello debemos obtener fracciones equivalentes cuyo denominador sea el MCM de 3 y 4, por tanto las nuevas fracciones tendrán denominador 12.

$\dfrac{-5}{3}$ y $\dfrac{11}{4}$	Fracciones dadas
$\Rightarrow \dfrac{(-5)(4)}{(3)(4)}$ y $\dfrac{(11)(3)}{(4)(3)}$	Amplificamos las fracciones multiplicando la primera por 4 y la segunda 3.
$\Rightarrow \dfrac{-20}{12}$ y $\dfrac{33}{12}$	Se obtienen estas fracciones, homogéneas, luego de efectuar las multiplicaciones indicadas.

Resumen de la sección

1. Concepto de número racional.
2. Clasificación de las fracciones.
3. Simplificación y amplificación de fracciones.

Ejercicio 1.5

Ejercicios sobre fracciones equivalentes

Simplificar las siguientes fracciones

1. $-\dfrac{21}{14}$
2. $\dfrac{8}{24}$
3. $\dfrac{10}{22}$
4. $\dfrac{28}{48}$
5. $-\dfrac{54}{15}$
6. $\dfrac{21}{63}$
7. $-\dfrac{45}{25}$
8. $\dfrac{15}{30}$
9. $\dfrac{40}{16}$
10. $\dfrac{210}{90}$
11. $-\dfrac{60}{80}$
12. $\dfrac{99}{126}$

13. $\frac{75}{240}$
14. $\frac{192}{224}$
15. $\frac{294}{420}$
16. $\frac{315}{294}$
17. $-\frac{264}{550}$
18. $\frac{945}{1140}$
19. $-\frac{612}{714}$
20. $\frac{825}{555}$

Escribir cada grupo de fracciones dadas como fracciones equivalentes entre sí.

21. $\frac{1}{5}$ y $\frac{2}{3}$
22. $\frac{-3}{2}$ y $\frac{11}{4}$
23. $\frac{15}{2}$ y $\frac{7}{3}$
24. $\frac{-5}{6}$ y $\frac{-1}{10}$
25. $\frac{3}{16}$ y $\frac{7}{6}$
26. $\frac{4}{7}$ y $\frac{7}{4}$
27. $\frac{8}{9}$ y $\frac{7}{6}$
28. $\frac{10}{21}$ y $\frac{-8}{14}$
29. $\frac{11}{10}$ y $\frac{-12}{15}$
30. $\frac{13}{24}$ y $\frac{7}{15}$
31. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ y $\frac{-1}{5}$
32. $\frac{2}{10}, \frac{8}{15}$ y $\frac{3}{6}$
33. $\frac{5}{7}, \frac{14}{9}$ y $\frac{16}{21}$
34. $\frac{100}{49}, \frac{-1}{14}$ y $\frac{11}{10}$
35. $\frac{-5}{11}, \frac{11}{5}$ y $\frac{11}{4}$
36. $\frac{3}{16}, \frac{2}{9}$ y $\frac{5}{36}$
37. $\frac{-1}{15}, \frac{-1}{20}$ y $\frac{-1}{12}$
38. $\frac{2}{11}, \frac{3}{5}$ y $\frac{5}{3}$
39. $\frac{4}{21}, \frac{7}{42}$ y $\frac{-11}{6}$
40. $\frac{11}{12}, \frac{-10}{9}$ y $\frac{5}{8}$

1.6 Adición y sustracción de racionales

Procedimiento 1.7 Adición y sustracción de racionales

Para calcular la suma o la diferencia entre dos o más números racionales, se procede así:

1. Determinar el MCM de los denominadores, que será en denominador común de las fracciones dadas.
2. Dividir el MCM entre cada denominador.
3. El numerador está compuesto por los productos de cada numerador por el cociente del MCM entre cada denominador.
4. Efectuar las operaciones indicadas en el numerador.
5. Simplificar la fracción si es posible.

La adición y/o sustracción de racionales consiste en reducir todas las fracciones a fracciones homogéneas tal y como se hace en el ejemplo 1.23; existen otras técnicas para efectuar estas operaciones, que aparentemente son más simples, pero con miras hacia el álgebra, resulta muy conveniente interiorizar el procedimiento 1.7 que es de carácter general tanto en la aritmética como en el álgebra.

Ejemplo 1.24

Simplificar $\frac{1}{9}+\frac{1}{15}-\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$

$\frac{1}{9}+\frac{1}{15}-\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$	Ejercicio dado
$\text{MCM}\{9,15,6,30\}=90$	Se determina el MCM de los denominadores
$\frac{90}{9}=10;\ \frac{90}{15}=6;\ \frac{90}{6}=15;\ \frac{90}{30}=3$	Dividir el MCM entre cada denominador
$\dfrac{(1)\cdot 10+(1)\cdot 6-(1)\cdot 15+(1)\cdot 3}{90}$	Se determina la fracción equivalente a las fracciones dadas
$\dfrac{4}{90}$	Se efectúan las operaciones en el numerador
$\dfrac{2}{45}$	Respuesta, después de simplificar la fracción

En el numerador quedaron las operaciones indicadas $(1)\cdot 10+(1)\cdot 6-(1)\cdot 15+(1)\cdot 3$, recuerde que primero se realizan los productos y luego las adiciones y sustracciones, como se ha indicado con anterioridad.

Ejemplo 1.25

Determinar el valor de $6+5\frac{1}{3}-4\frac{1}{6}-1\frac{1}{2}$

$6+5\frac{1}{3}-4\frac{1}{6}-1\frac{1}{2}$	Ejercicio dado
$6+5+\frac{1}{3}-\left(4+\frac{1}{6}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\right)$	Un número mixto es la suma de un entero con un racional, así que $5\frac{1}{3}=5+\frac{1}{3}$
$6+5+\frac{1}{3}-4-\frac{1}{6}-1-\frac{1}{2}$	Se suprimen los paréntesis
$6+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}$	Se opera con los enteros, antes que operar con los racionales
$\text{MCM}\{1,2,3,6\}=6$	Se determina el MCM de los denominadores
$\frac{6}{1}=6;\ \frac{6}{3}=2;\ \frac{6}{6}=1;\ \frac{6}{2}=3$	Se opera el MCM entre cada denominador
$\dfrac{6\cdot 6+1\cdot 2-1\cdot 1-1\cdot 3}{6}$	Se simplifica a una fracción equivalente, por el método del MCM
$\dfrac{34}{6}=\dfrac{17}{3}$	Se opera, primero el numerador y luego se simplifica la fracción

Notese que el mecanismo usado en el segundo paso de la solución, consiste en aplicar el concepto de número mixto y, en el siguiente paso, se usa el hecho de que si se resta $4\frac{1}{6}$, esto es equivalente a restar 4 y restar $\frac{1}{6}$. A este proceso se le conoce como suprimir los paréntesis. Cuando se suprimen paréntesis se aplica la ley distributiva, además, la ley de signos.

Resumen de la sección

1. Adición y sustracción de racionales

Ejercicio 1.6

Ejercicios sobre adición y/o sustracción de racionales

Combinar usando el procedimiento 1.7

1. $\frac{4}{9} - \frac{26}{45}$
2. $\frac{-8}{3} + \frac{19}{45}$
3. $\frac{4}{27} + \frac{8}{81}$
4. $\frac{26}{15} + \frac{11}{15}$
5. $\frac{19}{3} + \frac{19}{27}$
6. $\frac{8}{15} + \frac{26}{25}$
7. $\frac{4}{27} + \frac{1}{45}$
8. $\frac{-8}{9} - \frac{11}{15}$
9. $\frac{1}{27} + \frac{31}{18}$
10. $\frac{13}{5} + \frac{2}{25}$
11. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{-1}{5}$
12. $\frac{2}{10} - \frac{8}{15} - \frac{3}{6}$
13. $\frac{5}{7} + \frac{14}{9} + \frac{16}{21}$
14. $\frac{10}{9} + \frac{-1}{14} + \frac{11}{6}$
15. $\frac{-1}{11} - \frac{1}{4} + \frac{7}{2}$
16. $\frac{3}{16} - \frac{2}{9} - \frac{5}{36}$
17. $\frac{-1}{15} + \frac{-1}{20} + \frac{-1}{12}$
18. $\frac{2}{11} + \frac{3}{5} + \frac{5}{3}$
19. $\frac{4}{21} + \frac{7}{42} + \frac{-11}{6}$
20. $\frac{11}{12} - \frac{10}{9} + \frac{5}{8}$

Resolver los siguientes problemas

21. Al sumar $4/3$ y $15/18$, y simplificar el resultado obtenido, el número tiene como denominador:

22. Se reparte cierta cantidad de dinero entre 3 personas, de manera que una reciba $2/5$ del total, la otra $1/2$ y la tercera \$800. ¿A cuánto ascendería la suma repartida?

23. Dos personas A y B se encuentran separadas en un camino recto por 160 m. Si A y B se detienen cuando han caminado los $2/5$ y $1/5$, respectivamente, ¿a qué distancia se encuentran A y B, entre ellos, si partieron del mismo punto?

24. Dados los siguientes números racionales, $3/5$ y $7/9$, ordenados de menor a mayor, ¿cuál de los siguientes racionales puede intercalarse entre ellos? $26/45, 3/2, 4/5, 2/3$

25. Se tiene en un número primo de 3 cifras, tal que la suma de ellas es 11. Si la cifra de las decenas es 1, ¿cuál es el número si es menor que 500 y la cifra de las unidades es primo?

26. Ana ha pescado la cuarta parte de los peces que ha pescado Rubén. Si este le diera 45 peces a Ana, ambos quedarían con el mismo número de peces. ¿Cuántos peces pescó Ana?

27. En un apartamento se tiene un tanque de agua totalmente lleno. En un día se consumió medio tanque de agua; al día siguiente, la cuarta parte de lo que quedaba; el tercer día se consumieron 15 litros de agua, es decir, la tercera parte de lo que quedaba. ¿Cuál es la capacidad del tanque de agua?

28. La mitad de $5P$ es $3U$ ¿cuál es la tercera parte de $10P$?

29. Los tres quintos de los estudiantes de una clase son mujeres. Si se añadieran a esa clase 5 mujeres y 5 hombres, ¿Cuál afirmación es verdadera?
1) Hay más hombres que mujeres
2) Hay igual número de hombres que de mujeres
3) Hay más mujeres que hombres
4) Con la información dada no se puede determinar si hay más hombres que mujeres

1.7 Multiplicación y división de racionales

Procedimiento 1.8 Multiplicación de racionales

Para calcular el producto de dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se multiplican sus numeradores y denominadores entre sí, es decir $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{(a)(c)}{(b)(d)}$.

Ejemplo 1.26

Efectuar $\frac{6}{11} \cdot \frac{121}{18}$

$\frac{6}{11} \cdot \frac{121}{18}$	Ejercicio dado
$\frac{6 \cdot 121}{11 \cdot 18}$	Se multiplican las fracciones
$\frac{726}{198}$	Se efectúan los productos indicados
$\frac{11}{3}$	Se simplifica dividiendo por 66 el numerador y denominador

El ejemplo ilustra la manera como se multiplican dos fracciones, sin embargo hay otro mecanismo más eficiente. Se multiplican las fracciones para obtener $\frac{6 \cdot 121}{11 \cdot 18}$, ahora en vez de efectuar los productos, se simplifica la fracción de la siguiente forma $\frac{\cancel{6} \cdot \cancel{121}}{\cancel{11} \cdot \cancel{18}} = \frac{11}{3}$. Así, se ha simplificado por 6 y por 11, que es equivalente a simplificar por 66, como en el procedimiento anterior, pero mucho más obvio.

Vocabulario 1.2 Notación de división de racionales

La división entre los números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, se simboliza de las siguientes formas.

1. $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$
2. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$

Según la forma como se presente esta operación, se puede esquematizar el procedimiento, la lista muestra las opciones posibles para efectuar una división.

Procedimiento 1.9 División de racionales

1. La división de las fracciones $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ da como resultado una fracción cuyo numerador es el producto de las cifras extremas y con denominador el producto de los medios, así $\frac{(a)(c)}{(b)(d)}$.
2. Para efectuar $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ se aplica que dividir por $\frac{c}{d}$ es equivalente a multiplicar por $\frac{d}{c}$ y entonces se puede aplicar el procedimiento 1.8, es decir:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{(a)(d)}{(b)(c)}$$

Ejemplo 1.27

Simplificar $\frac{5}{6} \div \frac{3}{4}$

$\frac{5}{6} \div \frac{3}{4}$	Ejercicio dado
$\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{3}$	Forma equivalente de la división de racionales
$\frac{5 \cdot \cancel{4}}{\cancel{6} \cdot 3}$	Se efectúa la multiplicación de racionales
$\frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{10}{9}$	Se simplifican factores comunes y se opera

Para simplificar una fracción compleja como la del ejemplo siguiente, se debe emplear una buena estrategia de solución para evitar los errores derivados de una escritura confusa y poco coherente. Se han identificado dos bloques de operaciones, en el numerador y denominador, las cuales se van a calcular de forma separada.

Ejemplo 1.28

Evaluar $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{1}{4}}{\frac{9}{4} - \frac{9}{20}}$

$\dfrac{\boxed{\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{1}{4}}}{\boxed{\frac{9}{4} - \frac{9}{20}}}$	Ejercicio dado
$\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{27}{20}$	Se simplifica a una fracción el numerador
$\frac{9}{4} - \frac{9}{20} = \frac{9}{5}$	Se simplifica a una fracción el denominador
$\dfrac{\frac{27}{20}}{\frac{9}{5}}$	Se remplazan numerador y denominador con sus correspondientes valores
$\frac{\cancel{27} \cdot \cancel{5}}{\cancel{9} \cdot \cancel{20}} = \frac{3}{4}$	Se efectúa la división de los racionales y se simplifican los factores comunes

Es importante recordar que los ejercicios en los cuales hay numerosos cálculos por resolver, se pueden separar en bloques de operaciones para ser resueltas de forma separada. Una vez se realicen los cálculos, se reemplazan en la expresión original y se repite el proceso tantas veces como sea necesario, es decir, un gran problema, se divide en pequeños problemas.

Resumen de la sección

1. Multiplicación y división de racionales.

2. Notación usada para representar la división de racionales.

Ejercicio 1.7

Ejercicios sobre multiplicación y/o división de racionales

Simplificar los siguientes productos

1. $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}$
2. $\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{9}$
3. $\frac{4}{15}\cdot\frac{12}{3}$
4. $\frac{1}{16}\cdot\frac{24}{21}$
5. $\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{5}$
6. $\frac{14}{3}\cdot\frac{9}{2}$
7. $\frac{-2}{3}\cdot\frac{4}{7}$
8. $\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{5}$
9. $\frac{21}{14}\cdot\frac{7}{3}$
10. $\frac{-2}{3}\cdot\frac{-15}{10}$
11. $\frac{3}{11}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{3}$
12. $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}$
13. $\frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{3}\cdot\frac{3}{11}$
14. $\frac{-5}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{16}{3}$
15. $\frac{-10}{3}\cdot\frac{-12}{5}\cdot\frac{-14}{7}$
16. $\frac{10}{3}\cdot\frac{11}{4}\cdot\frac{12}{5}$
17. $\frac{7}{3}\cdot\frac{21}{10}\cdot\frac{5}{2}$
18. $\frac{-1}{10}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{20}{3}$
19. $\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{2}{5}$
20. $\frac{20}{7}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{14}{3}$

Efectuar las siguientes divisiones.

21. $\frac{3}{2}\div\frac{2}{3}$
22. $\frac{4}{5}\div\frac{6}{7}$
23. $\frac{5}{7}\div\frac{16}{7}$
24. $\frac{16}{15}\div\frac{8}{21}$
25. $\frac{12}{7}\div\frac{6}{5}$
26. $\frac{7}{3}\div\frac{-1}{3}$
27. $\frac{-2}{11}\div\frac{-1}{5}$
28. $\frac{9}{16}\div\frac{27}{32}$
29. $\frac{12}{7}\div\frac{14}{3}$
30. $\frac{24}{5}\div\frac{8}{15}$
31. $\frac{5}{6}\div\frac{6}{7}\div\frac{7}{8}$
32. $\frac{8}{5}\div\frac{10}{3}\div\frac{-1}{3}$
33. $\frac{1}{2}\div\frac{1}{4}\div\frac{1}{6}$
34. $\frac{1}{10}\div\frac{3}{100}\div\frac{10}{7}$
35. $\frac{20}{7}\div\frac{1}{9}\div\frac{24}{5}$
36. $\frac{10}{9}\div\frac{13}{4}\div\frac{20}{3}$
37. $\frac{3}{4}\div\frac{5}{7}\div\frac{7}{10}$
38. $\frac{1}{5}\div\frac{2}{5}\div\frac{3}{5}$
39. $\frac{9}{2}\div\frac{3}{16}\div\frac{15}{4}$
40. $\frac{-2}{5}\div\frac{7}{10}\div\frac{5}{8}$

Simplificar las siguientes fracciones compuestas.

41. $\dfrac{5}{2\cdot\dfrac{-3}{-7\div\dfrac{2}{\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{3}}}}$
42. $\dfrac{-7}{-3\div\dfrac{-5}{-3+\frac{3}{2}\cdot\frac{2+1}{5}}}$
43. $\dfrac{1}{-2+\dfrac{1}{-2\cdot\dfrac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5}}{2-\frac{5}{7}}}}$
44. $\dfrac{\frac{1}{5}\div\frac{-1}{2}}{3\cdot\dfrac{2}{7+\dfrac{-3}{-7+1}}}$
45. $\dfrac{\frac{-1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{5+\dfrac{-5}{-1+\dfrac{-2}{\frac{2}{3}\div\frac{-3}{7}}}}$
46. $\dfrac{-3}{-7\cdot\dfrac{7}{3\cdot\dfrac{1}{1+\frac{-1}{2}}}}$
47. $\dfrac{2\cdot\frac{2}{3}}{3+\dfrac{-2}{3+\dfrac{2}{\frac{2}{3}\div\frac{3}{5}}}}$
48. $\dfrac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}{-2\cdot\dfrac{-2}{3+\dfrac{7}{1-\frac{1}{7}}}}$

49. $$\cfrac{\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}}{-2+\cfrac{-3}{\frac{2}{3}\cdot\cfrac{-1}{-5+\frac{5}{3}}}}$$

50. $$\cfrac{-3}{\frac{2}{3}\cdot\cfrac{2}{-1+\cfrac{2}{3\div\frac{-5}{2}}}}$$

51. $$\cfrac{-5\div\frac{2}{3}}{\cfrac{-3}{5+\cfrac{2}{5\div\frac{-5}{2}}}}$$

52. $$\cfrac{2\div\frac{1}{2}}{-5+\cfrac{2}{\frac{2}{5}\cdot\cfrac{-5}{\frac{2}{3}\cdot\frac{-3}{7}}}}$$

53. $$\cfrac{3}{2\cdot\cfrac{2}{-2\cdot\cfrac{-5}{-7\cdot\frac{-5}{7}}}}$$

54. $$\cfrac{1}{-1+\cfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{-5+\cfrac{2}{2\div\frac{2}{3}}}}$$

55. $$\cfrac{\frac{1}{2}\div\frac{2}{3}}{-1\cdot\cfrac{-3}{2+\cfrac{3}{5\cdot\frac{-5}{3}}}}$$

56. $$\cfrac{2\div\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}+\cfrac{\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{5}}{7-\cfrac{3}{-2+\frac{1}{5}}}}$$

57. $$\cfrac{1}{3\cdot\cfrac{1}{-1\cdot\cfrac{-3}{-3\cdot\frac{-5}{7}}}}$$

58. $$\cfrac{2}{\cfrac{\frac{5}{2}}{5\div\cfrac{2}{-3+\frac{5}{3}}}}$$

59. $$\cfrac{1\cdot\frac{2}{5}}{-2+\cfrac{-2}{-5+\cfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}+\frac{-1}{2}}}}$$

60. $$\cfrac{5\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\cfrac{1}{\frac{1}{2}\div\cfrac{-5}{3\div\cfrac{\frac{1}{2}}{3+\frac{1}{2}}}}}$$

1.8 Polinomios aritméticos

Procedimiento 1.10 Simplificar un polinomio aritmético sin signos de agrupación

1. Efectuar todas la divisiones y multiplicaciones, antes que las adiciones o sustracciones.
2. Si hay fracciones, use el método del MCM, si no aplicar el procedimiento 1.3.

Ejemplo 1.29

Simplificar $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{11}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{10}\div\frac{4}{5}-\frac{7}{10}\div 2$

$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{11}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{10}\div\frac{4}{5}-\frac{7}{10}\div 2$	Ejercicio dado
$\frac{15}{8}-\frac{11}{4}+2-\frac{7}{8}-\frac{7}{20}$	Se fectúan los productos y cocientes primero
$\frac{15\cdot 5-11\cdot 10+2\cdot 40-7\cdot 5-7\cdot 2}{40}$	Se calcula em MCM de las fracciones
$\frac{75-110+80-35-14}{40}$	Se resuelven los productos en el numerador
$\frac{-4}{40}=\frac{-1}{10}$	Se realizan las sumas, restas y se simplifica la fracción

Se han realizado los productos y divisiones de forma eficiente, por ejemplo el producto $\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{2}$ se calculó así $\frac{\cancel{4}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{2}}=2$. En aritmética siempre que sea posible se simplifican las expresiones a fin de trabajar con cifras pequeñas y manejables, evitando el uso de la calculadora.

Procedimiento 1.11 Simplificar un polinomio aritmético con signos de agrupación

1. Efectuar primero las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
2. Realizar sumas y restas de izquierda a derecha.
3. Solucionar primero los signos de agrupación más interiores.

Ejemplo 1.30

Determinar el valor de $\left(\frac{-1}{2}+\left(\frac{5}{6}-\frac{2}{7}\right)\right)\div\left\{\left(\frac{11}{9}\cdot\frac{1}{8}\right)+\left[2-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{3}\right)\right]\right\}$

$\left(\frac{-1}{2}+\left(\boxed{\frac{5}{6}-\frac{2}{7}}\right)\right)\div\left\{\left(\boxed{\frac{11}{9}\cdot\frac{1}{8}}\right)+\left[2-\frac{1}{6}\cdot\left(\boxed{\frac{5}{4}-\frac{1}{3}}\right)\right]\right\}$	Ejercicio dado
$\left(\boxed{\frac{-1}{2}+\frac{23}{42}}\right)\div\left\{\frac{11}{72}+\left[2-\boxed{\frac{1}{6}\cdot\frac{11}{12}}\right]\right\}$	Se solucionan los signos de agrupación más interiores
$\left(\frac{1}{21}\right)\div\left\{\frac{11}{72}+\left[\boxed{2-\frac{11}{72}}\right]\right\}$	Se resuelve el paréntesis. En el corchete se resuelve el producto antes que la diferencia
$\frac{1}{21}\div\left\{\boxed{\frac{11}{72}+\frac{133}{72}}\right\}$	Se resuelve la diferencia en el corchete
$\frac{1}{21}\div\{2\}=\frac{1}{42}$	Se calcula la adición en el corchete y, finalmente, la división

Cada recuadro sombreado, representa las operaciones que se realizan según las indicaciones que se listan en el procedimiento.

Cuando se soluciona un ejercicio donde hay una gran cantidad de operaciones y cálculos que se deben efectuar, como en el ejemplo precedente, el lector debe realizar estas operaciones en una hoja adicional, de manera que no se mezclen todos los cálculos y así evitar un proceso confuso. Una ventaja que se deriva de realizar cálculos auxiliares de forma independiente, es que se puede hacer una revisión del desarrollo del ejercicio de forma eficiente, pues se tiene todo el proceso dividido por segmentos. Finalmente, las matemáticas operativas tienen como objetivo que el estudiante adquiera competencias que le permitan estructurar formas de pensamiento sistemático, lo cual le permite comprender y elaborar textos de naturaleza científica, como lo es la matemática.

En el ejercicio que sigue, justifica cada paso de la solución, con las razones o conceptos que se aplican a fin de obtener la simplificación en cada paso.

Ejemplo 1.31

Calcular $\left[\left(3\frac{1}{4}-4\frac{1}{3}\right)-\frac{5}{6}\right]\div\left\{\frac{11}{12}-\frac{1}{2}\left[2\frac{1}{3}+\left(1-1\frac{1}{4}\right)\right]\right\}$

Justificar cada paso del procedimiento

$\left[\left(3\frac{1}{4}-4\frac{1}{3}\right)-\frac{5}{6}\right]\div\left\{\frac{11}{12}-\frac{1}{2}\left[2\frac{1}{3}+\left(1-1\frac{1}{4}\right)\right]\right\}$

$\left[\left(\frac{13}{4}-\frac{13}{3}\right)-\frac{5}{6}\right]\div\left\{\frac{11}{12}-\frac{1}{2}\left[\frac{7}{3}+\left(1-\frac{5}{4}\right)\right]\right\}$

$\left[-\frac{13}{12}-\frac{5}{6}\right]\div\left\{\frac{11}{12}-\frac{1}{2}\left[\frac{7}{3}-\frac{1}{4}\right]\right\}$

$\left[-\frac{23}{12}\right]\div\left\{\frac{11}{12}-\frac{1}{2}\left[\frac{25}{12}\right]\right\}$

$\left[-\frac{23}{12}\right]\div\left\{\frac{11}{12}-\frac{25}{24}\right\}$

$\left[-\frac{23}{12}\right]\div\left\{-\frac{1}{8}\right\}$

$\frac{46}{3}$

Resumen de la sección

1. Simplificación de polinomios aritméticos.

Ejercicio 1.8

Ejercicios sobre polinomios aritméticos

1. $\left(\left(\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\div\frac{5}{7}\right)-\frac{2}{3}\right)$
2. $\left(\left(\left(\frac{7}{3}\div\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{3}{7}\right)+\frac{5}{2}\right)$
3. $\left(\left(\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\right)\div\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{3}{5}\right)$
4. $\left(\left(\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{5}\right)\div\frac{7}{3}\right)\div\frac{2}{7}\right)$
5. $\left(\left(\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{2}\right)-\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{2}{5}\right)$
6. $\left(\left(\frac{2}{7}-\frac{3}{7}\right)+\frac{7}{3}\right)-\left(\left(\left(1+\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}\right)+\frac{5}{2}\right)$
7. $\left(\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\right)-\left(\left(\left(\frac{7}{3}-\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{7}\right)-\frac{2}{5}\right)$
8. $\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\right)-\left(\left(\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{16}\right)$
9. $\left(5-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)\div\frac{8}{4}\right)-\left(\left(\left(\frac{16}{4}-\frac{11}{8}\right)+\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)$
10. $\left(\left(\frac{3}{2}\div\frac{9}{3}\right)\div\frac{5}{2}\right)-\left(\left(\left(\frac{7}{2}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}\right)$
11. $\left(\left(\left(1+\frac{5}{7}\right)+\frac{3}{5}\right)-\left(\left(\frac{2}{3}\div\frac{2}{7}\right)\div 1\right)\right)\div\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{3}\right)$
12. $\left(\left(\left(\frac{1}{2}\cdot 1\right)\div\frac{3}{2}\right)-\left(\left(5\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{5}{7}\right)\right)\div\left(\frac{7}{3}\div 1\right)$
13. $\left(\left(\left(4\cdot\frac{7}{2}\right)-\frac{3}{2}\right)-\left((1-1)+\frac{5}{2}\right)\right)\div\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\right)$
14. $\left(\left(\left(\frac{7}{2}\div\frac{3}{5}\right)-1\right)-\left(\left(\frac{2}{7}\div 1\right)-\frac{5}{3}\right)\right)\div\left(\frac{2}{7}\cdot 1\right)$
15. $\left(\left(\left(1+\frac{3}{2}\right)\div\frac{5}{3}\right)-\left(\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\right)+\frac{2}{5}\right)\right)\div\left(\frac{5}{7}-\frac{2}{7}\right)$

16. $\left(\left(\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{7}\right)-\left(\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)\div\frac{7}{5}\right)\right)\div\left(\frac{2}{5}+\frac{5}{7}\right)$

17. $\left(\left(\left(1-\frac{3}{2}\right)\div\frac{3}{5}\right)-\left(\left(1+\frac{3}{7}\right)-\frac{2}{3}\right)\right)\div\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{5}\right)$

18. $\left(\left(\left(-2+\frac{3}{5}\right)-\frac{2}{5}\right)-\left(\left(\frac{3}{5}-1\right)\cdot\frac{5}{7}\right)\right)\cdot\left(1\cdot\frac{5}{2}\right)$

19. $\left(\left(\left(\frac{3}{7}\div\frac{2}{7}\right)\cdot 1\right)-\left(\left(\frac{5}{7}\cdot 1\right)+\frac{5}{7}\right)\right)\div\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)$

20. $\left(\left(\left(2\cdot\frac{2}{7}\right)+\frac{2}{3}\right)-\left(\left(\frac{2}{5}-\frac{7}{5}\right)+\frac{2}{3}\right)\right)\div\left(1\div\frac{2}{7}\right)$

21. $\left(\left(\left(\frac{3}{7}-\frac{2}{3}\right)\cdot 7\right)-\left(\left(\frac{3}{7}+1\right)\div\frac{2}{3}\right)\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\div\frac{2}{3}\right)$

1.9 Sistema de los números irracionales

La definición de los irracionales se hace en contraposición con la de los números racionales, es decir un número irracional es un número que no es racional [8]. Los racionales representan la razón entre dos enteros, pero los irracionales son números que no se pueden expresar como la razón entre 2 enteros.

> **Definición 1.12 Sistema de los números irracionales**
> El sistema de los números irracionales está formado por todos los números del conjunto $\mathbb{Q}^*$ tales que no se pueden expresar la forma $\frac{a}{b}$ con a y b enteros.

Si bien la definición es matemáticamente correcta no proporciona un ejemplo o forma como se expresó en las definiciones de enteros y racionales, motivo por el cual existe dificultad para que el lector la aplique a un número a fin de establecer su naturaleza, es por esto por lo que en la práctica resulta conveniente usar la representación decimal de un número como mecanismo para determinar la irracionalidad del mismo. En este sentido se puede afirmar que un número irracional expresado en forma decimal, tiene infinitas cifras decimales no periódicas, y un número racional puede[9] tener infinitas cifras decimales periódicas.

De los números irracionales hay un grupo de ellos que vale la pena citar porque son empleados con mucha frecuencia en las matemáticas aplicadas.

(N) Irracionales de uso frecuente.

1. Raíz de dos	$\sqrt{2}\approx$	1,4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766 79...
2. Número de *euler*	$e\approx$	2,7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669 67...
3. Número *pi*	$\pi\approx$	3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749 44...
4. Número de *oro*	$\phi\approx$	1,6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354 48...

La figura muestra su localización en la recta real

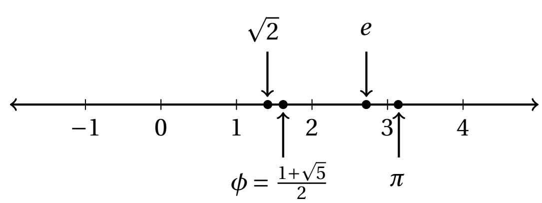


Figura 1.3: En la recta real ubicación de irracionales

[8] El sistema de los números reales está formado básicamente por racionales e irracionales.
[9] Hay números racionales con finitas o infinitas cifras decimales, ej $\frac{1}{2}=0{,}5$, pero $\frac{1}{3}=0{,}33333...$

1.10 Sistema de los números reales

El sistema de los números reales está formado por los conjuntos que se han definido en las secciones 1.1, 1.11 y 1.12; Se presentan una figura en la cual se muestra la forma como estos sistemas numéricos se acomodan para dar origen a los números reales.

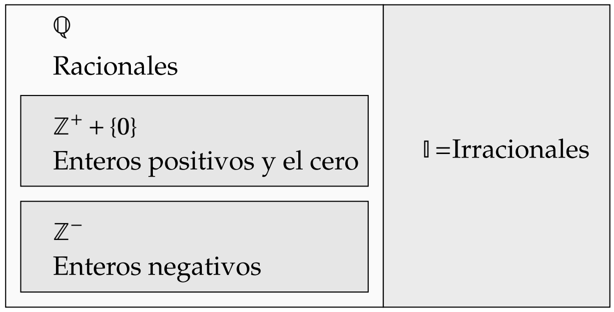


Figura 1.4: Sistema de los números reales.

En la Figura 1.4 se puede ver que un número entero es a la vez entero y racional, pero un racional no necesariamente es entero. De otro lado los números racionales e irracionales no tiene elementos en común, así que básicamente un número real es racional o irracional.

Propiedades de los números reales

En los números reales hay dos operaciones que cumplen una serie de propiedades, y es de vital importancia su comprensión y dominio. La tabla que sigue presenta las propiedades de los números reales para la adición y multiplicación.

Sean a, b y c reales, entonces se cumplen las siguientes propiedades.

Propiedad	Adición	Multiplicación
1. Clausurativa	La suma de los reales a y b es un real	El producto de los reales a y b es un real
2. Asociativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(ab)c=a(bc)$
3. Modulativa	El *cero* es el modulo de la adición por tanto se cumple que $a+0=0+a=a$	El *uno* es el modulo de la multiplicación es decir que $(a)(1)=(1)(a)=a$
4. Invertiva	Todo real a tiene un inverso aditivo $-a$ tal que $a+(-a)=(-a)+(a)=0$	Todo real a tiene un inverso[10]multiplicativo $\dfrac{1}{a}$ y se cumple que $(a)\left(\dfrac{1}{a}\right)=\left(\dfrac{1}{a}\right)(a)=1$
5. Conmutativa	Sumar a con b es lo mismo que sumar b con a	Multiplicar a por b es lo mismo que calcular b por a

Cuadro 1.1: Propiedades de la adición y multiplicación en reales

Hay una propiedad que está relacionada con las dos operaciones, esta es la *Ley Distributiva de la Multiplicación respecto de la Adición*, y dada su importancia la enunciamos de forma separa a la tabla anterior.

[10]El inverso multiplicativo de a se simboliza como a^{-1}

Propiedad 1.4 Sean a, b y c $\mathbb{R}$eales, entonces se cumple que:[11]

$$a(b+c) = ab + ac$$

Más adelante cuando se enuncien las otras operaciones aritméticas, se analizará cuáles de las propiedades anteriores se cumplen o no.

1.11 Respuesta ejercicios del capítulo

1. 11
2. -38
3. 2
4. -10
5. -27
6. 71
7. -29
8. 6
9. 35
10. -46
11. 50
12. 4
13. -33
14. -49
15. 7
16. 13
17. -3
18. 1
19. -27
20. 9
21. 12
22. -36
23. 0
24. -13
25. 0
26. 43
27. -41
28. 14
29. 10
30. -6
31. 3
32. -30
33. 29
34. -14
35. -5
36. 5 años
37. 16
38. 0
39. 9
40. 120 postes
41. 11
42. 33
43. 19
44. 12
45. 8
46. 6
47. 9
48. 28
49. 0
50. 17

Respuestas ejercicio 1.2

1. 2^4
2. $2^2 \cdot 5^2$
3. 3^3
4. 5^2
5. 7^3
6. $2 \cdot 7^2$
7. $3 \cdot 5^3$
8. $2^3 \cdot 3^3$
9. 2^6
10. 3^4
11. $2^2 \cdot 3 \cdot 11$
12. 5^4
13. $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$
14. $2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$
15. 3^6
16. 7^2
17. 2^9
18. $3^2 \cdot 5 \cdot 7$
19. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
20. $3^2 \cdot 5^2$
21. $5^2 \cdot 7^3$
22. $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$
23. $5^2 \cdot 7 \cdot 11^2$
24. $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
25. $3^3 \cdot 5 \cdot 11$
26. 11^3
27. $5^2 \cdot 11 \cdot 13$
28. $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$
29. $3^4 \cdot 11 \cdot 17$
30. $5^3 \cdot 7^3$
31. $2^5 \cdot 3 \cdot 11^2$
32. $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4$

Respuestas ejercicio 1.3

1. 20
2. 24
3. 15
4. 4
5. 1
6. 8

[11] En álgebra se usa esta la ley así: $ab + ac = a(b+c)$ y a este proceso se le conoce como factorización

7. 45
8. 10
9. 40
10. 3
11. 3
12. 25
13. 1
14. 9
15. 15
16. 6
17. 6
18. 20
19. 48
20. 2
21. 8
22. 15
23. 1
24. 1
25. 7
26. 12
27. 22
28. 30
29. 1
30. 24

Respuestas ejercicio 1.4

1. 40
2. 42
3. 48
4. 36
5. 75
6. 88
7. 200
8. 420
9. 50
10. 210
11. 126
12. 105
13. 360
14. 60
15. 252
16. 150
17. 240
18. 900
19. 315
20. 1800
21. 210
22. 945
23. 210
24. 180
25. 700
26. 1320
27. 3465
28. 1540
29. 1540
30. 360
31. 600
32. 2300
33. 504

Respuestas ejercicio 1.5

1. $-\frac{3}{2}$
2. $\frac{1}{3}$
3. $\frac{5}{11}$
4. $\frac{7}{12}$
5. $-\frac{18}{3}$
6. $\frac{1}{3}$
7. $-\frac{9}{5}$
8. $\frac{1}{2}$
9. $\frac{5}{2}$
10. $\frac{7}{3}$
11. $-\frac{3}{4}$
12. $\frac{11}{14}$
13. $\frac{5}{16}$
14. $\frac{6}{7}$
15. $\frac{7}{10}$
16. $\frac{15}{14}$
17. $-\frac{12}{25}$
18. $\frac{63}{76}$
19. $-\frac{6}{7}$
20. $\frac{55}{37}$
21. $\frac{3}{15}$ y $\frac{10}{15}$
22. $\frac{-6}{4}$ y $\frac{11}{4}$
23. $\frac{45}{6}$ y $\frac{14}{6}$
24. $\frac{-25}{30}$ y $\frac{-3}{30}$
25. $\frac{9}{48}$ y $\frac{56}{48}$
26. $\frac{16}{28}$ y $\frac{49}{28}$
27. $\frac{16}{18}$ y $\frac{21}{18}$
28. $\frac{20}{42}$ y $\frac{-21}{42}$
29. $\frac{33}{30}$ y $\frac{-24}{30}$
30. $\frac{65}{120}$ y $\frac{56}{120}$
31. $\frac{15}{30}, \frac{10}{30}$ y $\frac{-1}{6}$
32. $\frac{6}{30}, \frac{16}{30}$ y $\frac{15}{30}$
33. $\frac{45}{63}, \frac{98}{63}$ y $\frac{48}{63}$
34. $\frac{1000}{490}, \frac{-35}{490}$ y $\frac{539}{490}$
35. $\frac{-100}{220}, \frac{484}{220}$ y $\frac{605}{220}$
36. $\frac{27}{144}, \frac{32}{144}$ y $\frac{20}{144}$
37. $\frac{-4}{60}, \frac{-3}{60}$ y $\frac{-5}{60}$
38. $\frac{30}{165}, \frac{99}{165}$ y $\frac{275}{165}$
39. $\frac{8}{42}, \frac{7}{42}$ y $\frac{-77}{42}$
40. $\frac{66}{72}, \frac{-80}{72}$ y $\frac{45}{72}$

Respuestas ejercicio 1.6

1. $-\frac{2}{15}$

2. $-\frac{101}{45}$
3. $\frac{20}{81}$
4. $\frac{37}{15}$
5. $\frac{190}{27}$
6. $\frac{118}{75}$
7. $\frac{23}{135}$
8. $-\frac{73}{45}$
9. $\frac{95}{54}$
10. $\frac{67}{25}$
11. $\frac{19}{30}$
12. $-\frac{5}{6}$
13. $\frac{191}{63}$
14. $\frac{181}{63}$
15. $\frac{139}{44}$
16. $-\frac{25}{144}$
17. $-\frac{1}{5}$
18. $\frac{404}{165}$
19. $-\frac{31}{21}$
20. $\frac{31}{72}$
21. 6
22. 8000
23. 32
24. $\frac{2}{3}$
25. 317
26. 30
27. 120 litros
28. $12U$
29. Hay más mujeres que hombres

Respuestas ejercicio 1.7

1. $\frac{4}{15}$
2. $\frac{1}{6}$
3. $\frac{16}{15}$
4. $\frac{1}{14}$
5. 1
6. 21
7. $\frac{-8}{21}$
8. $\frac{3}{5}$
9. $\frac{7}{2}$
10. 1
11. $\frac{7}{66}$
12. $\frac{2}{5}$
13. $\frac{1}{22}$
14. -10
15. -16
16. 22
17. $\frac{49}{4}$
18. $-\frac{4}{15}$
19. $\frac{4}{125}$
20. $-\frac{20}{3}$
21. $\frac{9}{4}$
22. $\frac{14}{15}$
23. $\frac{5}{16}$
24. $\frac{14}{5}$
25. $\frac{10}{7}$
26. -7
27. $\frac{10}{11}$
28. $\frac{2}{3}$
29. $\frac{18}{49}$
30. 9
31. $\frac{10}{9}$
32. $-\frac{36}{25}$
33. 12
34. $\frac{7}{3}$
35. $\frac{75}{14}$
36. $\frac{2}{39}$
37. $\frac{3}{2}$
38. $\frac{5}{6}$
39. $\frac{32}{5}$
40. $-\frac{32}{35}$
41. $-\frac{35}{36}$
42. $\frac{50}{9}$
43. $-\frac{7}{29}$
44. $-\frac{1}{2}$
45. $\frac{2}{75}$
46. $\frac{18}{49}$
47. $\frac{16}{31}$
48. $\frac{67}{72}$
49. $-\frac{5}{68}$
50. 6
51. 10
52. $-\frac{28}{33}$
53. $\frac{3}{2}$
54. $-\frac{26}{27}$
55. $\frac{41}{100}$
56. $\frac{52}{27}$
57. $\frac{7}{15}$
58. $-\frac{8}{3}$
59. $-\frac{37}{150}$
60. $-\frac{21}{2}$

Respuestas ejercicio 1.8

1. $\frac{11}{15}$
2. $\frac{29}{10}$

3. $-\frac{21}{10}$

4. $\frac{9}{14}$

5. $\frac{1}{15}$

6. $-\frac{83}{42}$

7. $-\frac{93}{70}$

8. $\frac{9}{16}$

9. $\frac{29}{8}$

10. $-\frac{61}{20}$

11. $-\frac{1}{10}$

12. $-\frac{43}{49}$

13. 30

14. $\frac{87}{4}$

15. $\frac{9}{10}$

16. $-\frac{25}{26}$

17. $-\frac{67}{42}$

18. $-\frac{53}{14}$

19. $\frac{1}{42}$

20. $\frac{22}{49}$

21. $-\frac{24}{7}$

Referencias

[1] Kline, M. (1972). *El pensamiento Matemático de la Antigüedad a Nuestros Días.* Madrid: Alianza Universidad.

[2] Newman, R. (1968). *SIGMA: El Mundo de las Matemáticas.* México: Grijalbo.

[3] Baldor, A. (2001). *Aritmética Teórico Práctica.* México: 19 Ed. Publicaciones Cultural, S.A.

[4] Londoño, N. (1996). *Dimensión Matemática.* Medellín: Norma.

[5] Londoño, N. (1984). *Matemática Progresiva.* Medellín: Norma.

[6] Uribe, J. (1991). *Elementos de Matemáticas.* Medellín: Bedout.

[7] Vélez, A. (1989). *Álgebra Moderna.* Medellín: Editorial Universidad de Antioquia.

[8] Swokowski, E. (2009). *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* México: Cengage.

[9] Stewart, J. (2012). *Precálculo, 6 Ed.* México: Cengage.

[10] Sullivan, M. (1997). *Precálculo, 4 Ed.* México: Prentise Hall.

[11] Hoffmann, A. (2014). *Matemáticas Aplicadas a la Administración y los Negocios*: McGraw-Hill Interamericana.

[12] Bello, I. (2008). *Matemáticas Básicas Universitarias*: McGraw-Hill Interamericana.

[13] Goñi, J. (2011). *Didáctica de las Matemáticas.* Madrid: Ministerio de Educación de España - Editorial GRAÓ, de IRIF, S.L.

[14] Guarín, H. (1987). *Introducción al Simbolismo Lógico.* Medellín: Norma.

[15] Guarín, H. (2000). *Introducción a los Sistemas Numéricos.* Medellín: Editorial Universidad de Antioquia.

[16] Wills, D. (1987). *Matemática Moderna Estructurada 1.* Medellín: Norma.

[17] Polya, G. (1965). *Cómo Plantear y Resolver Problemas.* México: Trillas.

[18] Arcila. M. (2012). *Micro de Matemáticas.* Recuperado de http://masweb.co/edu.

[19] Arcila, M. (2007). *Ejercicios de Matemáticas para Olimpiadas.* Recuperado de http://masweb.co/icfes.

[20] Wolfram, S. (2007). *Math.* Recuperado de https://www.wolframalpha.com/examples/Arithmetic.html

[21] Scrib. (2013). *Ejercicios de Matemáticas.* Recuperado de https://es.scribd.com/

[22] Borbón. (2014). *Edición de Textos Cientìficos.* Recuperado de http://tecdigital.tec.ac.cr

Marlon David Arcila Vanegas
Licenciado en Educación Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia, Especialista en Didácticas de las Ciencias, Matemáticas y Física, de la Universidad Pontificia Bolivariana. Docente de cátedra en la Universidad de Antioquia, Eafit, UPB, ITM, Pascual Bravo y Colmayor. Ha dedicado gran parte de su vida profesional en la implementación de las TIC a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, empleando software libre. Algunos de sus proyectos se pueden consultar en masweb.co.

marlon@csimedellin.com, mdav@outlook.com

Yeison Emilio Gomez Noreña
Matemático de la Universidad Nacional de Colombia, docente de cátedra en el Colegio Mayor de Antioquia y la Universidad Pontificia Bolivariana.

yegomezn@unal.edu.co

TEXTOS ACADÉMICOS

Aritmética
Teoría, ejemplos y problemas

Este texto ilustra conceptos básicos y necesarios de los cursos que emplean esta disciplina como lenguaje, para comunicar y representar las ideas de las matemáticas aplicadas, cuya base fundamental es la aritmética. También constituye un material de consulta obligado para los estudiantes que se enfrentan a las pruebas de Estado de la Calidad de la Educación Superior en Colombia, Saber pro, toda vez que contiene dos unidades que les facilita se preparación: proporcionalidad y operaciones básicas entre números reales.

This text illustrates basic and necessary concepts of courses which use this discipline as a language to communicate and represent the ideas of applied mathematics, whose basic foundation is arithmetic. In addition, this text is a primary reference for students who have to take the Saber pro exams (Pruebas de Estado de la Calidad de la Educación Superior en Colombia) since it has two units that can help for the preparation of these exams: proportionality and basic operations among real numbers.

ITM
Institución Universitaria
Acreditada en Alta Calidad

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
COLEGIO MAYOR
DE ANTIOQUIA

ISBN 978-958-8743-94-3