Institución
Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad

Matemáticas financieras

Diana Milena Pacheco Ortiz

Matemáticas
financieras

Matemáticas financieras

Diana Milena Pacheco Ortiz

Institución Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad

Pacheco Ortiz, Diana Milena
Matemáticas financieras / Diana Marcela Pacheco Ortiz -–1ª. Edición -- Medellín: Institución Universitaria ITM, 2023.
157 páginas -- (Deliberare)
Incluye referencias bibliográficas

1. Matemáticas financieras. 2. Interés (economía). 3. Amortización de deuda. 4. Inversión
I. Tít. II. Serie

519.4 SCDD 21 ed.

Catalogación en la publicación - Biblioteca ITM

Primera edición: octubre de 2023

ISBN: 978-958-5122-82-6 (electrónico)
DOI: https://doi.org/10.22430/9789585122826
URI: http://hdl.handle.net/20.500.12622/6205

Hecho en Medellín, Colombia

Editorial ITM
Calle 75 75-101
Medellín, Colombia
Teléfono: 604 440 51 00 ext. 5197
http://catalogo.itm.edu.co
fondoeditorial@itm.edu.co

Institución Universitaria ITM | Vigilado Mineducación. Reconocimiento de carácter académico: Resolución 6190 del 21 de diciembre de 2005, Mineducación. Reconocimiento de personería jurídica: Decreto 180 del 25 de febrero de 1992, Minjusticia. Renovación acreditación institucional de alta calidad, 8 años: Resolución 013595 del 24 de julio de 2020, Mineducación

Como citar:
Pacheco Ortiz, D. M. (2023). *Matemáticas financieras.* Editorial ITM.

Contenido

Lista de recursos gráficos

Lista de figuras

Lista de ilustraciones

Diana Milena Pacheco Ortiz
dimipacheco@hotmail.com

Docente universitaria en las áreas de Contabilidad y Matemáticas Financieras. Licenciada en Educación, contadora pública, especialista en Finanzas y magíster en Enseñanza de las Matemáticas. Ha trabajado por más de 10 años en actividades relacionadas con el mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje y con métodos de evaluación del desempeño. También es asesora en Normas Internacionales de Información Financiera, certificada por ***Association of Chartered Certified Accountants*** con sede en Londres.

Presentación

Las matemáticas financieras se han convertido en un elemento esencial para los profesionales de los negocios porque son el primer requisito para ingresar al conocimiento de las finanzas. El entorno económico mundial está sujeto al predominio del capitalismo financiero y resulta imposible pensar la vida moderna sin el uso del dinero (Makonye, 2020); por lo tanto, los estudiantes de las facultades de negocios requieren de formación pertinente para la comprensión y gestión inteligente de los productos financieros.

Este texto hace aportes pedagógicos útiles a partir de la comprensión de las dificultades de aprendizaje que durante varios años se han evidenciado en la práctica docente. La estructura permite la comprensión a partir de explicaciones simples y claras sobre los conceptos; asimismo, los estudiantes tienen acceso a un amplio conjunto de ejercicios y situaciones problémicas que le conducirán a la elaboración de su aprendizaje y, finalmente, podrán hacer una retroalimentación de su comprensión por medio de las actividades de autoevaluación.

Por otra parte, el libro integra dos saberes fundamentales: la intuición, mediante el modelamiento matemático de los conceptos, y la operacionalización de la práctica, haciendo uso de la hoja de cálculo. Por lo anterior, el estudiante podrá asimilar el fundamento conceptual haciendo uso de su razonamiento lógico, a partir del cual podrá construir su conocimiento (Piaget, 1981), con lo que se espera que esté habilitado para operacionalizar eficientemente las tareas respectivas en el ámbito laboral.

Por último, el texto se ajusta a los requerimientos del Ministerio de Educación Nacional en relación con la exigencia de resultados de aprendizaje como enunciados que indican las acciones que los estudiantes son capaces de elaborar a modo de evidencia del logro de la competencia.

Diana Pacheco

UNIDAD 1

Interés simple e interés compuesto

Introducción

Las matemáticas financieras son un conjunto de herramientas, técnicas y metodologías útiles para el análisis y la toma de decisiones sobre alternativas de inversión y de financiación, ejecutadas por personas naturales o jurídicas. Frente a un interrogante financiero, estas herramientas y técnicas permitirán plantear, procesar y analizar los resultados de manera argumentada.

Los métodos y procedimientos empleados en matemáticas financieras, tanto por su naturaleza como por su deducción y aplicación en diferentes escenarios, son elementos teóricos y prácticos que constituyen un acervo de herramientas con las cuales el profesional de los negocios puede aportar información útil en la toma de decisiones financieras con miras a la gestión eficiente de los recursos.

Resultados de aprendizaje

- Diferencia conceptual y procedimentalmente entre el interés simple y el interés compuesto.
- Grafica situaciones de inversión y financiación en diagramas de tiempo.
- Calcula valor presente, valor futuro, tasa y número de períodos con interés simple y con interés compuesto.
- Plantea y resuelve ecuaciones de valor para solucionar problemas que involucran interés compuesto.
- Usa las fórmulas financieras en Excel: VF, VA, NPER y TASA para resolver problemas en los que se proporcionan tres valores y deben hallar un valor desconocido.
- Usa la fórmula BUSCAR OBJETIVO en Excel para encontrar valores desconocidos.

Acción problémica

La empresa Frucol S. A. S. produce y comercializa jugos de distintos sabores. Actualmente debe reemplazar su maquinaria envasadora y, después de hacer las respectivas cotizaciones, decide cerrar el negocio con Asinec S. A. Paga $5 000 000 de cuota inicial y se compromete a pagar el saldo de la siguiente manera: $6 806 850 dentro de tres meses, $9 524 560 cuatro meses más tarde y un último pago en el mes 10 por valor de $10 890 911. El costo para este tipo de deudas es del 1.2 % mensual y, para registrar la transacción, la empresa debe reconocer el valor presente de estos pagos. ¿Por qué valor se deber registrar la deuda?

Pasados nueve meses, la empresa Frucol S. A. S. prevé que no podrá continuar pagando la deuda como la tenía acordada y le propone a su proveedor pagarla en seis cuotas mensuales iguales a partir del décimo mes. El proveedor acepta el negocio, pero le hace la refinanciación a una tasa del 1.5 % mensual. Calcule el valor de cada nueva cuota.

Conceptualización

El sistema capitalista

Aunque este se impuso a partir del siglo XVI con la desaparición del feudalismo, sus principios se evidencian desde la aparición de la humanidad, con su embrionaria predisposición por hacer trueques o intercambios. Estos comienzos se consolidaron con el mejoramiento de las técnicas de la agricultura, con lo cual las cosechas generaban excedentes para los agricultores y, por tanto, propiciaban la posibilidad de comercializar. La introducción de la moneda, el avance de las rutas comerciales, el progreso de la banca, el desarrollo colonial en la época de los descubrimientos y la revolución industrial, entre otros, fueron elementos propicios para la incubación y consolidación del sistema capitalista.

Dentro de este sistema, basado en la propiedad privada, surge un agente principal: el empresario, quien es el capitalista que invierte los recursos financieros esperando recibir una rentabilidad, pero que, por las situaciones de incertidumbre del entorno, también está dispuesto a asumir un riesgo. Dichas actividades le generan grandes excedentes al empresario, lo que produce acumulación de riqueza y el ciclo se repite una y otra vez. El surgimiento de las multinacionales, la liberación de los mercados, la desregularización de la economía y, en general, los procesos de globalización financiera explican la travesía desde el capitalismo comercial e industrial al capitalismo financiero, donde los mercados financieros se han nutrido en gran medida de los movimientos especulativos que favorecen la concentración de la riqueza. Apilánez (2009) señala que cada vez más capitales se desplazan hacia sectores especulativos donde la rentabilidad es mucho mayor, abandonando estos la esfera productiva con lo cual se está minando el sistema.

Contexto financiero

El siglo XX es testigo del vertiginoso cambio que han experimentado la teoría del dinero y su ocupación, a raíz del desarrollo económico mundial. La creciente necesidad de fondos por parte de unidades deficitarias y el amplio ahorro practicado por las unidades superavitarias han forzado el desarrollo del sistema financiero internacional. Además, se presentaron situaciones críticas que exigieron un mayor ingenio en relación con la consecución y uso del dinero, tales como las guerras mundiales, la crisis financiera de los años 30, la crisis latinoamericana de los años 80, la crisis asiática de los 90 y las últimas crisis en el siglo XXI (Marichal, 2013). Otros factores que también apoyaron el crecimiento de las finanzas fueron: el desarrollo de la informática y las comunicaciones, los niveles sostenidos de crecimiento económico durante varios períodos, las nuevas formas de apalancamiento, los nuevos esquemas de inversión y el desarrollo de instrumentos financieros sofisticados.

¿Qué es el sistema financiero?

Es un conjunto de entidades normas y procedimientos que permiten la regulación, supervisión y buen funcionamiento de las actividades crediticia y financiera. Estas instituciones son las que permiten el flujo de los recursos desde las unidades superavitarias hasta las unidades deficitarias, posibilitando así los medios de financiación de la economía tanto mundial como local.

- ***Organismos multilaterales:*** están conformados por tres o más naciones que propenden por la solución de problemas conjuntos; en relación con el sistema financiero se tienen: Fondo Monetario Internacional, Banco Mundial, Banco Interamericano de Desarrollo y Corporación Financiera Internacional, entre otros.

- ***Instituciones públicas:*** son una red de seguridad financiera; para Colombia, estas entidades son: Ministerio de Hacienda y Crédito Público, Superintendencia Financiera de Colombia, Autorregulador del Mercado de Valores, Fondos de Garantías y Banco de la República.

- ***Instituciones privadas:*** son establecimientos de crédito, sociedades de servicios financieros, sociedades de capitalización y entidades aseguradoras, entre otras.

Conceptos fundamentales de matemáticas financieras

Todos los días nos vemos inmersos en actividades tales que las herramientas matemáticas resultan bastante útiles. Las compras, las ventas, la toma de seguros, la adquisición de deudas, el aprovechamiento de descuentos y las decisiones sobre arrendamientos son algunas de las situaciones cotidianas que requieren de esas herramientas para evaluar alternativas y elegir aquella que conduzca a un mayor beneficio.

Matemáticas financieras: es la disciplina que provee conceptos, herramientas y técnicas adecuadas para analizar y evaluar distintas alternativas de operación, inversión y financiación. Los cálculos de estas matemáticas, por sí solos, no garantizan una buena toma de decisiones, pero sí indican el nivel de rentabilidad o costo que se origina en una alternativa financiera. Por lo tanto, es menester que el decisor obtenga suficiente información y de la mayor calidad posible mediante factores relacionados con la incertidumbre, la liquidez y los costos de oportunidad, entre otros.

Objeto de estudio de las matemáticas financieras: está relacionado con las operaciones, el dinero y su variación en relación con el tiempo.

¿Por qué no es lo mismo recibir \$1 000 000 hoy que recibir \$1 000 000 dentro de un año? El valor del dinero en el tiempo cambia por varias razones. Una de ellas es el crecimiento sostenido de los precios de los productos y servicios, lo que provoca la pérdida del poder adquisitivo de la moneda; con un millón de pesos a fin de año no se puede comprar lo mismo que se adquiría al iniciar este. Por otra parte, es distinto recibir la misma cantidad de dinero un año más tarde porque esto involucra un costo de oportunidad, es decir, dejar de recibir el dinero hoy impide realizar una de las muchas alternativas que se pueden ejecutar con este. Posponer la entrega del dinero implica también un riesgo para quien lo recibe y entraña un aumento en la expectativa de la cantidad que se quiere recibir. Finalmente, es importante tener en cuenta que el dinero es un bien económico, por tanto, hay que pagar por su uso, tal como se paga el alquiler por un apartamento o un precio por cualquier mercancía.

El dinero es un activo que está sujeto a cambio de valor debido al paso del tiempo, independientemente de que sea día laboral o no; por lo anterior, se concluye que el préstamo de dinero no puede ser gratuito y se debe pagar un costo; este pretende cubrir la pérdida del poder adquisitivo del dinero y compensar el sacrificio del prestamista. El dinero produce bienestar dado que su uso satisface necesidades; el hecho de que el prestamista elija posponer esa satisfacción supone un mayor beneficio.

La pérdida del poder adquisitivo se desencadena por el fenómeno de la inflación; esta puede tener varias causas:

- De demanda: ocurre cuando los agentes económicos (Gobiernos, empresas, familias) tratan de comprar más productos de los que hay disponibles; esto sucede, por ejemplo, cuando los salarios aumentan más de lo que es necesario para mantener el poder adquisitivo de los trabajadores.
- De oferta: ocurre cuando se reducen los productos que hay disponibles para los agentes económicos; esto puede suceder por fenómenos climáticos, la devaluación de la moneda y su consecuente efecto sobre las materias primas importadas o cualquier decisión que implique el alza sobre otras materias primas.

Inversión: recursos destinados a un proyecto con el fin de obtener beneficios económicos en el futuro. Sacrificio de recursos en el presente con la intención de obtener ganancias en el futuro implica que, además de recibir la inversión, se deben esperar recursos remanentes (Sarmiento, 2002). Existen dos variables importantes en el momento de hacer un análisis de decisión con respecto a una inversión; son rentabilidad y riesgo, que tienen una relación directa, es decir, a mayor riesgo se exige mayor rentabilidad y a menor riesgo la retribución es menor. El curso de matemáticas financieras se enfoca en las decisiones tomadas desde el punto de vista de la rentabilidad.

Interés: el valor del dinero en el tiempo se sufraga por medio del interés, que es la medida del incremento del dinero en el tiempo. En su forma más simple, la expresión matemática que modela el interés es:

$$I = F - P$$

Donde:

I: Interés en unidades monetarias
F: Valor futuro o final
P: Valor presente o inicial

Tasa de interés: indicador del interés. Razón entre lo que se recibe o entrega de interés y la cantidad que se solicita en préstamo o que se invierte.

$$i = \frac{I}{P}$$

Este indicador puede presentarse en forma de porcentaje o en número real, ejemplo i = 25 % o ***i*** = 0.25. Para convertir un número real a cifra porcentual basta multiplicar por 100 y poner el símbolo %. Para convertir un porcentaje a número real basta dividir en 100 y eliminar el símbolo %.

De la fórmula anterior se puede obtener otra para calcular el valor del interés en unidades monetarias.

$$I = i \times P$$

Fórmulas de rentabilidad (costo) o de variación: a continuación, se presentan tres fórmulas equivalentes que permiten calcular la rentabilidad o costo de un negocio. Estas son útiles de manera general para calcular cualquier variación y no solo en situaciones de dinero; también serán útiles para determinar la rentabilidad de un negocio o inversión, independientemente del tiempo. Es una medida de la variabilidad.

$$Rentabilidad = \frac{Valor\ final - Valor\ inicial}{Valor\ inicial}$$

$$Rentabilidad = \frac{Valor\ final}{Valor\ inicial} - 1$$

$$Rentabilidad = \frac{Utilidad}{Valor\ invertido}$$

Equivalencia: se refiere a la paridad que existe entre dos cantidades que aparentemente pueden ser diferentes en su expresión monetaria, pero que, por estar ubicadas en momentos diferentes y debido a la aplicación del principio sobre el valor del dinero en el tiempo, pueden producir los mismos resultados económicos. Por ejemplo: $1 000 000 a principio de año puede ser equivalente a $1 100 000 a fin de año, si en esta operación media una tasa del 10 %.

Variables: en las situaciones problémicas desarrolladas a lo largo del curso de matemáticas financieras se usarán algunos símbolos. A continuación, se presenta un listado de los más usados:

P = Valor presente, inicial o actual
F = Valor futuro o final
A = Anualidad o pago constante períodico
I = Interés (en pesos)
i = Tasa de interés (número real o porcentaje)
n = número de períodos
G = Gradiente o serie variable

Ejemplos

Identifique los cuatro símbolos con sus respectivos valores:

1. Se obtienen $25 000 000 por la aprobación de un préstamo a una tasa de interés del 1.4 % mensual. ¿Cuál sería el monto por pagar después de seis meses?

   P = $25 000 000

   F = ?

   i = 1.4 % mensual

   n = 6 meses

2. Se harán depósitos mensuales iguales en un fondo de inversión que paga el 0.3 % mensual. ¿De cuánto debe ser el valor de cada depósito mensual para tener acumulado al final del año una suma de $5 000 000?

   F = $5 000 000

   A = ?

   i = 0.3 % mensual

   n = 12 meses

3. Se depositan hoy $7 500 000 y después de año y medio se tienen acumulados $11 850 000. ¿Cuál fue la rentabilidad anual?

   P = $7 500 000

   F = $11 850 000

   i = ?

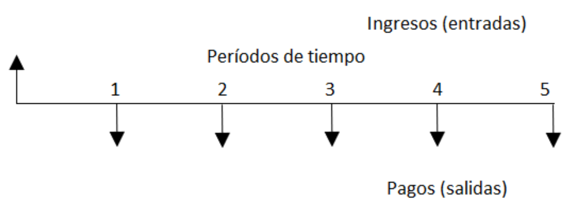
   n = 1.5 años

Es importante tener en cuenta que los períodos deben coincidir con la tasa de interés, es decir, si la tasa es mensual se debe pensar el tiempo en meses, si la tasa es anual, se debe pensar en años, y así sucesivamente.

Flujo de caja: es un diagrama de tiempo que permite representar gráficamente las entradas y salidas de fondos en una operación financiera a lo largo de determinado tiempo.

Figura 1.

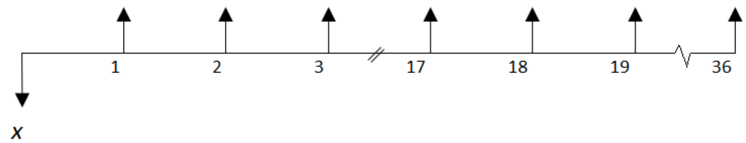
Flujo de caja 1



Las operaciones realizadas hoy y las cuotas iniciales ocurren en el momento cero; en el flujo de caja, cuando aparece el período uno es porque ya terminó el período uno, o cuando aparece el número cuatro es porque ya finalizó período cuatro. Por otra parte, si se tiene que graficar una operación financiera que involucre una cantidad grande de períodos, se pueden resumir tramos de la recta con un salto o una doble línea paralela, así:

Figura 2.

Flujo de caja 2



Flujo de caja neto: es una forma de presentar el flujo de caja de manera abreviada. Si dos cantidades aparecen en el mismo período, se pueden sumar si tienen la misma naturaleza o restar si son de naturaleza contraria.

Ejemplos

Elabore un flujo de caja apropiado para cada situación:

1. Una persona compra una casa por $100 000 000 y paga una cuota inicial de $20 000 000. Pacta pagar el saldo a los 3, 6 y 9 meses, en cuotas iguales de 28 000 000.

Figura 3.

Flujo de caja 3

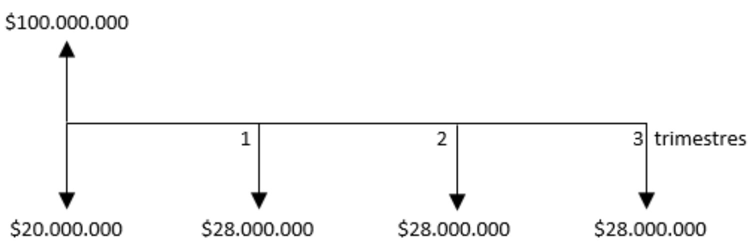
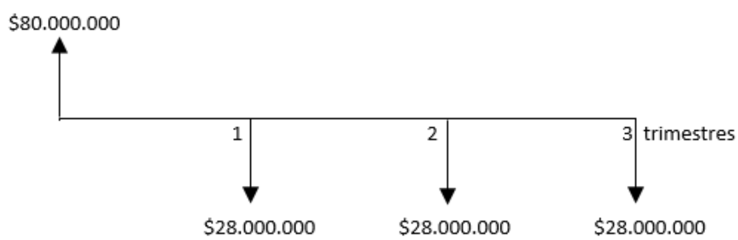


Figura 4.

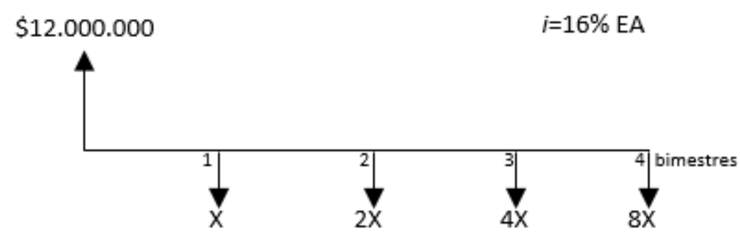
Flujo de caja neto



2. Una persona recibe $12 000 000 provenientes de un préstamo por el cual le cobran una tasa del 16 % efectivo anual. Planea pagarlo en cuatro cuotas bimestrales vencidas, siendo cada pago el doble del anterior.

Figura 5.

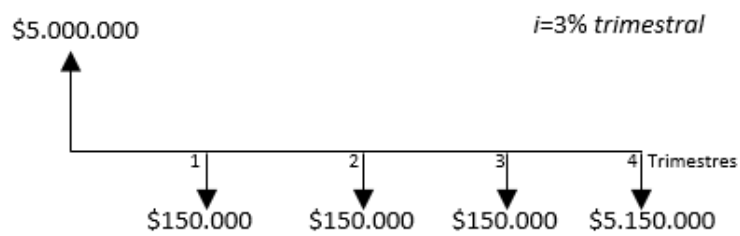
Flujo de caja 4



3. Un banco otorga un crédito a un cliente por $5 000 000 para ser pagado en un plazo anual a una tasa trimestral del 3 %. Debe restituirse el capital al final del año.

Figura 6.

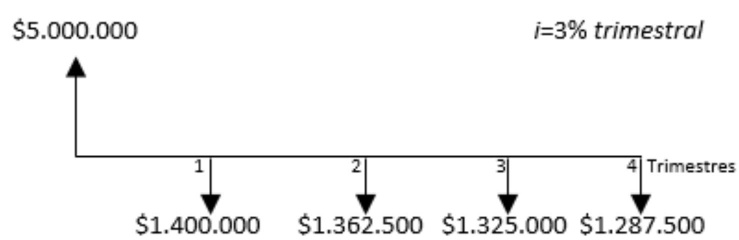
Flujo de caja 5



Un banco otorga un crédito a un cliente por $5 000 000 para ser pagado en un plazo anual a una tasa trimestral del 3 %. Debe pagarse el capital en cuatro cuotas iguales.

Figura 7.

Flujo de caja 6



Retroalimentación

Recuerde que los intereses se pagan sobre el saldo

Saldo inicial	Abono a la deuda	Intereses	Pago
5 000 000	1 250 000	150 000	1 400 000
3 750 000	1 250 000	112 500	1 362 500
2 500 000	1 250 000	75 000	1 325 000
1 250 000	1 250 000	27 500	1 287 500

Interés simple e interés compuesto

El interés simple

Es una modalidad de interés donde los intereses liquidados en un período no se suman al capital inicial, independientemente de que se paguen o no. Los intereses en cada período se calculan únicamente sobre el capital principal. Este tipo de interés no es legítimo desde la teoría del valor del dinero en el tiempo, si bien lo reconoce para el capital inicial, no lo hace con los intereses generados período a período. Por tanto, en este curso no se profundizará en las actividades realizadas bajo esta modalidad de interés. Se explicará en forma general por dos razones: la primera, porque estas operaciones existen en contextos reales debido a su fácil cálculo; no obstante, la aplicación de este tipo de interés en un sistema financiero organizado es limitada. La segunda razón, porque propicia un punto de comparación con la modalidad de interés compuesto.

Ejemplo

Suponga que usted pide prestado $1 000 000 que tiene un costo del 3 % mensual simple. Usted pagará los intereses y el capital al final del año. Determine el valor de los intereses acumulados y el monto que va a pagar al final de cada uno de los próximos 3 meses y al final del año.

Mes	Interés	Valor futuro
1	30 000	1 030 000
2	60 000	1 060 000
3	90 000	1 090 000
12	120 000	1 360 000

Para saber el interés acumulado al final del año basta con calcular:
$I = 1\,000\,000 \times 3\,\% \times 12$; en forma general sería:

$$I = Pin$$

Para conocer el monto al final de los 12 meses se tiene:
$I = 1000\,000 + 360\,000$; en forma general sería:

$$F = P + I$$

Sustituyendo por la fórmula de interés:

$$F = P + Pin$$

Factorizando, obtenemos:

Fórmula de valor futuro

$$F = P(1 + in)$$

Despejando, obtenemos tres fórmulas:

Valor presente

$$P = \frac{F}{1 + in}$$

Tasa de interés

$$i = \frac{1}{n}\left[\frac{F}{P} - 1\right]$$

Número de períodos

$$n = \frac{1}{i}\left[\frac{F}{P} - 1\right]$$

Ejemplo

1. ¿Cuál será el valor acumulado después de 6 meses, si se invierten $5 000 000 a una tasa del 2 % mensual simple?

$$F = 5\ 000\ 000(1 + 0.02(6))$$

$$F = 5\ 600\ 000$$

2. ¿Cuánto se debe invertir hoy para que dentro de 15 meses haya $3 251 200 a una tasa del 1.8 % mensual simple?

$$P = \frac{3\ 251\ 200}{1 + 0.018(15)}$$

$$P = 2\ 560\ 000$$

3. Un préstamo de $13 500 000 debe ser pagado dentro de 4 meses, momento en el cual se deben desembolsar $14 688 000. ¿Qué tasa de interés mensual simple se cobró en la operación?

$$i = \frac{1}{4}\left[\frac{14\ 688\ 000}{13\ 500\ 000} - 1\right]$$

$$i = 2.2\ \%$$

4. Una deuda de $2 500 000 fue negociada a una tasa del 1.5 % de interés mensual simple; si al final del plazo se tuvo que entregar una suma de $2 837 500 para saldar la deuda, ¿cuál fue el plazo de negociación expresado en meses?

$$n = \frac{1}{0.015}\left[\frac{2\ 837\ 500}{2\ 500\ 000} - 1\right]$$

$$n = 9 \text{ meses}$$

El interés compuesto

Es la modalidad en la que los intereses que se generan en cada período se van sumando al capital inicial, por lo que el capital sobre el cual se calculan se va modificando. Sumar los intereses al capital es lo que se denomina capitalización.

Período de capitalización

Es el tiempo que transcurre entre dos fechas continuas en las cuales los intereses se suman al capital.

Ejemplo

Suponga que usted pide prestado $1 000 000 que tiene un costo del 3 % mensual compuesto. Usted pagará los intereses y el capital al final del año. Determine el valor de los intereses acumulados y el monto para pagar al final de cada uno de los próximos 4 meses y deduzca la fórmula de valor futuro.

Mes	Interés			Valor futuro	
0				1 000 000	F_0
1	1 000 000 x 3 %	30 000	1 000 000 + 30 000	1 030 000	F_1
2	1 030 000 x 3 %	30 900	1 030 000 + 30 900	1 060 900	F_2
3	1 060 900 x 3 %	31 827	1 060 900 + 31 827	1 092 272	F_3

$$F_1 = 1\ 000\ 000 + 30\ 000$$

$$F_1 = 1\ 000\ 000 + 1\ 000\ 000 \times 3\ \%$$

$$F_1 = P + P \times i$$

$$F_1 = P(1 + i)$$

$$F_2 = 1\ 030\ 000 + 30\ 900$$

$$F_2 = 1\ 030\ 000 + 1\ 030\ 000 \times 3\ \%$$

$$F_2 = F_1 + F_1 \times i$$

$$F_2 = P(1 + i) + P(1 + i) \times i$$

$$F_2 = P(1 + i)(1 + i)$$

$$F_2 = P(1 + i)^2$$

$$F_3 = 1\ 060\ 900 + 31\ 827$$

$$F_3 = 1\ 060\ 900 + 1\ 060\ 900 \times 3\ \%$$

$$F_3 = F_2 + F_2 \times i$$

$$F_3 = P(1 + i)^2 + P(1 + i)^2 \times i$$

$$F_3 = P(1 + i)^2(1 + i)$$

$$F_3 = P(1 + i)^3$$

Se deduce fórmula de valor futuro:

$$F = P(1 + i)^n$$

Con base en la fórmula de valor futuro, se despejan:

Valor presente

$$P = \frac{F}{(1+i)^n} : \; por\, propiedad\, de\, la\, potenciación, también \;\; P = F(1+i)^{-n}$$

Tasa de interés

$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1 : \; por\, propiedad\, de\, la\, radicación, también \;\; i = \left[\frac{F}{P}\right]^{\frac{1}{n}} - 1$$

Número de períodos

$$n = \frac{logF - logP}{log\,(1+i)} = \frac{lnF - lnP}{ln(1+i)}$$

Con tasas variables

$$F = P(1+i_1)\,(1 + i_2)\,(1 + i_3)...(1 + i_n)$$

$$P = \frac{F}{(1+i_1)\,(1+i_2)\,(1+i_3)\,...\,(1+i_n)}$$

Notación estándar:

F= P(F/P, i %, n)

P= F(P/F, i %, n)

Ejemplo

1. El 12 de marzo se colocan $100 000 000 en una cartera de inversión que renta el 0.67 % mensual. Determine el valor final el 12 de septiembre cuando se retira la inversión.

$$F = P(1 + i)^n$$
$$F = 100\,000\,000(1 + 0.0067)^6$$

$$F = 104\,087\,940$$

2. Una persona debe pagar $20 000 000 dentro de año y medio. ¿Qué valor debería depositar hoy, en un fondo que reconoce el 2.1 % tasa periódica trimestral, para tener el valor requerido al final del plazo?

$$P = \frac{F}{(1+i)^n}$$

$$P = \frac{20\ 000\ 000}{(1+0.021)^6}$$

$$P = 17\ 655\ 318$$

3. Iniciando año, la arroba de arroz tenía un costo de $40 500; si el aumento de su precio se dio con base en las siguientes tasas:

Mes	Uno	Dos	Tres	Cuatro	Cinco	Seis
Tasa	1.29 %	1.28 %	0.94 %	0.50 %	0.51 %	0.48 %

¿Cuál es el precio al final del semestre?

$$F = P(1 + i_1)\ (1 + i_2)\ (1 + i_3)\ldots(1 + i_n)$$

$$F = 40\ 500(1 + 0.0129)\ (1 + 0.0128)\ (1 + 0.0094)\ (1+ 0.005)\ (1 + 0.0051)\ (1 + 0.0048)$$

$$F = 42\ 566$$

4. Una empresa planea cambiar su maquinaria de producción dentro de dos años y medio. Para esa fecha, estima que la nueva maquinaria estará costando $60 000 000; la maquinaria usada tiene un valor residual de $12 000 000. ¿Cuánto capital debe depositar en un fondo que paga el 2.9 % trimestral si desea adquirir la nueva maquinaria?

El valor futuro es = $60 000 000 – $12 000 000 = $48 000 000

$$P = 48\ 000\ 000(1 + 0.029)^{-10}$$

$$P = 36\ 065\ 129$$

5. Suponga que se requieren $5 000 000 después de seis meses. ¿Cuál sería el valor que se debe depositar hoy para alcanzar la meta si se tienen las siguientes tasas variables?

Mes	Uno	Dos	Tres	Cuatro	Cinco	Seis
Tasa	0.5 %	0.6 %	0.7 %	0.8 %	0.9 %	1 %

$$P = \frac{5\ 000\ 000}{(1+0.005)\ (1+0.006)\ (1+0.007)(1+0.008)(1+0.009)(1+0.01)}$$

$$P = 4\ 780\ 831$$

6. Se tienen \$602 000 acumulados hoy, a partir de un depósito que se realizó hace un año por \$500 000 en una cartera colectiva. Halle la tasa de interés mensual promedio a la cual rentó la cartera colectiva.

$$i = [\frac{602\ 000}{500\ 000}]^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$i \approx 1.56\ \%$$

7. ¿En cuánto tiempo \$700 000 se convierten en \$1 500 000 si se va a entregar una tasa de interés del 1.5 % mensual?

$$n = \frac{log 1\ 500\ 000 - log 700\ 000}{log\ (1 + 0.015)}$$

$$n \approx 51\, meses$$

8. Se debe hacer un depósito y esperar para hacer el retiro cuando este se haya incrementado en un 20 %. ¿Cuánto tiempo se debe esperar si la tasa es del 0.72 % mensual?

Se supone un valor presente cualquiera y se calcula un futuro con el aumento del 20 %

$$P = 100$$
$$F = 120$$

$$n = \frac{log 120 - log 100}{log\ (1 + 0.0072)}$$

$$n \approx 25\, meses$$

9. Un dinero se presta al 4 % mensual simple durante año y medio (tanto el capital como los intereses se pagan al final del plazo); se quiere comparar este negocio con otro que sea equivalente, pero con una tasa de interés compuesto. ¿Cuál es esa tasa?

Se supone un valor presente y se halla el valor futuro con las condiciones dadas de interés simple; posteriormente, se usan esos valores para hallar la tasa de interés compuesto equivalente.

Condiciones iniciales:

Interés simple	Interés compuesto
P = 100	*P = 100*
F = ?	*F = ?*
i = 4 %	*i = ?*
n = 18 meses	*n = 18 meses*

Valor futuro con interés simple: $F = 100(1 + 0.04 \times 18) = 172$

Dado que lo que se pretende es encontrar una tasa compuesta equivalente, es decir, que produzca los mismos resultados, que convierta $100 en $172, entonces:

$$i = \left(\frac{172}{100}\right)^{\frac{1}{18}} - 1$$

$$i \approx 3.06\ \%$$

10. Se realiza una inversión en un negocio en el cual se puede obtener un rendimiento promedio mensual del 2 %. ¿Cuánto tiempo tomará para que la inversión se incremente en un 100 %?

$$P = 100$$
$$F = 200$$

$$n = \frac{ln\,200 - ln\,100}{ln(1 + 0.02)}$$

$$n \approx 35\, meses$$

Ecuaciones de valor con interés compuesto

Son ecuaciones que se plantean con el fin de hallar valores desconocidos; estas ecuaciones se plantean reconociendo las equivalencias básicas de interés compuesto. Dado que lo único que hace diferente en poder de compra a una unidad monetaria es el tiempo, una base para poder compararla es ubicándola en un mismo instante, ya sea en el día de hoy, dentro de un año o en cualquier momento (Baca, 2000).

Teorema fundamental de las matemáticas financieras

$$\left[\sum_{x=1}^{n} Ingresos\ x = \sum_{x=1}^{n} Egresos\ x\right] \rightarrow en\ una\ misma\ fecha\ focal$$

La sumatoria de los ingresos es igual a la sumatoria de los egresos en una misma fecha focal

En relación con el flujo de caja: lo de arriba es igual a lo de abajo en una misma fecha focal.

Para trasladar cifras de izquierda a derecha se usa la fórmula de valor futuro y para trasladar cifras de derecha a izquierda se usa la fórmula de valor presente.

Pasos para resolver problemas:

- Leer el problema y graficar la situación en un flujo de caja.
- Elegir una fecha focal.
- Aplicar el teorema fundamental de las matemáticas financieras para plantear la ecuación y trasladar todas las cifras a la fecha focal.
- Resolver la ecuación.
- Interpretar la respuesta.

Ejemplo

1. Se negoció un bien que cuesta de contado $8 500 000 y se financia al 1.5 % mensual. La cuota inicial es del 15 % y el saldo se paga en tres cuotas trimestrales. Cada pago es $50 000 más alto que el anterior. Calcule el valor de cada pago.

Solución:

- Se simbolizan los valores desconocidos

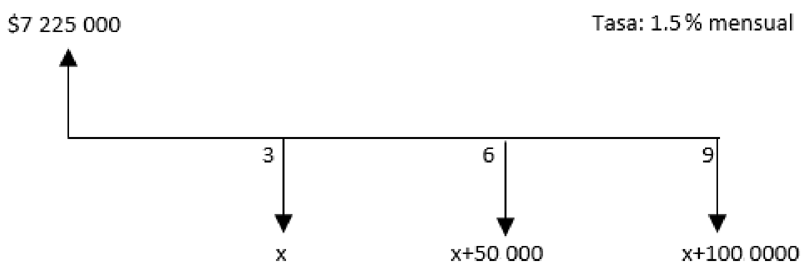
  Momento 3 = x

  Momento 6 = x + 50 000

  Momento 9 = x + 100 000
- Se dibuja el flujo de caja neto

Figura 8.

Flujo de caja 7



- Fecha focal: momento cero

$$ARRIBA = ABAJO \qquad \text{(en el momento 0)}$$

$$7\,225\,000 = x(1+0.015)^{-3} + (x+50\,000)(1+0.015)^{-6} + (x+100\,000)(1+0.015)^{-9}$$

$$7\,225\,000 = 0.95631699x + 0.91454219x + 45\,727 + 0.87459224x + 87\,459$$

$$7\,225\,000 - 45\,727 - 87\,459 = 0.95631699x + 0.91454219x + 0.87459224x$$

$$7\,225\,000 - 45\,727 - 87\,459 = 0.95631699x + 0.91454219x + 0.87459224x$$

$$7\,091\,814 = 2.74545142x$$

$$x = 2\,583\,114$$

Pago en el momento 3 = 2 583 114
Pago en el momento 6 = 2 633 114
Pago en el momento 9 = 2 683 114

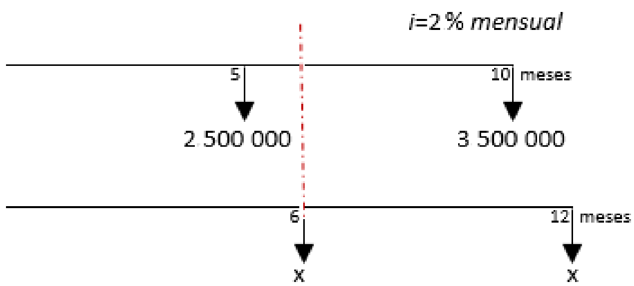
2. Una persona se comprometió a pagar $2 500 000 dentro de cinco meses y $3 500 000 cinco meses después. Posteriormente, renegocia los pagos y acuerda hacer dos iguales, uno en el mes seis y otro seis meses más tarde. Teniendo en cuenta una tasa del 2 % mensual, calcule el valor de cada pago.

Solución:

- Se dibuja el flujo de caja; en este caso no se analizará en la forma Ingresos = Egresos, sino que la segunda forma de pago debe ser equivalente a la primera.
- Se elige el momento 6 como fecha focal.

Figura 9.

Flujo de caja 8



$$\textit{Segunda forma} = \textit{primera forma} \qquad \text{(en el momento 6)}$$

$$x + x(1 + 0.02)^{-6} = 2\,500\,000(1 + 0.02) + 3\,500\,000(1 + 0.015)^{-4}$$

$$1.887971382x = 5\,783\,459$$

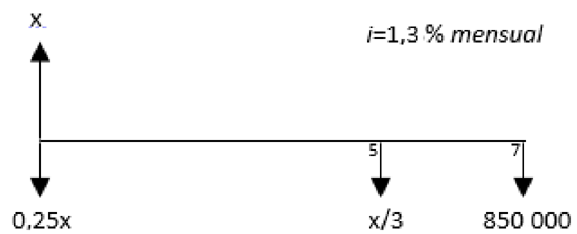
$$x = 3\,063\,319$$

Cuando las cifras son grandes, omitir las cifras decimales no ocasiona variaciones materiales en el resultado final; sin embargo, cuando las cifras son muy pequeñas, como en este caso del coeficiente de la variable ***x***, resulta necesario usar una gran cantidad de cifras decimales para no alterar significativamente el resultado final (mínimo 6 cifras decimales).

3. Se compra un electrodoméstico por el cual se paga una cuota inicial equivalente al 25 % de su valor de contado. Posteriormente, se pagan dos cuotas, una en el mes cuatro, de la cual se desconoce su valor, y otra al séptimo mes por valor de $850 000. La tasa de interés que le cobraron fue del 1.3 % mensual. ¿Cuál es el valor de contado?

Figura 10.

Flujo de caja 9



$$\textit{ARRIBA} = \textit{ABAJO} \qquad \text{(en el momento 0)}$$

$$x = 0.25x + \frac{x}{3}(1 + 0.013)^{-5} + 850\,000(1 + 0.013)^{-7}$$

$$x - 0.25x - 0.31248669x = 691\,128$$

$$0.43751331x = 691\,128$$

$$x = 1\,579\,673$$

Valor del activo: $1 579 673

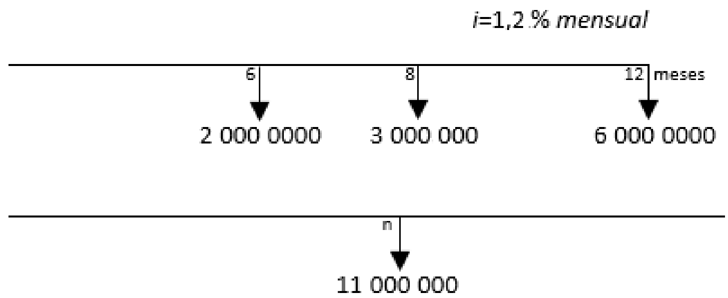
4. Una empresa otorga crédito a sus clientes con un costo del 1.5 % mensual. Uno de sus clientes le debe tres facturas: la primera vence en el mes seis y tiene un valor de \$2 000 000, la segunda vence en el mes ocho y tiene un valor de \$3 000 000, y la tercera se vence al final del año y tiene un valor de \$6 000 000. El cliente decide hacer un solo pago por \$11 000 000 (total de la deuda). ¿En qué fecha se debe pagar para cumplir con el principio del valor del dinero en el tiempo?

Solución:

- Cuando la ecuación de valor involucra momento cero, es menos complejo el planteamiento, si se elige fecha focal cero, por tanto, se recomienda hacerlo.

Figura 11.

Flujo de caja 10



$$\textit{Segunda forma} = \textit{primera forma} \qquad \text{(en el momento 0)}$$

$$11\,000\,000(1+0.012)^{-n} = 2\,000\,000(1+0.012)^{-6} + 3\,000\,000(1+0.012)^{-8}$$

$$+6\,000\,000(1+0.012)^{-12}$$

$$11\,000\,000(1+0.012)^{-n} = 9\,788\,591$$

$$(1+0.012)^{-n} = \frac{9\,788\,591}{11\,000\,000}$$

$$\ln(1+0.012)^{-n} = \ln 0.88987191$$

$$-n(\ln 1.012) = \ln 0.88987191$$

$$-n = \frac{\ln 0.88987191}{\ln\ 1.012}$$

$$n \approx 9.78$$

La fecha aproximada de pago es 9 meses y 23 días a partir de hoy

Solución de ecuaciones en la hoja de cálculo

A continuación, se describe el procedimiento que se va a seguir para resolver problemas de interés compuesto en la hoja de cálculo:

Cuando los problemas son situaciones sencillas donde se conocen tres de los valores y se desconoce una variable, se pueden resolver de forma rápida con las fórmulas financieras. Estas fórmulas están parametrizadas para que interpreten uno de los valores monetarios como entrada (signo positivo) y otro como salida (signo negativo).

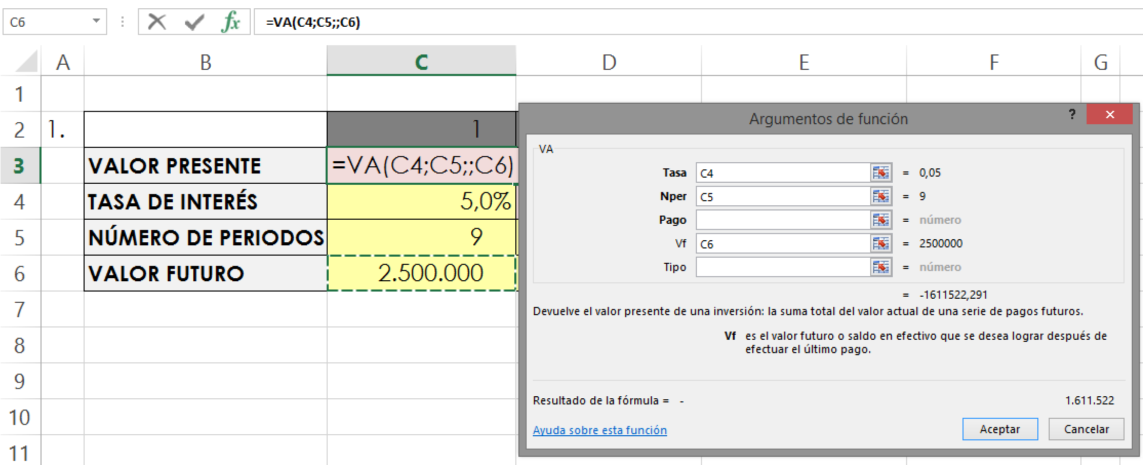
1. Se desconoce el valor presente de un monto de $2 500 000 dentro de 9 períodos a una tasa del 5 %

Solución:

- Se enlistan los valores conocidos.
- Ubique el cursor en la celda donde quiere hallar el valor desconocido.
- Oprima el botón de función: ***fx***
- Elija la categoría financiera y luego la fórmula VA.
- Seleccione cada una de las celdas que corresponden a los valores conocidos.
- Clic en ACEPTAR o ENTER.

Figura 12.

Hoja de cálculo 1



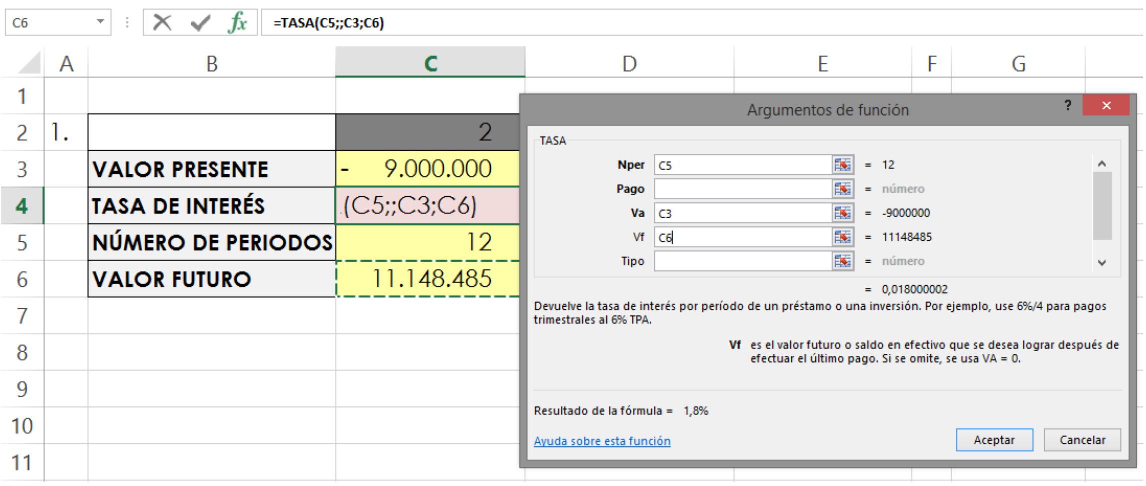
2. ¿Qué tasa de interés convierte $9 000 000 en $11 148 485 después de 12 períodos?

Solución:

- Se enlistan los valores conocidos; recuerde, uno de los dos valores (presente o futuro) debe ser negativo y el otro positivo.
- Ubique el cursor en la celda donde quiere hallar el valor desconocido.
- Oprima el botón de función ***fx***.
- Elija la categoría financiera y luego la fórmula TASA.
- Seleccione cada una de las celdas que corresponden a los valores conocidos.
- Clic en ACEPTAR o ENTER.

Figura 13.

Hoja de cálculo 2



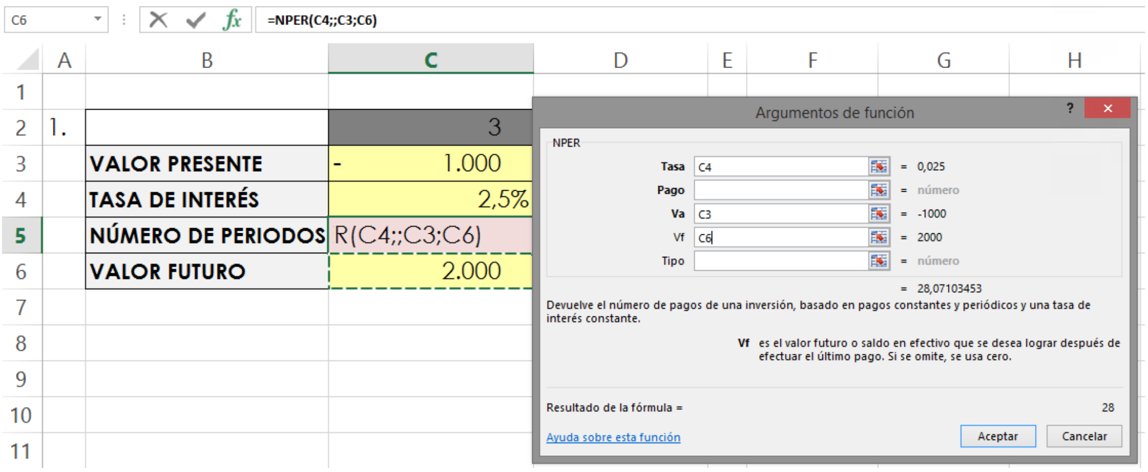
3. Si se desea duplicar un capital en un fondo que renta el 2.5 %, ¿cuánto tiempo se debe esperar?

Solución:

- Se enlistan los valores conocidos; recuerde, uno de los dos valores (presente o futuro) debe ser negativo y el otro positivo. El valor presente se puede suponer y luego hallar el valor futuro duplicando el presente.
- Ubique el cursor en la celda donde quiere hallar el valor desconocido.
- Oprima el botón de función ***fx***.
- Elija la categoría financiera y luego la fórmula NPER.
- Seleccione cada una de las celdas que corresponden a los valores desconocidos.
- Clic en ACEPTAR o ENTER.

Figura 14.

Hoja de cálculo 3



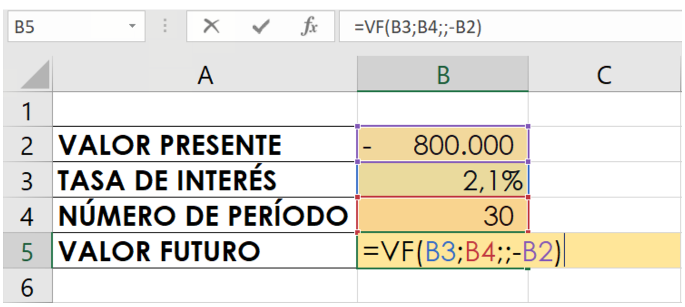
4. Dado un valor presente de $800 000 a una tasa del 2.1 % por período, durante 30 períodos, ¿cuánto se tendrá acumulado al final del plazo?

Solución:

- Se enlistan los valores conocidos; recuerde, uno de los dos valores (presente o futuro) debe ser negativo y el otro positivo.
- Ubique el cursor en la celda donde quiere hallar el valor desconocido.
- Otra forma práctica de hacerlo es digitando el nombre de la fórmula y abrir paréntesis.
- Elija la tasa, luego el número de períodos (punto y coma otra vez para saltar el dato del pago que para este ejercicio no es pertinente), elija valor actual y se cierra el paréntesis.
- ENTER (en algunos computadores se establece el uso de la coma, en lugar del punto y coma).

Figura 15.

Hoja de cálculo 4



Cuando las situaciones problémicas son más complejas porque incluyen cuotas iniciales, varios pagos o cuotas extraordinarias, entre otras, resulta útil la construcción de tablas de amortización y el apoyo de la función BUSCAR OBJETIVO para llegar a la solución. A continuación, se presenta uno de los ejercicios que se resolvieron anteriormente en forma algorítmica, ahora con solución por medio de la hoja de cálculo.

Se negoció un bien que cuesta de contado $8 500 000 y se financia al 1.5 % mensual. La cuota inicial es del 15 % y el saldo se paga en tres cuotas trimestrales. Cada pago es $50 000 más alto que el anterior. Calcule el valor de cada pago.

Solución:

- Se construye una tabla de amortización como aparece en la imagen, iniciando desde el momento cero, las fórmulas son:
    - ***Saldo en el momento cero:*** valor presente (o de contado) menos la cuota inicial.
    - ***Interés:*** saldo anterior por tasa de interés y se inmoviliza la celda (F4).
    - ***Abono:*** cuota actual menos interés actual.
    - ***Saldo:*** saldo anterior menos abono.
    - ***Cuota:*** de acuerdo con las indicaciones del problema.
    - ***Valor desconocido:*** se usa el 100 como un supuesto; ya sea una cuota, el valor presente u otro valor, se debe emplear un supuesto.

Figura 16.

Hoja de cálculo 5

C106

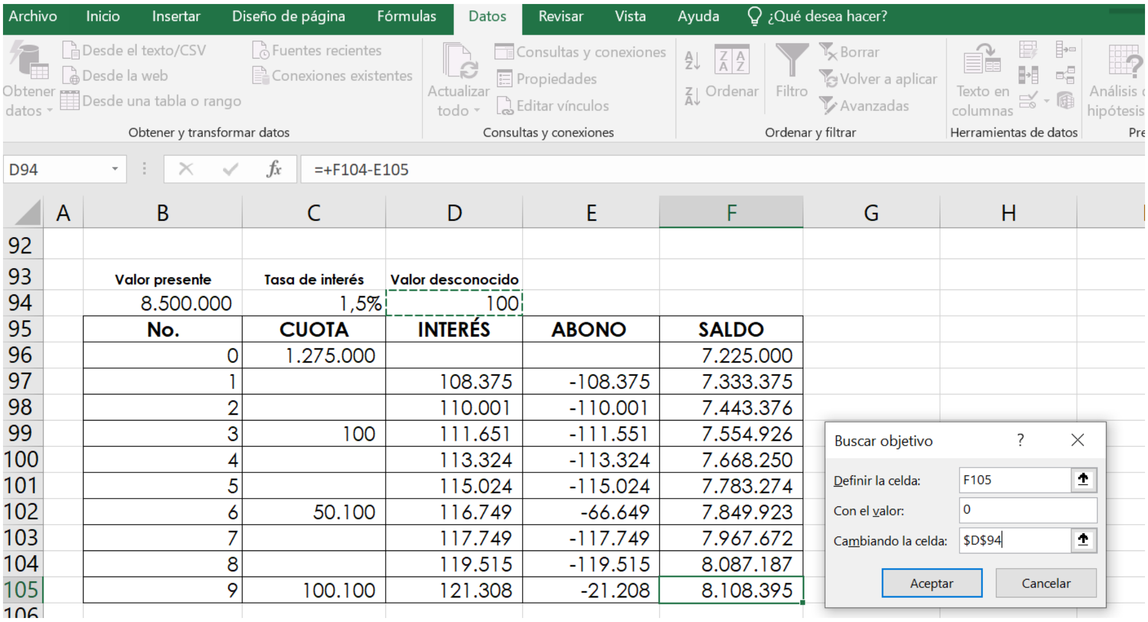
	A	B	C	D	E	F
93		*Valor presente*	*Tasa de interés*	*Valor desconocido*		
94		8.500.000	1,5%	100		
95		**No.**	**CUOTA**	**INTERÉS**	**ABONO**	**SALDO**
96		0	=B94*15%			=B94-C96
97		1		=F96*$C$94	=C97-D97	=F96-E97
98		2				
99		3	=D94			
100		4				
101		5				
102		6	=C99+50000			
103		7				
104		8				
105		9	=C102+50000			

- Se arrastran las fórmulas hasta el último período.
- Se sigue la ruta: datos/análisis de hipótesis/buscar objetivo.

- Se abre un recuadro.
    - Definir celda: se elige la últimaz celda del saldo.
    - Con el valor: "0" porque cuando esta celda esté en cero, significa que se terminó de pagar la celda.
    - Cambiando la celda: se elige la celda donde se digitó el valor desconocido.

Figura 17.

Hoja de cálculo 6



	B	C	D	E	F
93	Valor presente	Tasa de interés	Valor desconocido		
94	8.500.000	1,5%	100		
95	No.	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
96	0	1.275.000			7.225.000
97	1		108.375	-108.375	7.333.375
98	2		110.001	-110.001	7.443.376
99	3	100	111.651	-111.551	7.554.926
100	4		113.324	-113.324	7.668.250
101	5		115.024	-115.024	7.783.274
102	6	50.100	116.749	-66.649	7.849.923
103	7		117.749	-117.749	7.967.672
104	8		119.515	-119.515	8.087.187
105	9	100.100	121.308	-21.208	8.108.395

ACEPTAR y automáticamente el computador busca el valor desconocido.

Figura 18.

Hoja de cálculo 7

	B	C	D	E	F
93	Valor presente	Tasa de interés	Valor desconocido		
94	8.500.000	1,5%	2583113,873		
95	No.	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
96	0	1.275.000			7.225.000
97	1		108.375	-108.375	7.333.375
98	2		110.001	-110.001	7.443.376
99	3	2.583.114	111.651	2.471.463	4.971.912
100	4		74.579	-74.579	5.046.491
101	5		75.697	-75.697	5.122.188
102	6	2.633.114	76.833	2.556.281	2.565.907
103	7		38.489	-38.489	2.604.396
104	8		39.066	-39.066	2.643.462
105	9	2.683.114	39.652	2.643.462	0

Taller de aplicación

Generalidades

A) Responda en forma clara y concisa

1) ¿Qué es inversión?
2) ¿Qué es inflación y cuáles son sus causas?
3) ¿Qué es el interés?
4) ¿Qué es el flujo de caja?

B) Responda los puntos 1 y 2 sin el uso de la calculadora

1) Expprese como número real las siguientes cantidades porcentuales:

a) 23 %
b) 19 %
c) 11.4 %
d) 4 %
e) 1 %
f) 34.65 %
g) 32.54 %
h) 9.5 %
i) 0.09 %
j) 28.5 %
k) 7.25 %
l) 0.28 %

También, puede realizar la práctica en el siguiente enlace:

2) Calcule mentalmente (sin ayuda de la calculadora) los siguientes porcentajes:

a) 50 % de 15 600
b) 20 % de 32 000
c) 15 % de 7000
d) 25 % de 13 000
e) 60 % de 9000
f) 75 % de 80 000
g) 80 % de 12 000
h) 70 % de 11 000
i) 30 % de 32 000
j) 25 % de 16 000
k) 15 % de 12 000
l) 20 % de 45 000

También, puede realizar la práctica en el siguiente enlace:

C) Construya el flujo de caja

1) Un vehículo tiene un valor de \$30 000 000; el comprador paga el 25 % como cuota inicial. Posteriormente, realiza diez pagos mensuales de \$2 250 000 cada uno. ¿Qué opinión tiene usted sobre este negocio?

2) Una nevera cuesta $1 000 000 de contado. Para ser financiada se requiere un 10 % de pago inicial y el saldo se paga con cuatro cuotas trimestrales iguales de $260 000.

3) Una maquinaria cuesta $25 000 000; se entrega sin cuota inicial y se firma un compromiso que requiere un pago por $12 000 000 dentro de un semestre y otro por $14 500 000 al final del décimo mes.

4) Una deuda de $13 000 000 se paga en el transcurso de un semestre. Los pagos son mensuales y crecientes. El primer pago es de 1 800 000 y cada período los pagos aumentan un 5 % con respecto del anterior.

5) Se recibe un préstamo de $25 000 000; los pagos se harán de manera trimestral durante año y medio y la tasa cobrada es del 1.5 % trimestral. Los intereses deben ser pagados de manera anticipada y el capital se debe devolver al final del plazo.

Interés simple

1) Se piden prestados $2 500 000 y al cabo de 15 meses se deben pagar $3 437 500. Calcule la tasa de interés mensual simple.

2) Se adquiere una obligación a año y medio para cancelar en ese momento $3 276 600. Teniendo en cuenta una tasa del 1.5 % mensual simple, ¿cuál fue el capital inicial?

3) Un inversionista estima que una propiedad raíz se puede vender dentro de 2 años por $65 000 000. Calcule el valor por pagar hoy para conseguir una rentabilidad del 8 % semestral simple.

4) Se compra una propiedad por $80 000 000; las proyecciones indican que se puede vender en $105 000 000 después de un año. Calcule la tasa de interés mensual simple implícita en el negocio.

5) Se hace un depósito por $7 500 000; la rentabilidad esperada es del 3.6 % trimestral simple. ¿Cuánto tiempo se debe esperar para poder retirar $9 120 000?

6) Un ahorrador proyecta realizar depósitos en una cuenta que reconoce el 1.1% mensual simple, así: (a) un depósito hoy por $3 000 000, (b) dentro de 7 meses $2 000 000. Calcule el dinero disponible en la cuenta al final del año.

7) Elija la alternativa que más le convenga y justifique su respuesta.

   a) Dar en préstamo $48 000 000 a una tasa de interés del 1.6 % mensual simple.

b) Comprar un terreno por $48 000 000 para venderlo dentro de 2.5 años. Se estima que para ese tiempo se pueda vender en $63 000 000.

8) Para vender una propiedad raíz se tienen dos posibilidades:

a) Recibir $92 000 000 hoy.

b) Recibir $27 152 650 hoy y dos pagarés, uno por $36 500 000 cuando haya pasado medio año y otro por $40 000 000 al finalizar el año. Compare las cifras en el momento cero usando una tasa del 2 % mensual simple.

9) Se realiza una inversión por $5 000 000 y pasados dos años se obtuvieron $6 800 000. ¿A qué tasa de interés mensual simple rentó la inversión?

10) Hace un año Daniel tuvo que escoger entre las siguientes alternativas:

a) Invertir en acciones de la compañía A por $20 000 000 que actualmente tienen un valor de $26 000 000.

b) Colocar los recursos en un negocio que le entregaba el 2.65 % de interés mensual simple.

Después de asesorarse, usted eligió la primera alternativa. ¿Fue acertada la inversión? Justifique su respuesta.

Interés compuesto

1) Calcule el valor al final de cuatro años en un negocio que paga el 4 % trimestral y se depositan inicialmente $100 000.

2) Se adquiere una deuda de $2 000 000 con un plazo de tres años y una tasa de interés del 1.5 % mensual. ¿Cuál es la cantidad que se debe pagar al término de ese tiempo si se acumulan los intereses y el capital? ¿Cuánto son los intereses en dinero?

3) Calcule el dinero acumulado durante cinco años si se invierten $800 000 a una tasa mensual del 0.61 %?

4) Calcule el valor final de una inversión de $20 000 000 durante cinco años si los primeros tres años se paga una tasa del 1.3 % trimestral y los últimos dos la tasa es del 0.2 % mensual.

5) El salario de un empleado es de $1 950 000. ¿Cuál será el salario que devengue en el momento de su jubilación (dentro de 19 años) si los aumentos anuales fueron del 8 %?

6) Una empresa debe cancelar dentro de año y medio el valor de $20 000 000 correspondientes a una demanda. Dado que actualmente se goza de liquidez, la empresa planea hacer un ahorro en un fondo que le garantiza un rendimiento mensual del 0.8 %. ¿Cuál debe ser el valor que debería depositar hoy para tener acumulado el valor de $20 000 000?

7) Un valor se duplica en el plazo de un año con capitalizaciones de intereses bimestrales. ¿Cuál es la tasa de interés de la operación?

8) Dentro de 3 años se pagará una deuda por un monto de $1 800 000; halle el valor presente si la tasa de interés es del 3.5 % bimestral.

9) ¿Cuánto tiempo se debe esperar para que, después de depositar $1 500 000 en una cartera de renta fija que paga el 2.5 % trimestral, se puedan conseguir $2 088 000?

10) Se ponen $12 000 000 en un fondo de inversión durante ocho períodos, al cabo de los cuales se reciben $14 966 703.78. Calcule la tasa de interés mensual de la operación.

Ecuaciones de valor con interés compuesto

1) Una persona hace un depósito en un fondo de inversión por $X y efectúa los siguientes movimientos: retiro de $500 000 después de 6 meses, nuevo depósito de $1 200 000 dentro de 8 meses, retiro de la mitad del depósito inicial en el mes 10. Después de un año, aún conserva un saldo de $2 361 973. ¿Cuál fue el depósito inicial si el rendimiento promedio mensual fue del 0.9 %?

2) Para comprar un televisor con valor de contado de $3 000 000 se pagan $1 200 000 de cuota inicial y se firma un documento por la diferencia a pagar. El comprador decide pagar el saldo con dos abonos iguales a 3 y 6 meses. ¿Cuál es el importe de dichos pagos si se considera un interés de 6 % trimestral?

3) María tiene una deuda de $15 000 000. Hace un pago de $2 000 000 al cabo de tres meses y un pago de $3 000 000 en el mes seis. En el mes nueve hace un último pago. Ayuda a María a encontrar el valor del último pago si le están cobrando una tasa del 1.5 % mensual.

4) Para pagar un electrodoméstico que cuesta $1 200 000 se propone una cuota inicial equivalente a la quinta parte del valor de contado y otros dos pagos iguales en los meses seis y doce. ¿Cuál es el valor de cada pago si se cobra un 2 % de interés mensual?

5) Se planea renovar una maquinaria de una empresa dentro de tres años, momento en el cual se estima que la maquinaria costará US$25 000; el valor residual de la maquinaria actual es el 20 % de la maquinaria nueva. La empresa decide hacer 3 depósitos anuales vencidos que le permitan reunir el dinero de esa nueva máquina. ¿Cuál sería el valor de dichos depósitos en un fondo que paga el 7.5 % efectivo anual?

6) Una persona debe pagar $250 000 dentro de 3 meses y $ 400 000 dentro de 7 meses. Si desea cambiar la forma de pago por un solo pago con vencimiento al final del año, ¿cuál es el valor del pago si la tasa es del 2.1% mensual?

7) Se adquirió una deuda para ser pagada en 3 cuotas iguales de $1 560 000 cada 2 meses (primer pago dentro de dos meses); sin embargo, se renegocia la forma de pago así: $1 000 000 al final del cuarto mes, $650 000 al final del octavo mes, $1 000 000 al finalizar el año y el resto tres meses después. La operación tiene un costo 1.2 % mensual. Halle el valor del último pago.

8) Una comercializadora de repuestos vende una pieza de automóvil por valor de $2 750 000. Permite el pago a plazos y pide $1 000 000 de cuota inicial; en los meses cuatro y ocho se hacen dos pagos para cumplir con la totalidad de la operación, siendo la última cuota $250 000 más alta que la primera. La tasa de interés es del 1.5 %. Halle el valor de los pagos.

9) Un equipo vale de contado $2 000 000, pero se va a pagar a plazos. Se entregan $800 000 en el momento del contrato y le cobran una tasa del 1.5 % mensual por el valor del financiamiento; se pagarán tres cuotas trimestrales que disminuirán cada trimestre en $50 000. Encuentre el valor de cada uno de los pagos.

10) Se compra hoy un equipo de oficina a plazos, por el cual se pide una cuota inicial del 40 %; después de cinco meses se paga la mitad del valor de contado y al finalizar el mes diez se paga el saldo con $9 300 000. Halle el valor del equipo si la tasa mensual es del 1.8 %.

Autoevaluación

A) Selección múltiple con única respuesta

1) Usted adquiere un préstamo de $5 000 000 a una tasa del 26 % anual, el cual pagará en 12 cuotas iguales; para el cálculo de las cuotas se realiza el siguiente procedimiento:

Capital	5 000 000
Intereses	1 300 000
Total	6 300 000
# cuotas	12
Valor cuota	525 000

Con respecto al cálculo, usted puede concluir que obedece a:

- **a)** Interés simple porque desconoce el principio del valor del dinero en el tiempo.
- **b)** Interés compuesto porque desconoce el principio del valor del dinero en el tiempo.
- **c)** Interés simple porque reconoce el principio del valor del dinero en el tiempo.
- **d)** Interés compuesto porque reconoce el principio del valor del dinero en el tiempo.

2) Se depositan en un fondo $1 200 000 y después de medio año se tiene acumulado un monto de $1 440 000. La rentabilidad total de la operación fue del:

- **a)** 30 %
- **b)** 25 %
- **c)** 20 %
- **d)** 16.7 %

B) Elija la fórmula y resuelva (interés simple)

Un ahorrador proyecta realizar depósitos en una cuenta que reconoce el 1.1 % mensual simple de ahorros, así: (a) dentro de 3 meses $1 200 000, (b) dentro de 9 meses $2 000 000. Calcule el dinero disponible en la cuenta al final del año.

C) Elija la fórmula y resuelva (interés compuesto)

- **a)** ¿Cuánto tiempo tardaría en duplicarse una inversión en una entidad financiera que reconoce el 1.3 % mensual de interés?
- **b)** Calcule el valor final después de un año y medio si se hizo una inversión inicial de $3 500 000 al 1.6 % mensual

D) Ecuaciones de valor

- **a)** ¿Cuál es el valor de contado de un bien por el cual se paga una cuota inicial de $150 000, $120 000 al final del tercer mes, $130 000 al final del sexto mes y $140 000 al final del noveno mes si la tasa de interés es del 1.6 % mensual?
- **b)** Se abre una cuenta de ahorros con $1 250 000; se retiran $800 000 al finalizar el tercer mes, dos meses después se depositan $470 000. Calcule el saldo de la cuenta después de un año de constitución. Tasa 0.4 % mensual. Saldo al final de los doce meses.

UNIDAD 2

Tasas de interés

Introducción

Las tasas de interés son parte fundamental de las matemáticas financieras, pues son las que permiten medir el costo o la rentabilidad de un negocio. Por existir en distintos tipos de nominación y modalidad es esencial aprender a identificarlas y convertirlas en tasas equivalentes con el fin de establecer un punto de comparación. Por otra parte, los descuentos, la inflación, la devaluación y el interés continuo son manifestaciones concretas de la variación del valor del dinero y, por ende, de las tasas de interés, por lo que también son materia de estudio en esta unidad temática.

Resultados de aprendizaje

- Diferencias conceptual y procedimental entre tasas efectivas (periódicas - EA) y nominales.
- Realiza las respectivas conversiones entre tasas nominales y efectivas.
- Realiza las respectivas conversiones entre tasas anticipadas y vencidas
- Agrega y descuenta tasas efectivas por medio de la fórmula de Fisher como, por ejemplo: inflación, operaciones con moneda extranjera y tasa real.
- Demuestra la pérdida o ganancia de poder adquisitivo del dinero por medio del valor real, valor corriente o comparación de tasas.
- Encuentra los beneficios efectivos implícitos en operaciones de descuento.
- Opera los distintos tipos de tasas para reconocer los efectos de la inflación y la devaluación.
- Encuentra valores presente y futuro donde se involucran tasas continuas.
- Encuentra tasas efectivas a partir de una tasa nominal con capitalización continua.

Acción problémica

El señor Gómez realiza dos tipos de inversión: la primera, en un fondo en dólares que le genera una rentabilidad fija del 0.6 % mensual (al inicio del año, el dólar se cotiza a $3148 y al final del año a $3646); la segunda, en un fondo local que le ofrece una tasa del 5 % + DTF.

- Inflación en el país local fue del 5 %
- Valor EA de la DTF fue del 6 %

  Determine cuál de las dos inversiones resultó más ventajosa para el señor Gómez.

Conceptualización

La tasa de interés

Es el costo del dinero para quien lo pide prestado y es la rentabilidad para quien lo entrega. El dinero es como una mercancía, su costo lo establece el mercado por medio de la oferta y la demanda. El nivel de la tasa de interés depende de diversas variables como, por ejemplo: la inflación, la devaluación y el riesgo empresarial (Meza Orozco, 2017).

En Colombia, los niveles de la tasa de interés tienen su principal origen en la tasa de intervención del Banco de la República que es el instrumento más importante en la política monetaria, cuyo objetivo es preservar la capacidad adquisitiva de la moneda (Banco de la República, 2013).

Tasas nominales y efectivas

Tasa nominal

Desde un punto de vista sencillo, se puede definir la tasa de interés nominal como la tasa que no considera la capitalización de los intereses (Blank y Tarquin, 2006).

De manera operativa, la tasa nominal se denominará j y resultará de multiplicar la tasa de interés del período por el número de períodos. Por consiguiente, una tasa nominal se puede dar para un semestre, para un año o para cualquier lapso que pueda estar compuesto por períodos más pequeños; no obstante, para efectos prácticos en este curso, la tasa nominal se dará para un período anual.

Tasa efectiva

Es la tasa que capitaliza los intereses periódicos y, por tanto, mide el costo o rentabilidad verdadera de un negocio. Algunos autores generalizan este término para referirse a la tasa efectiva anual; sin embargo, en su esencia, la tasa efectiva puede serlo para cualquier período y no solamente para el año. Por tanto, la tasa efectiva puede darse como tasa efectiva anual o como tasa periódica (en referencia a períodos inferiores al año).

Tasa periódica

Es la tasa efectiva que se aplica directamente al capital para hacer el cálculo de los intereses de cada período; se considera una tasa efectiva, puesto que la tasa periódica tiene acumulados los intereses de dicho lapso sin estar sujeta a subdivisiones aritméticas del interés.

Con el siguiente ejemplo comparativo entre interés simple e interés compuesto, se hará evidente la diferencia entre estos tres tipos de tasas. Suponga un préstamo de $1 000 000 a una tasa mensual del 3 %. Haga la respectiva comparación, considerando los valores futuros en los momentos 1, 2, 3 y 12 (Meza Orozco, 2017).

Figura 19.

Con interés simple

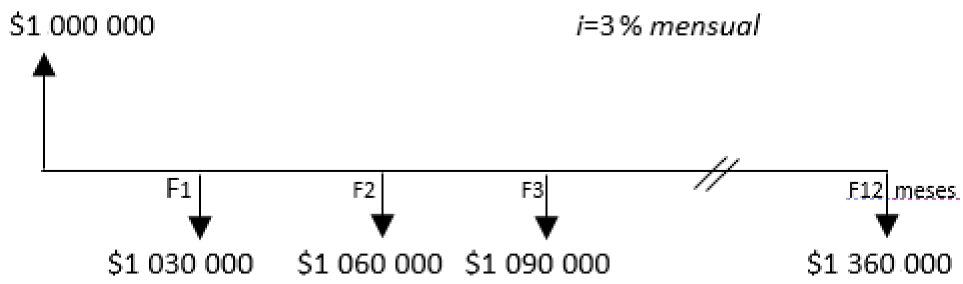
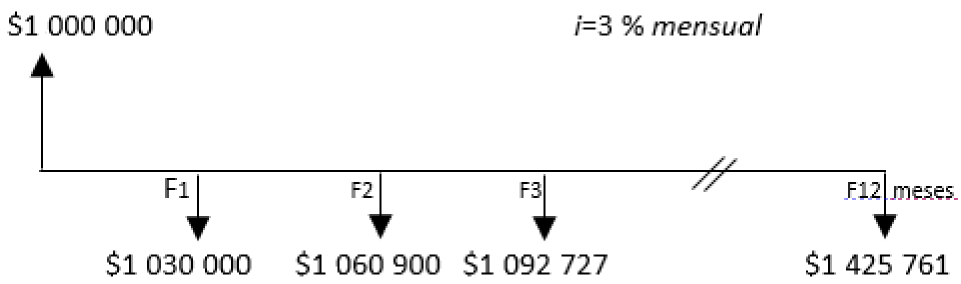


Figura 20.

Con interés compuesto



$$Costo\ real\ (interés\ simple) = \frac{1\ 360\ 000}{1\ 000\ 000} - 1 = 0.36 = 36\ \%$$

$$Costo\ real\ (interés\ compuesto) = \frac{1\ 425\ 761}{1\ 000\ 000} - 1 = 0.4258 = 42.58\ \%$$

La tasa que resulta de la operación que no capitaliza los intereses es una tasa nominal, $j = 36\ \%$

La tasa que resulta de la operación que capitaliza los intereses es una tasa efectiva; en este caso, la efectiva anual $EA = 42.58\ \%$

La tasa que se aplica directamente al capital para determinar los intereses periódicos es la tasa efectiva periódica, $i_{mensual} = 3\ \%$

Podría decirse que la tasa de interés nominal contempla los pagos periódicos de los intereses y no los acumula, mientras que la tasa efectiva estima el rendimiento con un único pago al final período. No obstante, si se hace referencia al sistema financiero, en este solamente se aplica el interés efectivo, aún si usted paga los intereses período a período; es decir, no se capitalizan los intereses y, por tanto, los intereses de un período no generarán más intereses en los períodos subsiguientes; esto se debe a que el banco reúne los intereses que usted le pagó y los intereses que otros usuarios le pagaron y forma nuevos paquetes que otorga como préstamos al público.

Desde el punto de vista de una persona natural corriente, es posible que solo opere el interés simple, puesto que, si le pagan algunos intereses, probablemente los destinará para cubrir algunos gastos y no reinvertirá los intereses. En este sentido, es comprensible el uso de la tasa nominal; si usted le dice a alguna persona que tiene un préstamo al 2 % mensual, lo más probable es que esta persona proyecte que usted está pagando un préstamo a una tasa del 24 % anual; esta proyección es la tasa nominal, no mide el costo efectivo, aunque permite tener una idea general de la tasa, como una expresión anualizada de la tasa periódica. Por tanto, la tasa nominal se halla así:

$$j = i_{periódica \times número\ de\ períodos}$$

En el ejemplo anterior se puede observar que:

$$j = 3\ \% \times 12 = 36\ \%\ nominal\ con\ capitalización\ mensual$$

Técnicamente, la tasa nominal puede calcularse para cualquier período, pero se suele usar solo para períodos anuales.

Ahora, con respecto al ejemplo dado, se puede notar que, al hacer la operación opuesta, es decir, dividir la tasa nominal, se obtiene la tasa periódica:

$$i_{mensual} = \frac{36\ \%}{12}$$

Sin embargo, se puede notar que la tasa efectiva anual no se puede hallar usando una simple multiplicación y tampoco se puede hallar una tasa periódica a partir de una efectiva anual con una simple división; esto se debe a que su comportamiento no es lineal, ya que capitaliza los intereses y, por ende, tiene un comportamiento geométrico. En ese orden de ideas, es necesario deducir un modelo matemático que permita hallar la tasa efectiva.

Si se parte de una unidad monetaria que se invierte al 3 % mensual y cuyos intereses se van a capitalizar hasta el final del año, se tiene:

$$F = 1(1 + 0.03)^{12} = 1.42576$$

Al sustraer la unidad monetaria invertida, entonces, se obtiene el beneficio por intereses:

$$i = 0.42576$$

Si se toma la unidad monetaria como el equivalente al 100 % de la inversión, se tiene, entonces, que el rendimiento efectivo es el 42.58 %.

Por otra parte, se tiene que:

$$1\,425\,761 = 1\,000\,000(1 + 3\,\%)^{12}$$
$$1\,000\,000 + 425\,761 = 1\,000\,000(1 + 3\,\%)^{12}$$

Reemplazando:

$$F = P(1 + i)^{n}$$

$$P + P \times EA = P(1 + i)^{n}$$

$$P(1 + EA) = P(1 + i)^{n}$$

$$(1 + EA) = (1 + i)^{n}$$

$$EA = (1 + i)^{n} - 1$$

Generalizando:

$$i = (1 + i)^{m/n} - 1$$

Donde n es el período de la tasa o número de períodos de la tasa que se conoce, mientras que m es el período o número de períodos de la tasa que se desconoce; m y n se deben expresar en la misma unidad de tiempo. Para el ejemplo que se ha venido desarrollando la tasa efectiva anual se hallaría así:

$$EA = (1 + 3\%)^{\frac{12}{1}} - 1$$

$$EA = 42.58\ \%$$

En este ejemplo, el tiempo está dado en meses, se conoce la tasa de un mes y se necesita la tasa de 12 meses. Si, por el contrario, lo que se quiere hallar es la tasa periódica, entonces, se conoce la tasa de 12 meses y se necesita la tasa de un mes:

$$i = (1 + 42.58\%)^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$i = 3\ \%\ mensual$$

Asimismo, cualquier par de tasas periódicas (períodos diferentes) que producen el mismo resultado durante el año, son tasas equivalentes, así:

$$(1 + i)^n = (1 + i)^m$$

Esta igualdad permite encontrar tasas efectivas equivalentes, por ejemplo:

$$(1 + i_{mensual})^{12} = (1 + i_{trimestral})^4$$

Una tasa mensual en 12 meses produce los mismos resultados que una tasa semestral en cuatro trimestres.

De esta manera, cuando se conoce una tasa trimestral del 9.27 % y se desea hallar una tasa mensual equivalente se operaría así:

$$(1 + i_{mensual})^{12} = (1 + 9.27\ \%)^4$$

Despejando:

$$i = (1 + 9.27\ \%)^{\frac{4}{12}} - 1$$

Que es equivalente a:

$$i = (1 + 9.27\ \%)^{\frac{1}{3}} - 1$$

Operando:

$$i = 0.02999152$$
$$i \approx 3\ \%$$

Diferencia entre tasa efectiva y tasa nominal: la correspondencia entre la tasa nominal y la tasa efectiva es análoga a la que se da entre el interés simple y el interés compuesto. La tasa efectiva capitaliza los intereses, mientras que la tasa nominal no los capitaliza.

Es importante, entonces, puntualizar lo siguiente:

- Las tasas nominales se hallan multiplicando las tasas periódicas correspondientes.
- Las tasas nominales deben dividirse para encontrar las tasas periódicas (solo se pueden dividir en los períodos de capitalización que tiene el año y que se indica en el nombre de la tasa).
- La tasa efectiva anual no se debe dividir.
- Las tasas periódicas no se deben dividir.
- Las tasas efectivas (periódicas o EA) se convierten por medio de la fórmula de equivalencias.
- La tasa nominal j no se introduce en la fórmula; para poder hacerlo, hay que dividirla para convertirla en tasa periódica.

Un asunto importante en relación con las tasas es el lenguaje usado para nominarlas, si no se logra identificar una tasa entre efectiva y nominal, tampoco se podrá elegir el procedimiento adecuado para convertirlas. A continuación, se presenta una tabla de ejemplos que le permiten identificar los nombres de las tasas con el tipo de tasa. Más que comprender las distintas nominaciones, se debe realizar una familiarización con el lenguaje porque hay que tener en cuenta que este es un consenso cultural.

Tasa nominal	Tasa efectiva periódica	Tasa efectiva anual
12 % nominal anual capitalizable trimestralmente	3 % trimestral	12.55 % efectiva anual
12 % nominal con capitalización trimestral	3 % trimestral vencida	12.55 % EA
12 % capitalizable trimestralmente	3 % trimestral anticipada	12.55 %
12 % trimestre vencido	3 % TV (incorrectamente usada en entidades financieras)	
12 % trimestre anticipado	3 % TV (incorrectamente usada en entidades financieras)	
12 % liquidable trimestralmente		
12 % convertible trimestralmente		
12 % trimestre vencido		
12 % NTV (nominal trimestre vencido)		
12 % ATV (anual trimestre vencido)		

- En este ejemplo se parte de un período trimestral, pero es extensivo para otro tipo de períodos, ya sean meses, bimestres, cuatrimestres y semestres, entre otros.
- Note que en algunos casos se puede confundir la tasa nominal con la tasa periódica; en ese caso, es importante analizar el nivel de la tasa y el contexto donde se usa este lenguaje para ayudar a determinar a qué tipo de tasa se refiere.
- Esta tabla no es taxativa; existen más formas particulares de nominar las tasas, pero se están refiriendo a las más usadas.
- Note que la tasa nominal no capitaliza los intereses, pero sí indica cada cuánto se hace la capitalización, mientras que la tasa efectiva anual no indica cuándo se capitalizan los intereses, pero ya tiene los intereses capitalizados.

Ilustración 1.

El nombre de las tasas nominales indica

La base

Es el período por el cual se da la tasa nominal. En este curso se tomará la tasa nominal siempre con base anual. Si la base no está indicada en el nombre de la tasa, se asume que es anual.

Período de capitalización

Indica con qué periodicidad se liquidan los intereses; puede ser mensual, trimestral, etc.

Modalidad de pago

Se refiere a si es anticipada o vencida; si en el nombre no aparece indicada la modalidad, se asume que es vencida.

A continuación, se presentarán varios ejemplos de conversiones de tasas de distintos tipos.

Ejemplo

1) ¿A qué tasa mensual corresponde una tasa nominal del 18 % capitalizable mensualmente?

$$i = \frac{18\ \%}{12} = 1.5\ \%\ mensual$$

Una vez se divide la tasa nominal en el número de períodos que indica su capitalización, se obtiene una tasa efectiva periódica; como se dividió en 12, tal como lo indicaba el período de capitalización, inmediatamente se tiene la tasa mensual.

2) Se tiene una tasa del 4 % trimestral. ¿A qué tasa nominal capitalizable trimestralmente corresponde?

$$j = 4\ \% \times 4 = 16\ \%\ capitalizable\ trimestralmente$$

Para hallar una tasa nominal solamente se debe multiplicar la tasa periódica por el número de períodos que tiene el año; como la tasa periódica es trimestral basta multiplicar y ya se tiene la nominal capitalizable trimestralmente.

3) Halle la tasa trimestral que es equivalente a una tasa del 2.2 % mensual.

$$(1 + i)^1 = (1 + 2.2\ \%)^3$$

Dado que las dos tasas involucradas son tasas efectivas periódicas, automáticamente se convierten por medio de equivalencia de tasas. Una tasa trimestral en un trimestre produce los mismos resultados que una tasa mensual en tres meses.

$$i = (1 + 2.2\ \%)^{\frac{3}{1}} - 1 \approx 6.75\ \%\ trimestral$$

n: conozco la tasa de un mes

m: necesito la tasa de tres meses

4) Halle una tasa mensual que sea equivalente a una tasa efectiva anual del 14 %.

$$(1 + i)^{12} = (1 + 14\ \%)^{1}$$

Una tasa mensual en 12 meses produce los mismos resultados que una tasa anual en un año.

$$i = (1 + 14\ \%)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 1.098\ \%\ mensual$$

5) Se constituye un certificado de depósito a término en un banco por valor de \$30 000 000, a una tasa del 8 % EA, con un plazo de 90 días. ¿Cuál es la tasa efectiva obtenida en el trimestre? ¿Cuánto recibió por intereses?

$$(1 + i)^{4} = (1 + 8\ \%)^{1}$$

Una tasa trimestral en un año produce los mismos resultados que una tasa anual en un año.

$$i = (1 + 8\ \%)^{\frac{1}{4}} - 1 \approx 1.94\ \%\ trimestral$$

$$I = 30\ 000\ 000 \times 0.01942654691 = \$582\ 796$$

Por ser tasas efectivas se plantea la equivalencia, se conoce la tasa de cuatro trimestres y se desconoce la tasa de un trimestre. Una vez obtenida la tasa periódica, se multiplica por el monto del capital invertido y se obtienen los intereses en pesos.

6) Si se tiene una tasa del 13.5 %, ¿a cuánto equivale una tasa nominal con capitalización trimestral?

$$i = (1 + 13.5\ \%)^{\frac{1}{4}} - 1 \approx 3.22\ \%\ trimestral$$

$$j = 3.22\ \% \times 4 = 12.87\ \%\ capitalizable\ trimestralmente$$

Para hallar la tasa nominal se multiplica la tasa periódica por el número de períodos del año; en este caso, primero se tenía que hallar la tasa periódica trimestral y una vez obtenida se multiplica para hallar la nominal. Usted puede aplicar todos los pasos en un solo procedimiento, así:

$$j = \left[(1 + 13.5\ \%)^{\frac{1}{4}} - 1\right] \times 4$$

7) María observa los anuncios de un crédito de consumo en dos entidades diferentes. En una se ofrece un interés del 24.5 % nominal con capitalización mensual y en otra de 25 % nominal con capitalización trimestral. ¿Qué opción resulta menos costosa?

$$EA = \left(1 + \frac{0.245}{12}\right)^{12} - 1 = 27.4473\ \%$$

$$EA = \left(1 + \frac{0.25}{4}\right)^{2} - 1 = 27.4429\ \%$$

Cuando una conversión se resuelve paso a paso, se deben conservar en la calculadora todos los decimales en cada uno de los pasos; de no ser así, se presentarán ligeras diferencias en el resultado final, pero como estos porcentajes se terminan aplicando a los capitales expresados en pesos, estas ligeras diferencias pueden representar grandes cantidades de dinero. Así, en este ejercicio se prefiere mostrar la tasa periódica en forma de fracción 0.245/12 ya que, si se resuelve la fracción, se pierden los decimales infinitos. Para elegir entre varias opciones es bastante útil hallar, para todas, la tasa efectiva anual y, de esta manera, poder compararlas.

8) Convierta una tasa nominal del 30 % mes vencido a una nominal con capitalización trimestral.

En la solución de este ejercicio, primero se enumerarán cada uno de los pasos:

a) Se divide la tasa nominal en 12 para convertirla en periódica mensual.

b) Se convierte de periódica mensual a periódica trimestral mediante equivalencia.

c) Se multiplica la tasa periódica trimestral por cuatro.

Usted puede realizar el procedimiento paso a paso o puede elegir realizar un solo procedimiento.

Primer paso	***Un solo procedimiento***
$i = \frac{0.3}{12} = 0.025$	
Segundo paso	
$i = (1 + 0.025)^3 - 1 \approx 0.0769$	$j = \left[\left(1 + \frac{0.3}{12}\right)^{3} - 1\right] \times 4 \approx 30.76\ \%\ TV$
Tercer paso	
$j = 0.0769 \times 4 = 30.76\ \%\ TV$	

En la fórmula, m = tres meses, n = 1 mes, por ser denominador $\frac{3}{1} = 3$

Tasas del sistema financiero

Existen varias tasas que resultan ser una referencia en el sistema financiero y es necesario identificar el papel que desempeñan en este.

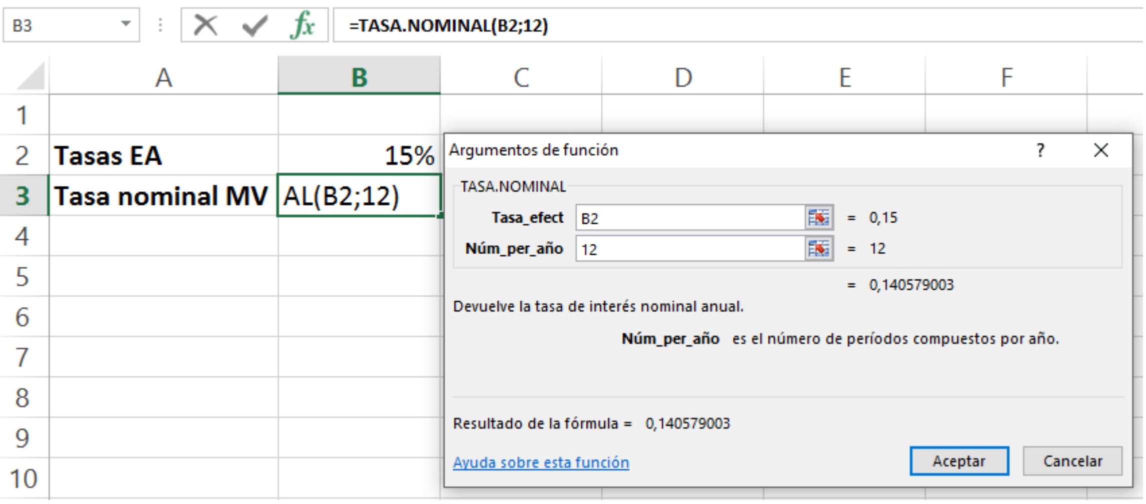
Conversión de tasas en la hoja de cálculo

Usted podrá usar la hoja de cálculo para encontrar la tasa nominal y la tasa efectiva anual.

1) Suponga que usted tiene una tasa efectiva anual del 15 % y desea encontrar una tasa nominal con capitalización mensual; el procedimiento es el siguiente:

Figura 21.

Hoja de cálculo 8

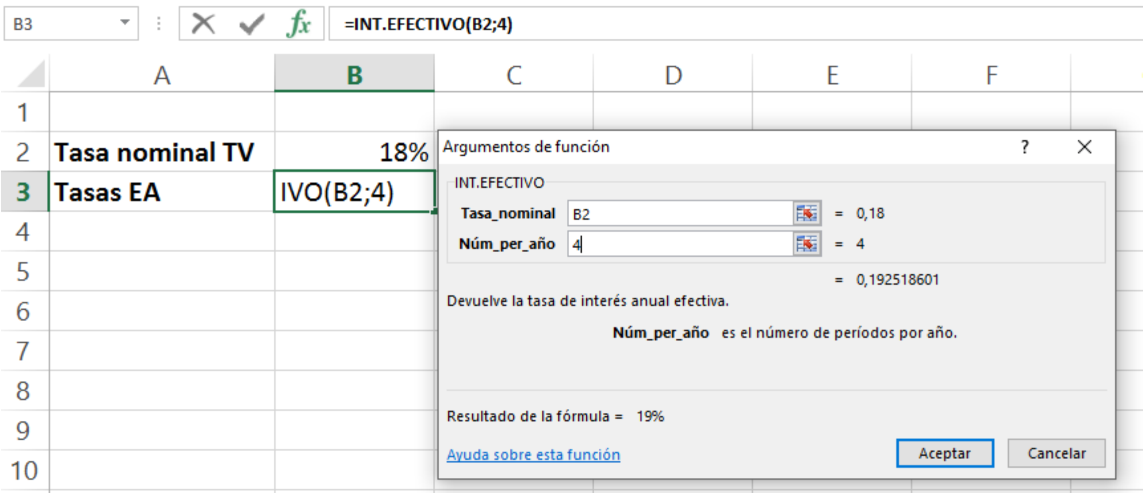


- Oprime el botón de función.
- Selecciona la categoría financiera y la función TASA.NOMINAL.
- Introduce la tasa efectiva y el número de períodos de capitalización; en este caso 12 porque capitaliza mensualmente.
- ACEPTAR.

2) Suponga que usted tiene una tasa nominal del 18 % con capitalización trimestral y desea encontrar la tasa efectiva anual equivalente; el procedimiento es el siguiente:

Figura 22.

Hoja de cálculo 9



- Oprime el botón de función.
- Selecciona la categoría financiera y la función INT.EFECTIVO.
- Introduce la tasa nominal y el número de períodos de capitalización, en este caso cuatro porque capitaliza trimestralmente.
- ACEPTAR.

Tasas anticipadas

Es la modalidad de interés donde los intereses se pagan al inicio del período. Esta modalidad implica un interés efectivo más alto que el que aparenta la tasa anticipada, ya que usted debe pagar los intereses al inicio de la negociación, lo que significa recibir menos efectivo. Suponga un préstamo de $1 000 000 al 24 % anual que se tiene que pagar de forma anticipada; $240 000 de intereses, con lo cual solo le estarán entregando $760 000 y al final del año usted devuelve $1 000 000 porque ya los intereses los pagó. El interés efectivo que implica este negocio es:

$$i = \frac{1\ 000\ 000}{760\ 000} - 1 \approx 31.58\ \%\ anual$$

La tasa que en apariencia era del 24 % resultó ser una tasa efectiva del 31.58 %. De lo anterior se deduce que:

Valor presente (valor del préstamo) = 1 000 000

Tasa anticipada = 24 %

$$i = \frac{1\,000\,000}{1\,000\,000 - 1\,000\,000 \times 24\,\%} - 1 \approx 31.58\,\%\ anual$$

$$i = \frac{P}{P - P \times i_a} - 1$$

$$i = \frac{1}{1 - i_a} - 1$$

$$i = \frac{1 - (1 - i_a)}{1 - i_a}$$

$$i = \frac{i_a}{1 - i_a}$$

Esta fórmula permite convertir una tasa anticipada a una tasa vencida; también, se puede despejar la fórmula cuando la necesidad es encontrar una tasa anticipada.

$$i = \frac{i_a}{1 - i_a}$$

$$i(1 - i_a) = i_a$$

$$i - i \times i_a = i_a$$

$$i = i_a + i \times i_a$$

$$i = i_a\,(1 + i)$$

$$i_a = \frac{i}{(1 + i)}$$

Ahora bien, usted puede realizar cualquier tipo de conversión usando la fórmula básica de conversión de efectivas y estas dos fórmulas puente para convertir de anticipada a vencida y viceversa.

Si se tiene una tasa anticipada y se quiere convertir de un tipo período a otro, resulta necesario usar la fórmula puente que permite transformar de anticipada a vencida y luego usar la fórmula de conversión de efectivas. Estos pasos se pueden simplificar en una sola fórmula que usted puede usar directamente.

Primer paso	Un solo procedimiento
$\mathrm{i} = \frac{\mathrm{i_a}}{1 - \mathrm{i_a}}$	$\mathrm{EA} = \left(1 + \frac{\mathrm{i_a}}{1 - \mathrm{i_a}}\right)^{\frac{m}{n}} - 1$
Segundo paso	**Simplificando:**
$\mathrm{EA} = (1 + \mathrm{i})^{\frac{m}{n}} - 1$	$\mathrm{EA} = (1 - \mathrm{i_a})^{-\frac{m}{n}} - 1$

Ejemplo

1) ¿A qué tasa mensual vencida equivale una tasa mensual anticipada del 2 %?

$$i = \frac{0.02}{1 - 0.02} = 2.04\ \%\ mensual\ vencida$$

En este caso basta usar la fórmula puente para convertir de anticipada a vencida.

2) ¿A qué tasa trimestral anticipada equivale una tasa del 2 % mensual vencida?

$$i = (1 + 0.02)^3 - 1 = 0.012\ trimestral\ vencida$$

$$i = \frac{0.0612}{1 + 0.0612} = 5.77\%\ trimestral\ anticipada$$

Aunque se pide una tasa anticipada, este no es el primer procedimiento que se debe realizar, puesto que primero se debe convertir el período en la fórmula de conversión de efectivas; una vez se tiene el período trimestral ya se puede convertir a una tasa anticipada.

3) Si se tiene una tasa nominal del 18 % trimestre anticipado (18 % TA), ¿cuál es la tasa efectiva anual equivalente?

En la solución de este ejercicio, primero se enumerará cada uno de los pasos, o bien usted también puede resumir los pasos en un solo procedimiento:

a) Se divide la tasa nominal en 4 para convertirla en periódica trimestral anticipada.

b) En la fórmula puente se convierte de trimestral anticipada a trimestral vencida.

c) En la fórmula de conversión de efectivas, se convierte en efectiva anual.

Primer paso	***Un solo procedimiento***
$$i_a = \frac{0.18}{4} = 0.045$$	$$EA = \left(1 - \frac{0.18}{4}\right)^{-4} - 1 = 20.22\ \%$$
Segundo paso	
$$i = \frac{0.045}{1 - 0.045} = 0.04712$$	
Tercer paso	
$EA = (1 + 0.04712)^4 - 1 = 20.22\ \%$	

4) Dada una tasa del 28 % nominal capitalizable trimestre anticipado (28 % TA), encuentre la tasa nominal anual con capitalización mensual equivalente.

Pasos:

a) Se divide la tasa nominal en 4 para convertirla en periódica trimestral anticipada.

b) En la fórmula puente se convierte de trimestral anticipada a trimestral vencida.

c) Se realiza la conversión de efectivas, de trimestral a mensual.

d) Se multiplica por 12 para convertirla en nominal.

Primer paso

$$i_a = \frac{0.28}{4} = 0.07\ trimestral\ anticipada$$

Segundo paso

$$i = \frac{0.07}{1 - 0.07} = 0.0753\ trimestral\ vencida$$

Tercer paso

$$i = (1 + 0.0753)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0.0245\ mensual\ vencida$$

Cuarto paso

$$j = 0.0245 \times 12 = 0.2938 = 29.38\ \%\ NMV$$

Recuerde conservar los decimales en la calculadora y usarlos paso a paso para no alterar el resultado final.

5) Halle una tasa nominal trimestre anticipado, equivalente a una tasa del 24 % nominal semestre anticipado.

Pasos:

a) Se divide la tasa nominal en dos para convertirla en periódica semestral anticipada.

b) En la fórmula puente se convierte de semestral anticipada a semestral vencida.

c) Por equivalencia de tasas. se convierte de semestral a trimestral.

d) En la fórmula puente se convierte de trimestral vencida a trimestral anticipada.

e) Se multiplica por 4 para convertirla en nominal.

Primer paso

$$i_a = \frac{0.24}{2} = 0.12\ semestral\ anticipada$$

Segundo paso

$$i = \frac{0.12}{1 - 0.12} = 0.1364\ semestral\ vencida$$

Tercer paso

$$i = (1 + 0.1364)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.066\ trimestral\ vencida$$

Cuarto paso

$$i_a = \frac{0.066}{1 + 0.066} = 0.019\ trimestral\ anticipada$$

Quinto paso

$$j = 0.019 \times 4 = 0.2477 = 24.77\ \%$$

Recuerde conservar los decimales en la calculadora y usarlos paso a paso para no alterar el resultado final.

Descuentos

En el contexto empresarial es habitual que las empresas otorguen a sus clientes plazos para el pago de las mercancías o materias primas; dependiendo del sector y del poder de negociación de estos agentes comerciales, se pueden obtener plazos de uno, dos, tres meses o más para pagar sus facturas. El uso de descuentos por pronto pago es una forma atrayente que usa el proveedor para recuperar cartera de una forma rápida; por otra parte, el aprovechamiento de estos descuentos constituye un beneficio para el cliente, pero si no se toma el beneficio, este constituye un costo de oportunidad.

Ejemplo

Una empresa concede a sus clientes un plazo de 60 días para pagar sus facturas; sin embargo, otorga un descuento del 5 % de la factura para aquellos que pagan de contado. ¿Cuál es el beneficio efectivo anual para quienes aprovechan el descuento?

Se puede suponer una factura de $1 000 000; entonces, si se paga de contado, se estarían pagando $950 000.

Figura 23.

Flujo de caja 11

$$i = \frac{1\,000\,000}{950\,000} - 1 = 0.0526\ por\ 60\ días$$

Ahora bien, para obtener el beneficio efectivo anual, se usa la fórmula de equivalencia de efectivas; no obstante, es necesario precisar la forma en la cual la empresa está otorgando el descuento: (1) pueden ser 60 días calendario, (2) pueden ser dos meses sin importar si estos tienen 29, 30 o 31 días, ya que esta información permitirá definir exactamente el beneficio efectivo anual.

En el primer caso, sería:

$$EA = (1 + 0.0526)^{\frac{365}{60}} - 1 = \ 36.62\ \%$$

En el segundo caso, sería:

$$EA = (1 + 0.0526)^{\frac{360}{60}} - 1 = \ 36.04\ \%$$

En este caso el exponente también podría ser $\frac{12}{2}$ o $\frac{6}{1}$; se conoce la tasa de 2 meses y se desconoce la de 12 meses, o se conoce la tasa de un bimestre y se desconoce la tasa de 6 bimestres.

Los descuentos por pronto pago constituyen una operación de tasa anticipada, así que el cálculo anterior también se puede realizar convirtiendo la tasa del 5 % (tasa anticipada) de descuento en una tasa vencida, mediante la fórmula de conversión de anticipada a vencida:

$$i = \frac{0.05}{1 - 0.05} = 0.0526$$

Posteriormente, se convierte a efectiva anual, como ya se mostró anteriormente.

¿Qué finalidad tiene hallar el beneficio efectivo anual? Resulta útil hacerlo por dos razones: (1) la tasa efectiva anual siempre será un referente o un estándar desde el punto de vista financiero para poder establecer comparaciones; (2) se supone que la empresa es un negocio en marcha que no va a comprar y aprovechar el descuento una sola vez a su proveedor, sino que la empresa está inmersa en un ciclo donde compra, produce, vende y vuelve a comprar.

Ejemplo

Una empresa otorga el siguiente plan de descuentos por pronto pago:

1) 10 % de descuento para los que paguen los primeros 15 días.

2) 5 % de descuento para los que paguen entre 15 y 40 días.

3) El neto de la factura si paga entre el día 40 y el día 60.

¿Cuál descuento le resultará más beneficioso al cliente? (Tome el año de 365 días).

Figura 24.

Flujo de caja 12

Si se toma el primer descuento, puede hacerlo el día uno, dos, tres o diez; como el objetivo es calcular el beneficio máximo, lo lógico es elegir el pago en el día quince. La empresa pagará el día 15 aquello que tiene plazo para pagar hasta el día 60, es decir, el descuento se le otorga por pagar 45 días anticipado.

$$i = \frac{1\,000\,000}{900\,000} - 1 = 0.1111 \; por \; 50 \; días$$

$$i = \frac{0.1}{1 - 0.1} = 0.1111 \; por \; 50 \; días$$

$$EA = (1 + 0.1111)^{\frac{365}{45}} - 1 = \; 135.04 \,\%$$

Si toma el segundo descuento, puede hacerlo el día 11, 12 o hasta el 40; tal como se hizo anteriormente, se elige el máximo, es decir, el día 40. La empresa pagará el día 40 aquello que tiene plazo para pagar hasta el día 60, es decir, el descuento se otorga por pagar 20 días anticipado.

$$i = \frac{1\ 000\ 000}{950\ 000} - 1 = 0.0526\ por\ 20\ días$$

$$i = \frac{0.05}{1 - 0.05} = 0.0526\ por\ 20\ días$$

$$EA = (1 + 0.0526)^{\frac{365}{20}} - 1 = \ 155\ \%$$

La tercera opción no implica beneficio, puesto que se paga el neto de la factura; entonces, matemáticamente se ha demostrado que es mayor el beneficio si se elige pagar el día 40, siempre, partiendo del supuesto de que las empresas no tienen fondos ociosos, es decir, reinvierten todos los fondos liberados a la misma tasa[1].

Efecto de la inflación sobre las tasas

La tasa efectiva provee información esencial sobre el costo o rentabilidad intrínseca en un negocio, pero no es suficiente para determinar si usted hizo un buen negocio, si no se confronta con el fenómeno de pérdida de poder adquisitivo de la moneda. Usted puede decir que obtuvo un 30 % de rentabilidad efectiva anual en un negocio; este dato por sí solo no indica que usted realmente obtuvo rentabilidad, pues depende del contexto. Por ejemplo, si esta hubiese sido la rentabilidad de su negocio en Colombia finalizando la década de los años 80 e iniciando la década de los años 90, se puede decir que escasamente usted recuperó la pérdida del poder adquisitivo; o si, por ejemplo, usted hubiese obtenido esa rentabilidad en un país con una economía hiperinflacionaria (por encima del 200 % en un año), realmente no estaría haciendo ningún negocio rentable.

Hay tres formas de saber si usted está perdiendo o ganando poder adquisitivo en un negocio:

1) Hallando el valor nominal o corriente.

2) Hallando el valor real o constante.

3) Comparando la tasa de inflación con la tasa del negocio.

[1] Este supuesto puede ser teórico; sin embargo, en las ciencias económicas se suelen hacer supuestos que en algunas ocasiones no dan cuenta fehaciente de la realidad, pero que resultan ser importantes para el funcionamiento de los modelos.

Valor nominal o corriente

Consiste en hallar un valor futuro, aplicando al valor presente los índices de inflación.

$$Valor\ nominal = P(1 + inf_1)(1 + inf_2) \dots (1 + inf_n)$$

Valor real o constante

Consiste en hallar un valor presente, descontando al valor futuro los índices de inflación.

$$Valor\ real = \frac{F}{(1 + inf_1)(1 + inf_2) \dots (1 + inf_n)}$$

Comparación de tasas

Cualquiera que sea la tasa que desconozca, la puede hallar con la fórmula para hallar tasa con interés compuesto, ya que la inflación tiene un comportamiento de interés compuesto.

$$i = \left(\frac{F}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Ejemplo

Un empleado devengaba hace 4 años $3 800 000 mensuales y actualmente devenga $4 350 000. La inflación del primer año fue de 5 %, la del segundo año de 4.6 % y la del tercer año de 6 % (se han hecho tres aumentos del salario, del primero al segundo año, del segundo al tercero y del tercero al cuarto). ¿El empleado está perdiendo poder adquisitivo?

$$Valor\ nominal = 3\ 800\ 000(1 + 0.05)(1 + 0.046)(1 + 0.06)$$

$$Valor\ nominal = 4\ 423\ 952$$

El valor nominal se compara con el valor futuro que, efectivamente, está devengando el empleado: $4 350 000 y, por ser este menor, se concluye que el empleado está perdiendo poder adquisitivo, ya que él debería estar ganando como mínimo $4 423 952 para mantener su poder adquisitivo.

$$Valor\ real = \frac{4\ 350\ 000}{(1 + 0.05)(1 + 0.046)(1 + 0.06)}$$

$$Valor\ real = 3\ 736\ 478$$

El valor real se compara con el valor presente; esto indica que los $3 800 000 que está devengando hoy corresponden a $3 736 478 de hace cuatro años, por tanto, está ganando menos hoy que hace cuatro años.

Comparación de tasas

$$-\ Tasa\ de\ aumento\ promedio\ anual\ salario = \left(\frac{4\ 350\ 000}{3\ 800\ 000}\right)^{\frac{1}{3}} - 1$$

Tasa de aumento promedio anual salario = 4.61 %

$$-Tasa\ de\ promedio\ anual\ inflación = \left(\frac{4\ 423\ 952}{3\ 800\ 000}\right)^{\frac{1}{3}} - 1$$

Tasa de promedio anual inflación = 5.2 %

En la comparación de tasas se evidencia la misma conclusión: el empleado está perdiendo poder adquisitivo, pues su promedio de aumento salarial anual es del 4.61 %, mientras que la inflación ha crecido en un promedio anual del 5.2 %.

Tasa real

Es la tasa de interés que se obtuvo en un negocio una vez descontada la pérdida del poder adquisitivo de la moneda. Para poder determinar cuánto se ganó realmente, se debe descontar el componente inflacionario. Meza Orozco (2017) la define como "la tasa que el mercado financiero estaría dispuesto a pagar a cualquier inversionista en ausencia de la inflación".

Ejemplo

Usted invirtió $1 000 000 y al finalizar el año le entregaron $1 200 000, lo que indica que tuvo una rentabilidad efectiva del 20 %. Durante el año, el índice de inflación alcanzó el 10 %, es decir, lo que usted compraba al iniciar el año con $1 000 000 ahora le cuesta $1 100 000. ¿Cuál fue su rentabilidad real?

Valor de la inversión en pesos nominales o corrientes = $1 100 000
Valor final de la inversión = $1 200 000
Rentabilidad o tasa real:

$$Tasa\ real = \frac{1\ 200\ 000}{1\ 100\ 000} - 1 = 9.09\ \%$$

$$Tasa\ real = \frac{1\ 000\ 000 + 200\ 000}{1\ 000\ 000 + 100\ 000} - 1 = 9.09\ \%$$

Generalizando:

$$TR = \frac{P + P \times EA}{P + P \times inf} - 1$$

$$TR = \frac{P(1 + EA)}{P(1 + inf)} - 1$$

$$TR = \frac{(1 + EA)}{(1 + inf)} - 1$$

$$TR = \frac{1 + EA - 1 - inf}{1 + inf}$$

$$TR = \frac{EA - inf}{1 + inf}$$

Esta fórmula puede aplicarse en cualquier caso en el que se requiera restar dos tasas que tengan un comportamiento compuesto entre sí. Se denomina fórmula de Fisher en reconocimiento al economista estadounidense Irving Fisher.

Efecto de la devaluación y suma de tasas

La devaluación es el incremento del valor de la tasa de cambio; quiere decir que se deben dar más pesos por cada dólar que se negocia (Banco de la República, 2013). Cuando el movimiento se da hacia abajo, se denomina revaluación. Los negocios en moneda extranjera implican una operación compuesta de dos tasas: la tasa de interés en el extranjero más (menos) la tasa de devaluación (revaluación) de la moneda local con respecto a la divisa. Tanto para el deudor como para el inversionista en moneda extranjera, el costo/rentabilidad es la suma de estas dos tasas; no obstante, estimar este costo/rentabilidad como suma aritmética conduce a una subvaloración peligrosa porque son porcentajes que se refieren a bases diferentes (Gutiérrez, 2010). A continuación, se deducirá una fórmula que permitirá hacer un correcto cálculo de esta tasa.

Ejemplo

Un empresario adquiere una deuda por USD5000; en ese momento la tasa de cambio está en $2000 por cada dólar. La deuda se pagará en un año al 5 % anual; al finalizar este período, la tasa de cambio se encuentra en un nivel de $2300 pesos por dólar. Halle el costo total de la operación.

La tasa de devaluación es:

$$i_{devaluación} = \frac{2300}{2000} - 1 = 0.15$$

De manera simplista se pudiera indicar que el costo total es: $i = 5\ \% + 15\ \% = 20\ \%$, pero así se está subvalorando el costo; veamos por qué:

Deuda en USD	TRM inicial	Deuda en F	Tasa en USA	VR en USD	Devaluación	TRM final	VF en $
5000	2000	10 000 000	5 %	5250	15 %	2300	12 075 000

$$Costo\ total = \frac{12\ 075\ 000}{10\ 000\ 000} - 1 = 20.75\ \%$$

$$Costo\ total = \frac{5000 \times (1 + 5\ \%) \times 2300}{5000 \times 2000} - 1 = 20.75\ \%$$

$$Costo\ total = \cancel{\frac{Deuda\ en\ dólares \times (1 + i) \times Tasa\ de\ cambio_{final}}{Deuda\ en\ dólares \times Tasa\ de\ cambio_{inicial}}} - 1$$

$$Costo\ total = \frac{Deuda\ en\ dólares}{Deuda\ en\ dólares} \times (1 + i) \times \frac{Tasa\ de\ cambio_{final}}{Tasa\ de\ cambio_{inicial}} - 1$$

$$Costo\ total = (1 + i) \times (1 + \%\ devaluación) - 1$$

$$Costo\ total = (1 + i_1) \times (1 + i_2) \dots (1 + i_n) - 1$$

Esta fórmula se usa para sumar tasas que tengan efecto compuesto como, por ejemplo, para sumar los índices de inflación mes a mes hasta llegar al acumulado del año.

También, se puede usar la siguiente fórmula equivalente para la suma de dos tasas:

$$suma\ de\ tasas\ compuestas = (1 + i_1) \times (1 + i_2) - 1$$

$$suma\ de\ tasas\ compuestas = \cancel{1} + i_1 + i_2 + i_1 \times i_2 - \cancel{1}$$

$$suma\ de\ tasas\ compuestas = i_1 + i_2 + i_1 \times i_2$$

Esta es una variación de la fórmula de Fisher.

Ejemplo

Halle una tasa de interés equivalente para las instituciones financieras locales si se espera que el peso se devalúe un 5 % respecto al dólar durante el siguiente año y las instituciones financieras en Estados Unidos cobran una tasa de interés anual del 10 %.

$$Costo\ en\ moneda\ local < (1 + 0.1)(1 + 0.05) - 1$$

$$Costo\ en\ moneda\ local < 15.05\ \%$$

Ejemplo

Una empresa exporta un artículo en USD 20 y actualmente la tasa de cambio se ubica en $2000 por dólar, lo que implica un valor en pesos por el artículo de $40 000. Si las expectativas de inflación para el año son de 6 % y la inflación en el país extranjero es del 3 %, calcule la devaluación máxima en moneda local para que el exportador no pierda poder adquisitivo de su capital de trabajo (que el precio sea equivalente en el mercado interno).

Solución forma larga:

$$20 \times (1 + 0.03) \times 2000 \times (1 + D) = 40\,000 \times (1 + 0.06)$$

$$1200 \times (1 + D) = 42\,400$$

$$D = \frac{42\,400}{41\,200} - 1$$

$$D = \frac{42\,400}{41\,200} - 1$$

$$D \approx 2.9\ \%$$

Solución forma corta:

Si se dividen ambos miembros de la ecuación por $40 000, se puede observar que implícitamente se encuentra encubierta la fórmula de suma de tasas compuestas.

$$(1 + 0.03)(1 + D) = 1 + 0.06$$

Para que el productor reciba del mercado extranjero el mismo valor que el de la camisa en el mercado doméstico, se puede determinar que la suma compuesta entre la inflación externa y la devaluación debe ser equivalente a la inflación interna.

$$(1 + 0.03)(1 + D) - 1 = 0.06$$

$$D = \frac{1 + 0.06}{1 + 0.03} - 1$$

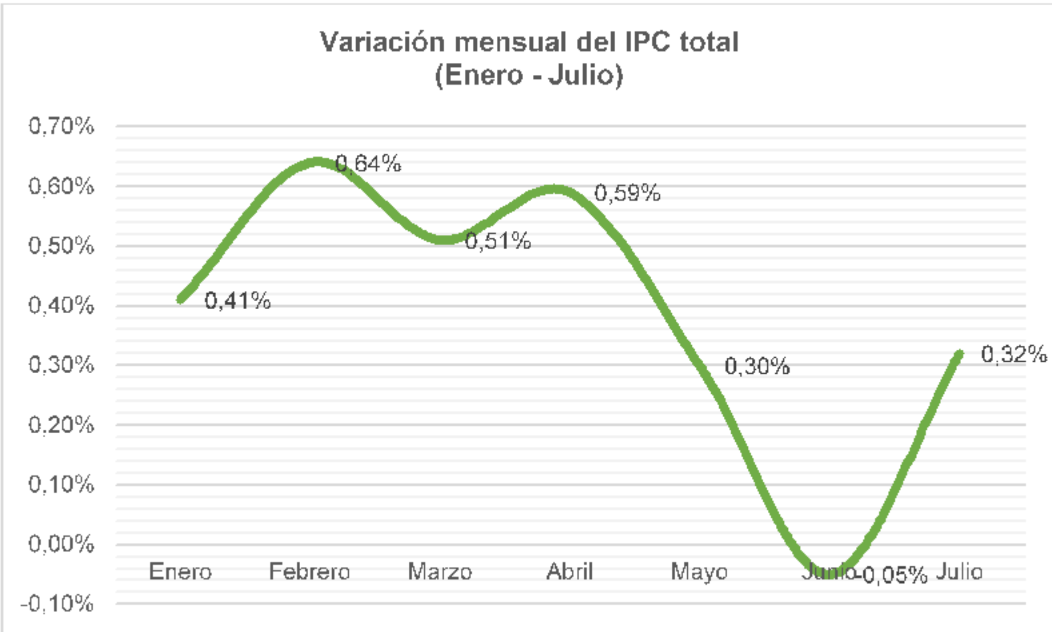
$$D \approx 2.9\ \%$$

Ejemplo de inflación (suma de tasas):

La siguiente gráfica muestra la variación del IPC a lo largo de los primeros siete meses del año.

Figura 25.

Variación mensual del IPC



También se conoce que la variación año corrido (enero-julio) fue del 2.75 %. Con respecto a esta información, surge la siguiente pregunta: ¿Existe algún error de cálculo en esta información, sabiendo que si se realiza la suma aritmética se obtiene el siguiente resultado?

$$\textit{Inflación año corrido} = 0.41\ \% + 0.64\ \% + 0.51\ \% + 0.59\ \% + 0.30\ \%$$

$$-0.05\ \% + 0.32\ \% - 1$$

$$SUMA = 2.72\ \%$$

La respuesta es no; la inflación tiene un comportamiento compuesto (geométrico) porque el aumento se hace justamente sobre el precio anterior y no sobre el precio inicial; de esta manera, la forma correcta de hallar el acumulado de la inflación es:

$$Inflación\ año\ corrido = (1 + 0.41\ \%)(1 + 0.64\ \%)(1 + 0.51\ \%)(1 + 0.59\ \%)$$

$$(1 + 0.30\ \%)(1 - 0.05\ \%)(1 + 0.32\ \%) -1$$

$$SUMA = 2.75\ \%$$

Ahora bien, no todas las tasas combinadas tienen un comportamiento compuesto como sí lo presentan las tasas indexadas al IPC, donde la función del IPC es corregir la pérdida del poder adquisitivo y, a partir de allí, calcular el interés real, lo que implica porcentajes aplicados a bases diferentes y, por lo tanto, se usa la fórmula de suma de tasas compuestas para poder hallar la tasa total. Algunas tasas variables están indexadas a la DTF y Libor, entre otras. En este caso, la Superintendencia Financiera, en el concepto 2008067749-003 del 3 de diciembre de 2008, esboza el siguiente ejemplo:

$$DTF + 5\ \%\ EA$$

Si la DTF es del 10 % EA, entonces

$$10\ \%\ EA + 5\ \%\ EA = 15\ \%\ EA$$

En la doctrina de la Superintendencia Bancaria (predecesora de la Superfinanciera), también se presentan dos ejemplos en el concepto n.º 20030254551 del 3 de julio de 2003.

> Suponiendo DTF vigente para un período A de 12 % EA, se tiene que adicionada con el *spread* de 8 puntos adicionales (DTF + 8) da una resultante de 20 % EA (12 % + 8 = 20 %) a cobrar por dicho período.
>
> Suponiendo DTF vigente para un período B de 10 % EA, se tiene que adicionada con el *spread* de 8 puntos adicionales (DTF + 8) da una resultante de 18 % EA (10 % + 8 = 18 %) a cobrar por dicho período. (Superfinanciera, 2003)

Interés continuo

Hasta ahora, la teoría abordada en este capítulo se ha enfocado específicamente a tasas discretas, pero en el mundo financiero existen negocios en los que la forma de capitalización es más cercana a una forma continua, como es el caso de los mercados de capitales, donde los instrumentos financieros cambian instantáneamente de precio. Si se toma la fórmula de valor futuro a una tasa nominal ***r***, que capitaliza en número de períodos ***m***, se tiene:

$$F = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

Siendo:

F=valor futuro

P=valor presente

r=tasa nominal

m=períodos de capitalización en el año

t=número de años

Si estos períodos ***m*** se hacen infinitos porque son apenas pequeños instantes, se tiene:

$$F = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

$$F = \lim_{m\to\infty} P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

$$F = \lim_{m\to\infty} P\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{rt}$$

$$= Pe^{rt};$$

Entonces,

$$P = Fe^{-rt};$$

Ejemplo

1) Una persona hace una inversión hoy de una suma de dinero $P y se calcula una tasa de rendimiento del 27 % anual capitalizable continuamente. Si después de tres años el inversionista puede retirar $84 970 922, halle el depósito inicial.

$$P = Fe^{-rt}$$

$$P = 84\,970\,922e^{-0.27\times 3}$$

$$P = 37\,800\,000$$

2) Calcule el tiempo que se tarda una inversión inicial \$420 000 000 en convertirse en \$1 465 944 000 si se espera una tasa del 25 % nominal capitalizable continuamente.

$$F = Pe^{rt}$$

$$1\,465\,944\,000 = 420\,000\,000e^{0.25\times t}$$

$$t \approx 5 \text{ años}$$

Conversión de tasa efectiva a tasa continua

$$(1 + i) = e^{r}$$

Ejemplo

Calcule la tasa continua equivalente al 30 % EA.

$$(1 + 0.30) = e^{r}$$

$$r = 26.24\ \%$$

Ejemplo

Calcule la tasa efectiva anual equivalente al 18 %, capitalizable continuamente.

$$(1 + i) = e^{0.18}$$

$$i = 19.72\ \%$$

Taller de aplicación

A) Determine qué tipo de tasa es cada una de las siguientes entre nominal, efectiva periódica y efectiva anual.

1) 5 % mensual.
2) 18 % capitalizable mensualmente.
3) 2 % mensual vencida.
4) 28 %.
5) 24 % NTV.
6) 8 % semestral.
7) 12 % anual capitalizable trimestralmente.
8) 14 % liquidable trimestralmente.
9) 10 % anual trimestre vencido.

B) Ejercicios de conversión
Nivel 1

1) Dada una tasa del 1.8 % mensual, halle una tasa nominal MV.
2) Dada una tasa del 4 % trimestral, halle una tasa nominal TV.
3) Dada una tasa del 2 % bimestral, halle una tasa nominal BV.
4) Dada una tasa del 8 % semestral, halle una tasa nominal SV.
5) Convierta una tasa del 20 % nominal capitalizable mensualmente a mensual vencida.
6) Convierta una tasa del 22 % nominal capitalizable semestralmente a semestral.
7) Convierta una tasa del 24 % nominal capitalizable mensualmente a trimestral.

Nivel 2

8) Convierta una tasa mensual del 1.8 % a una efectiva anual.
9) Convierta una tasa trimestral del 4 % a una efectiva anual.
10) Convierta una tasa bimestral del 2 % a una tasa efectiva semestral.
11) Convierta una tasa semestral del 8 % a una tasa periódica bimestral.

Nivel 3

12) Halle una tasa efectiva anual equivalente a una tasa del 22 % capitalizable trimestralmente.
13) Halle una tasa nominal con capitalización semestral, equivalente a una tasa del 30 % EA.
14) Convierta una tasa del 2 % bimestral a una tasa nominal capitalizable mensualmente.
15) Convierta una tasa del 18 % con capitalización mensual a una nominal con capitalización trimestral.

C) Resuelva

1) Determine la tasa real de una inversión de $15 000 000 que se hizo hace un año y hoy se recibieron $ 17 480 000, si la tasa de inflación fue del 5.4 % anual.
2) El sueldo de Andrés para el año inmediatamente anterior fue de $1 129 000 y para este año es de $1 208 000. Determine tanto en valor corriente como en valor real si el sueldo de Andrés ha mantenido su valor o por el contrario está perdiendo poder adquisitivo. Para esto tenga en cuenta el nivel de inflación (halle el índice anual).

Mes	Inflación	Mes	Inflación
1	0.69 %	7	0.11 %
2	0.83 %	8	0.11 %
3	0.25 %	9	- 0.14 %
4	0.46 %	10	- 0.09 %
5	0.10 %	11	0.19 %
6	0.11 %	12	0.65 %

3) Se contrata una deuda por USD 180 000 a una tasa del 9.5 % anual vencido; si se espera una devaluación del 5 % anual, ¿cuál es el costo (%) en moneda local?

4) Una persona devengaba hace 3 años $1 250 000; el valor corriente (los aumentos se hicieron con base en la inflación) de ese salario hoy es de $1 908 560. ¿Cuál fue la inflación promedio anual?

5) Una persona devenga hoy $1 682 700; hace un año $1 595 000; si la inflación anual fue de 6.5 %, ¿esta persona está ganando o perdiendo poder adquisitivo?

6) En una inversión se obtuvo el 4.5 % de rendimiento real; si la inflación fue del 5.4 %, ¿cuál fue el resultado efectivo que generó la inversión?

7) Se debe elegir la mejor opción para invertir $84 000 000 durante un año.

- Colocarlo en el país a una tasa de mercado del 9 % EA.
- Depositar el dinero en una cuenta en USA que le renta el 5 % EA. El dólar hoy se puede cambiar por $3840 y se proyecta al final del año en $3982.

  Compare las opciones, solo desde el punto de vista de la rentabilidad.

8) Se deposita una cantidad de dinero en una cuenta que paga un interés del 24 % capitalizable continuamente. Al final de tres años se obtiene un saldo de $1 948 000. ¿Cuál fue el depósito inicial?

9) Una empresa ofrece los siguientes descuentos a sus clientes:

- De contado 5 % de descuento.
- Hasta el día 30, 3 % de descuento.
- De 30 a 60 días, el NETO.

  Si aprovecha el descuento, ¿cuál es el beneficio efectivo anual? y ¿qué opción le conviene más?

10) Una inversión de $24 500 000 se convierte en $35 116 570 en dos años; calcule la tasa de capitalización continua que conlleva esta operación.

D) Resuelva

1) Convierta una tasa nominal del 26 % TA a una tasa EA.

2) Convierta una tasa del 24 % nominal MV en efectiva anual.

3) Convierta el 31.08 % efectivo anual en nominal TV.

4) A partir de una tasa efectiva anual del 25 % calcule la tasa periódica bimestral.

5) Convierta el 22.73 % capitalizable mensualmente a efectiva mensual.

6) A partir de una tasa del 18 % convertible bimestralmente, halle una tasa EA.

7) Convierta el 16 % nominal bimestre anticipado en efectiva periódica bimestral anticipada.

8) Halle una tasa semestral anticipada equivalente a una tasa del 2 % mensual.

9) Convierta el 3 % bimestral en efectiva periódica trimestral.

10) Convierta el 20 % nominal liquidada MA en efectiva anual.

11) Convierta el 28 % EA en periódica trimestral anticipada.

12) Halle una tasa nominal SV equivalente al 24 % nominal trimestre vencido.

13) Halle una tasa nominal TA equivalente al 2.5 % periódica mensual.

14) Calcule la tasa efectiva anual equivalente a una tasa nominal SA 20 %.

15) Halle una tasa nominal con convertible por bimestres, equivalente a una tasa nominal del 18 % trimestre anticipada.

Autoevaluación

Resuelva cada punto, conservando todos los decimales en la calculadora a lo largo del proceso. La respuesta se presenta solo con dos decimales.

1) Se realiza un préstamo de $5 000 000 a una tasa del 21 % capitalizable semestralmente. Determine el valor de los intereses del primer semestre.

2) Convierta una tasa del 2 % mensual en una tasa efectiva semestral.

3) Convierta una tasa del 18 % efectiva anual a una tasa nominal capitalizable mensualmente.

4) Dada una tasa del 5 % trimestral, halle la tasa nominal equivalente con capitalización mensual.

5) Un depósito de $2 000 000 se convierte en $5 000 000 transcurridos tres años. Calcule la tasa nominal trimestre vencido.

6) Convierta una tasa de interés nominal del 24 % MV a una tasa nominal con capitalización semestral.

7) Una empresa vende productos a un cliente por $1 850 000 y le da un plazo para pagar de 45 días; sin embargo, si paga de contado, el cliente debe pagar solamente $1 785 250. Si el cliente se acoge al descuento, ¿cuál es el beneficio efectivo anual?

8) Se compró una casa por $200 000 000 y al cabo de 5 años se vende por $298 000 000. Si la inflación promedio anual fue del 18 %, indique si se ganó o perdió.

(Marque con una x) Ganó ________ Perdió ________

9) ¿Cuánto se tendrá acumulado después de dos años y medio si se invierten $10 000 000 a una tasa del 24 % capitalizable continuamente?

10) Si se realizó una inversión durante un año por USD 40 000 en un certificado de depósito a término (CDT) en Estados Unidos que ofrece una rentabilidad anual del 4.5 %, ¿cuál fue la rentabilidad total que se obtuvo? Precio del dólar:

TMR inicial: $2892

TMR final: $3021

11) Se invierten $24 500 000 y al cabo de un año se reciben $27 250 000. La tasa de inflación anual es del 4 %. ¿Cuál es la rentabilidad real?

Selección múltiple

Elija la opción (a, b, c, d) que mejor se relacione con el contexto de la pregunta.

1) Para convertir una tasa del 24 % nominal bimestre anticipado a una tasa nominal trimestre anticipado, se hizo el siguiente proceso en cuatro pasos:

$$\frac{0.24}{2}$$

$$\frac{0.12}{1-0.12}$$

$$(1 + 0.1364)^{3/2} - 1$$

$$\left(\frac{0.05036}{1+0.05036}\right) \times 4$$

Una vez revisado el procedimiento se detectó que hay un error. Señale el paso en el que se cometió el error.

a) paso 1 **b)** paso 2 **c)** paso 3 **d)** paso 4

2) Para convertir una tasa del 22 % capitalizable trimestre anticipado a una efectiva anual se debe (en este orden):

Dividir la tasa nominal en 4.

Convertir la tasa periódica en la fórmula $(1 + i)^{m/n} - 1$

Convertir a tasa vencida en la fórmula $\frac{i_a}{1-i_a}$

Una vez revisado el procedimiento se concluye que:

a) Se cometió un error a partir del paso uno.
b) Se cometió un error a partir del paso dos.
c) Se cometió un error a partir del paso tres.
d) No se cometió error.

3) Para hallar una tasa anual capitalizable semestralmente equivalente una tasa del 25 % anual capitalizable trimestralmente se debe (en este orden):

a) Hallar la tasa trimestral, luego la semestral y por último la nominal SV.
b) Hallar la tasa semestral, luego la trimestral y por último la nominal TV.
c) Hallar la tasa trimestral, luego la semestral y por último la nominal TV.
d) Hallar la tasa semestral, luego la trimestral y por último la nominal SV.

4) Una tasa del 20.52 % nominal anual mes anticipado es equivalente a una tasa del 23 % EA. La afirmación anterior tiene sentido porque:

a) La tasa efectiva anual tiene más períodos de capitalización porque capitaliza diariamente.

b) La tasa nominal capitaliza los intereses cada mes, mientras que la efectiva anual no lo hace.

c) La tasa efectiva anual capitaliza los intereses y, por tanto, es más alta que la tasa nominal.

d) La tasa anticipada aparenta ser más baja, ya que, al ser pagados los intereses por anticipado, implica un sesgo.

a y b son verdaderas

c y d son verdaderas

a y c son verdaderas

b y d son verdaderas

5) El proceso correcto para convertir una tasa del 4 % trimestral anticipada a una tasa nominal anual bimestre vencido es:

$$a.\ \left[\left(1+\frac{0.04}{1+0.04}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right]\times 6$$

$$b.\ \left[\left(1+\frac{0.04}{1-0.04}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]\times 4$$

$$c.\ \left[\left(1+\frac{0.04}{1-0.04}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right]\times 6$$

$$d.\ \left[\left(1+\frac{0.04}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right]\times 4$$

6) Una tasa mensual es de tipo:

a) Nominal anual.

b) Efectiva anual.

c) Periódica anticipada.

d) Efectiva periódica.

7) La diferencia esencial entre la tasa nominal y la tasa efectiva es:

a) La tasa nominal capitaliza los intereses, la efectiva no.

b) La tasa efectiva capitaliza los intereses, la nominal no.

c) La tasa efectiva es usada de forma generalizada en el sistema financiero, la nominal no.

d) La tasa nominal es usada de forma generalizada en el sistema financiero, la efectiva no.

8) Para convertir una tasa del 30 % EA en tasa mensual anticipada se procede así:

$$a.\ paso\ 1)\ \frac{0.30}{12};paso\ 2)\ \frac{0.025}{1-0.025}$$

$$b.\ paso\ 1)\ \frac{0.30}{12};paso\ 2)\ \frac{0.025}{1+0.025}$$

$$c.\ paso\ 1)\ (1+0.3)^{1/12}-1;paso\ 2)\ \frac{0.022}{1-0.022}$$

$$d.\ paso\ 1)\ (1+0.3)^{1/12}-1;paso\ 2)\ \frac{0.022}{1+0.022}$$

UNIDAD 3

Sistemas de amortización

Introducción

En esta unidad temática se estudiarán los sistemas de pago o procesos de amortización de una deuda, con sus respectivos elementos: valor, costo, plazo y forma de pago. Primero, se hará énfasis en el modelamiento matemático de los sistemas de cuota fija y de los sistemas de cuota variable tanto creciente como decreciente. Posteriormente, se explicará la construcción de tablas de amortización en la hoja de cálculo para los distintos tipos de amortización. Por medio del desarrollo temático, se podrán notar las características de los distintos sistemas de pago, sus ventajas y sus inconvenientes.

Resultados de aprendizaje

- Grafica situaciones problemáticas que involucran series periódicas uniformes y variables junto con pagos únicos, ya sean estas anticipadas, vencidas, diferidas o perpetuas.
- Modela matemáticamente situaciones que involucran series periódicas de cuota fija y cuota variable (vencidas, anticipadas, diferidas, escalonadas, perpetuas).
- Construye tablas de amortización en Excel para distintos sistemas de pagos: valores futuros únicos, periódicos de cuota fija y variable (aritmética y geométrica), abono constante a capital y UVR.
- Diferencia conceptual y procedimentalmente los distintos sistemas de amortización: cuota fija (sistema francés), abono constante a capital (sistema alemán), cuota creciente aritmética, cuota creciente geométrica y sistema UVR.
- Usa la fórmula BUSCAR OBJETIVO en Excel para encontrar valores desconocidos (primer pago, gradiente, valor actual, cuotas extraordinarias, etc.) en las tablas de amortización.

Acción problémica

La empresa Frucol S.A.S. produce y comercializa jugos de distintos sabores. Debido a su sostenido crecimiento y ampliación de su participación en el mercado de bebidas, en meses pasados la junta directiva aprobó el ensanchamiento de su planta y para la fecha ya tienen los estudios técnicos que indican que se necesita una inversión total de $650 millones. La construcción se iniciará dentro de 6 meses, momento en el cual se tendrán que desembolsar $250 millones, pasados otros 6 meses se desembolsarán $250 millones más y el saldo de $150 millones se cancelará al finalizar el año cuando se entrega la planta terminada. Actualmente, la empresa cuenta con $80 millones con los cuales abrirá un fondo fiduciario y mes a mes podrá depositar excedentes por valor de $10 millones; el fondo renta a una tasa del 9.5 % EA.

Una vez se inicie la construcción de la planta, la empresa entregará lo acumulado en el fondo y el dinero faltante lo cubrirá con un préstamo de una entidad financiera, cuyo costo es del 15 % nominal MV. Esta deuda se amortizará con cuotas de $10 000 000 cada mes, durante los primeros 6 meses, y el saldo se cubrirá mediante 6 cuotas iguales. Después de

6 meses de iniciada la construcción, la empresa incurrirá en otro préstamo que le otorgará otro banco al 14.88 % nominal MV. Este préstamo es por valor de $150 millones, pues los socios harán un aporte de $100 millones; durante los primeros 22 meses de este segundo préstamo, solo se pagarán los intereses, pues una vez terminado de pagar el primer préstamo, se estará terminando la ampliación de la planta, momento en el cual se tienen que entregar otros $150 millones, que se conseguirán mediante un tercer préstamo que otorga la misma entidad financiera que concedió el primer préstamo y al mismo costo.

A partir de la entrega de la planta, por el aumento de las ventas, se estima que el excedente destinado al servicio de la deuda puede incrementarse cada mes en un 2 % (a partir de los $10 millones) durante el primer año, 1 % el siguiente año y 0.5 % en adelante; este excedente se distribuye entre el pago de la segunda deuda (pago de los intereses solamente) y el pago de la tercera deuda (el resto de los excedentes). En el mes 17 de la tercera deuda, se termina de pagar el saldo y el resto de los excedentes se empiezan a abonar al pago de la segunda deuda. Si el momento cero coincide con la entrega de los estudios técnicos, ¿en qué mes se termina de pagar la deuda? Construya todas las tablas de amortización implicadas en este caso.

Conceptualización

Los sistemas de amortización son diferentes métodos o procedimientos que se siguen para el pago de una deuda. Los elementos que conforman el sistema de amortización son:

- Valor de la deuda: es el valor presente por el cual se asume la obligación.
- Costo: se refiere a la tasa de interés pactada.
- Plazo: tiempo de vencimiento, donde queda saldada la deuda.
- Patrón de pago: forma o modelo de pago.

En la amortización de la deuda, cada pago está compuesto por intereses más abono a capital. Si el total del pago no alcanza a cubrir los intereses, entonces el saldo de la deuda aumenta; si el pago cubre exactamente los intereses, el saldo se mantiene igual, pero si el pago es mayor que el valor de los intereses, el saldo de la deuda disminuye.

Ilustración 2.

Composición de un pago

Los sistemas de información han ayudado a presentar los planes de pago de manera organizada, actualizada y oportuna. No obstante, antes de explicar la construcción de estos sistemas de amortización en la hoja de cálculo, se va a hacer énfasis en el desarrollo algorítmico de las series periódicas: constantes y variables.

Series periódicas uniformes

También conocidas como anualidades; son pagos periódicos iguales, fijos o constantes. En su origen etimológico la anualidad significa "cualidad de anual", pero este término se generalizó para los pagos que sean periódicos iguales sin importar si el período es mensual, bimestral, etc. Este tipo de pagos puede darse de manera:

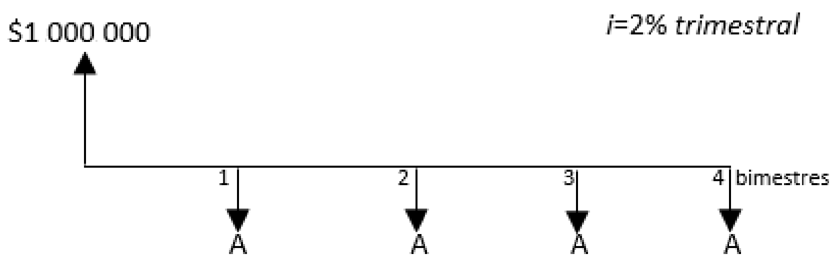
- Vencida: pagos al final de cada período.
- Anticipada: pagos al inicio de cada período.
- Diferida: los pagos periódicos inician después de un período de gracia.
- Perpetua: pagos indefinidos, no se tiene certeza del término de estos.

Ejemplo

Se compra un electrodoméstico por $1 000 000 y el pago se hace en 4 cuotas bimestrales iguales a una tasa del 2 % bimestral.

Figura 26.

Flujo de caja 13



Las cuotas son valores desconocidos y se simbolizaron con la letra A (anualidad) porque son pagos periódicos iguales. Con el conocimiento previo de ecuaciones de valor, se puede elegir una fecha focal, plantear la ecuación y resolverla para encontrar el valor de estos pagos:

$$1\ 000\ 000 = \frac{A}{(1+2\ \%)} + \frac{A}{(1+2\ \%)^2} + \frac{A}{(1+2\ \%)^3} + \frac{A}{(1+2\ \%)^4}$$

$$1\ 000\ 000 = 3.807728699A$$

$$A = 262\ 624$$

Con este procedimiento se resolvió el problema, pero si se tiene en cuenta que estos sistemas de pagos pueden tener 120, 150 o más número de pagos iguales este procedimiento es ineficiente, por lo cual resulta útil encontrar un modelo que permita simplificar el cálculo del valor presente o valor futuro.

Valor presente de la anualidad vencida:

Partiendo del ejemplo anterior, se generaliza la ecuación:

$$P = \frac{A}{(1+i)} + \frac{A}{(1+i)^2} + \frac{A}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{A}{(1+i)^n} \qquad (1)$$

Se multiplica cada miembro de la igualdad por *(1 + i)*:

$$P(1+i) = \frac{A(1+i)}{(1+i)} + \frac{A(1+i)}{(1+i)^2} + \frac{A(1+i)}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{A(1+i)}{(1+i)^n}$$

Simplificando:

$$P(1+i) = A + \frac{A}{(1+i)} + \frac{A}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{A}{(1+i)^{n-1}} \qquad (2)$$

Restando (1) de (2):

$$\begin{array}{lcl} P(1+i) & = & A + \cancel{\frac{A}{(1+i)}} + \cancel{\frac{A}{(1+i)^2}} + \cdots + \cancel{\frac{A}{(1+i)^{n-1}}} \\ P & = & \cancel{\frac{A}{(1+i)}} + \cancel{\frac{A}{(1+i)^2}} + \cancel{\frac{A}{(1+i)^3}} + \cdots + \frac{A}{(1+i)^n} \\ \hline \end{array}$$

$$P - P(1+i) = A - \frac{A}{(1+i)^n}$$

Factorizando en el miembro izquierdo:

$$P(1-1+i) = \frac{A(1+i)^n - A}{(1+i)^n}$$

Simplificando en el miembro izquierdo y factorizando en el miembro derecho:

$$Pi = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\right]$$

Dividiendo por *i* ambos miembros de la igualdad:

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

También, se puede expresar de la siguiente manera:

$$P = A\left[\frac{((1+i)^n - 1))(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$P = A\left[\frac{(1+i)^0 - (1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Esta fórmula tiene menos símbolos y, por tanto, es más cómoda para introducir en la calculadora.

De esta también se puede despejar A para hallar el valor de la anualidad cuando se tiene el valor presente:

$$A = P\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

Esta fórmula es útil cuando se tiene una operación sencilla de un préstamo que se va a cancelar en cuotas iguales, sin cuotas extras ni pagos diferidos. En los demás casos es mejor graficar el flujo de caja, elegir fecha focal en momento cero y plantear la ecuación de acuerdo con el teorema fundamental.

Valor futuro de la anualidad vencida:

$$F = A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-1} \ldots + A \qquad (1)$$

Multiplicar por $(1 + i)$:

$$F(1+i) = A(1+i)^{n-1}(1+i) + A(1+i)^{n-2}(1+i) \ldots + A(1+i)$$
$$F(1+i) = A(1+i)^{n} + A(1+i)^{n-1} \ldots + A(1+i) \qquad (2)$$

Restando (1) de (2)

$$\begin{array}{ll} F(1+i) & = A(1+i)^n + A\cancel{(1+i)}^{n-1} \ldots \quad + A\cancel{(1+i)} \\ F & = A\cancel{(1+i)}^{n-1} + \quad A\cancel{(1+i)}^{n-2} \ldots + A \end{array}$$

$F(1 + i) - F = A(1 + i)^n - A$

Factorizando en el miembro izquierdo:

$F(1 + i - 1) = A(1 + i)^n - A$

Simplificando:

$Fi = A(1 + i)^n - A$

Dividiendo cada miembro por i:

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

De esta fórmula también se puede despejar A para hallar el valor de la anualidad cuando se tiene el valor futuro:

$$A = F\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Valor presente de una perpetuidad:

Partiendo del valor presente de una anualidad finita:

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Se aplica el límite cuando n tiende a infinito:

$$P = \lim_{n\to\infty} A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] = A\frac{1-0}{i} = \frac{A}{i}$$

$$P = \frac{A}{i};\ para\ i \neq 0$$

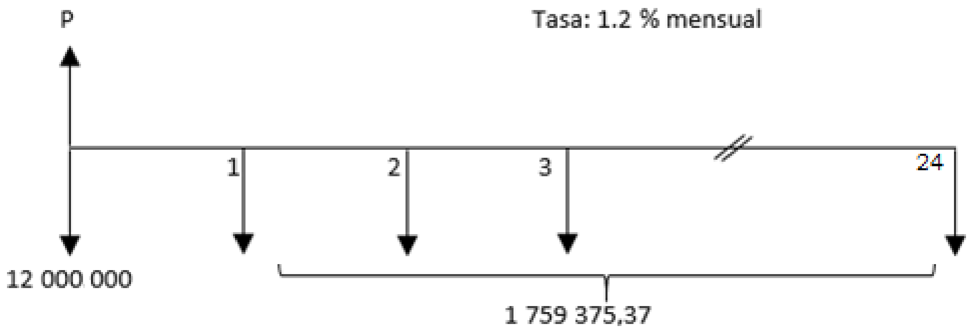
No es posible calcular el valor futuro de una perpetuidad debido a que el plazo es indefinido.

Ejemplo

1) Se compró un vehículo con el siguiente plan de pagos: $12 000 000 de cuota inicial y 24 pagos mensuales iguales de $1 759 375.37. Si la tasa de interés es del 1.2 % mensual, ¿cuál es el valor de contado del vehículo?

Figura 27.

Flujo de caja 14



$$P = 12\ 000\ 000 + 1\ 759\ 375.37\left[\frac{1-(1+0.012)^{-24}}{0.012}\right]$$

$$P = 12\ 000\ 000 + 36\ 500\ 000$$

$$P = 48\ 500\ 000$$

2) Se solicita un préstamo de $15 000 000 y se va a pagar en 18 cuotas mensuales. Halle el valor de los pagos iguales usando una tasa del 1.25 % mensual.

$$A = 15\ 000\ 000\left[\frac{0.0125}{1-(1+0.0125)^{-18}}\right] = 935\ 772$$

3) Usted abre una cuenta en un fondo de inversión y deposita $120 000 mensuales durante un año; la entidad financiera le paga una tasa de interés del 0.5 % mensual. ¿Cuánto dinero tendrá acumulado al final del año?

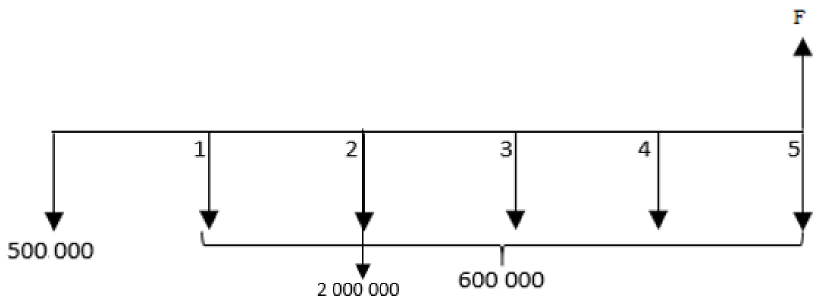
$$F = 120\ 000\left[\frac{(1+0.005)^{12}-1}{0.005}\right] = 1\ 480\ 267$$

4) Una persona inicia un ahorro con $500 000 en un fondo de inversión que le paga una tasa de interés del 8 % nominal con capitalización trimestral. Cada final de trimestre deposita el valor de $600 000. En el sexto mes hace un depósito extra de $2 000 000. Calcule el valor acumulado al final de 15 meses.

$$i = \frac{8\ \%}{4} = 2\ \%\ trimestral$$

Figura 28.

Flujo de caja 15



$$F = 500\,000(1+0.02)^5 + 600\,000\left[\frac{(1+0.02)^5-1}{0.02}\right] + 2\,000\,000(1+0.02)^3$$

$$F = 552\,040 + 3\,122\,424 + 2\,122\,416$$

$$F = 5\,796\,880$$

5) Calcule el depósito que se debe hacer mensualmente y durante dos años en un fondo que reconoce una tasa del 8.74 % efectivo anual para reunir la suma de $8 500 000.

$$i = (1+8.74\ \%)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.7\ \%\ mensual$$

$$A = 8\,500\,000\left[\frac{0.007}{(1+0.007)^{24}-1}\right] = 326\,485$$

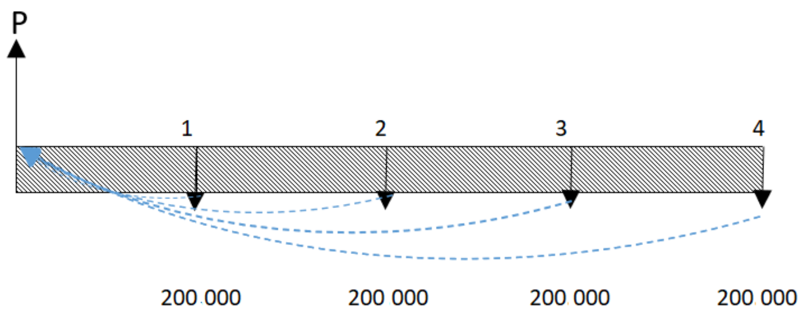
6) Halle el valor presente de un instrumento de patrimonio que tiene una renta anual a perpetuidad de $600 000 si la tasa de interés es del 13 %.

$$P = \frac{600\,000}{13\ \%} = 4\,615\,385$$

Para anualidades que son anticipadas o diferidas, usted puede adaptar la fórmula; por ejemplo, usted necesita hallar el valor presente de 4 pagos anticipados iguales de $200 000 mensuales a una tasa del 1.5 % mensual. Si se aplicara la fórmula de valor presente para anualidades vencidas, se tendría:

Figura 29.

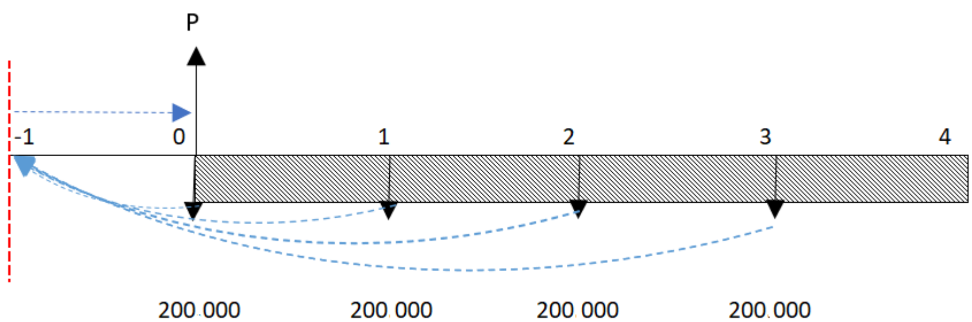
Flujo de caja 16



La fórmula $P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$ halla el valor presente un período antes del primer pago, es decir, en el momento cero; si se aplica esta fórmula para los pagos anticipados, se tendría que:

Figura 30.

Flujo de caja 17



Se estarían llevando los cuatro pagos un período antes del primer pago, es decir, al momento menos uno. Por tanto, para llevar ese valor presente de izquierda a derecha un período (es decir al momento cero) basta con multiplicar por *(1 + i)* y la fórmula quedaría así:

$$P = 200\ 000\left[\frac{1-(1+0.015)^{-4}}{0.015}\right](1+0.015) = 782\ 440$$

Generalizando:

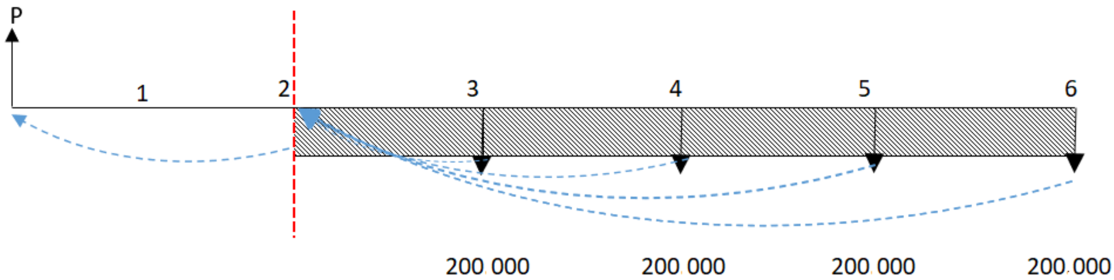
$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)$$

En este mismo sentido, se puede modificar la fórmula de valor futuro para pagos anticipados; y para el valor de la anualidad con pagos anticipados, se despeja A a partir de las anteriores.

Suponga ahora la misma serie de cuatro pagos mensuales iguales de $200 000, pero el primer pago se hace al final del período tres.

Figura 31.

Flujo de caja 18



Si se quiere llegar al momento cero, se deberían traer a valor presente dos períodos más.

$$P = 200\ 000\left[\frac{1-(1+0.015)^{-4}}{0.015}\right](1+0.015)^{-2} = 748\ 261$$

Tenga en cuenta que, en las fórmulas de anualidades, n es el número de pagos iguales, no es el número de período donde se encuentran ubicados los pagos; en el caso del ejemplo anterior, $n = 4$ no puede ser 2, 3 ni 6.

Generalizando:

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-m}$$

Siendo m el período de gracia.

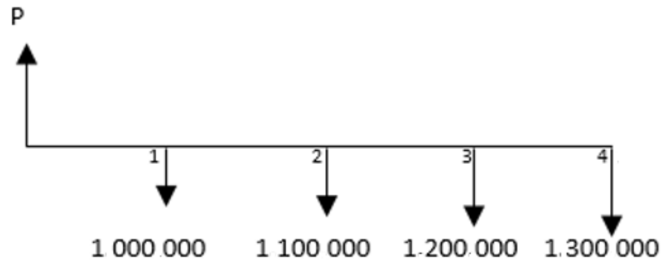
Series periódicas variables

También llamadas gradientes; son pagos periódicos variables cuya formación obedece a un patrón matemático establecido. Los gradientes pueden ser crecientes o decrecientes y a su vez pueden clasificarse como:

- Aritméticos o lineales: aumentan o disminuyen periódicamente en una cantidad fija en pesos.

Figura 32.

Flujo de caja 19

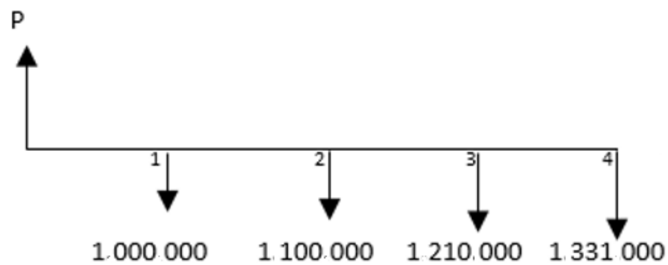


En el ejemplo puede notarse que el crecimiento período a período es de una cantidad fija de $100 000.

- Geométricos o exponenciales: aumentan o disminuyen periódicamente en un porcentaje fijo.

Figura 33.

Flujo de caja 20

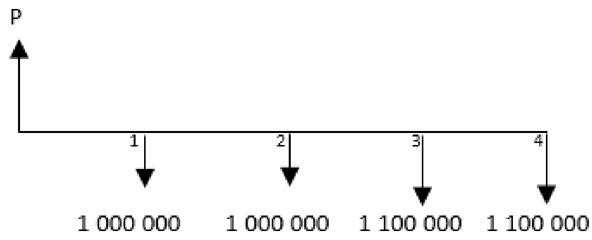


En el ejemplo puede notarse que el crecimiento período a período es de un porcentaje fijo del 10 %.

- Escalonados: cuotas que permanecen fijas durante un período (generalmente un año) y después se incrementan en un valor fijo en pesos o en porcentaje (Meza Orozco, 2010). Lo común es encontrar operaciones aritméticas con gradiente escalonado creciente, donde el crecimiento ocurre cada año, como es el caso de los salarios y de los arrendamientos.

Figura 34.

Flujo de caja 21



En el ejemplo puede notarse que los dos primeros períodos se mantienen en una cuota igual de $1 000 000 y los siguientes dos períodos tienen un aumento con respecto al anterior, pero entre ellos son iguales.

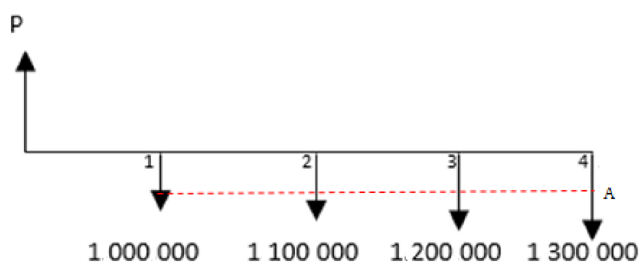
En el contexto financiero colombiano, las series variables (gradientes) no tienen una aplicación directa; sin embargo, tienen algunas aplicaciones particulares como elementos en el cálculo de algunos valores como el crecimiento de la UVR en una proyección de pagos, en valoraciones de empresas para modelar o en proyecciones financieras.

Valor presente de una serie variable aritmética

Puede observarse que, en cualquiera de los casos, la serie periódica variable está compuesta por dos partes: (1) la cuota fija o anualidad que coincide con el valor del primer pago de la serie y (2) el crecimiento (o decrecimiento) que es el gradiente; así se puede deducir que el modelo matemático para hallar el valor presente de una serie variable está compuesto por dos partes: anualidad + gradiente.

Figura 35.

Flujo de caja 22



La primera parte obedece al modelo del valor presente de la anualidad vencida. Para modelar la segunda parte, se va a denominar G al gradiente (crecimiento o decrecimiento). Para hallar el valor presente se tendría:

El crecimiento G se da a partir del segundo pago, el tercer pago ha crecido 2G, el cuarto ha crecido 3G y así, sucesivamente:

$$P = \frac{G}{(1+i)^2} + \frac{2G}{(1+i)^3} + \frac{3G}{(1+i)^4} + \cdots + \frac{(n-1)G}{(1+i)^n}$$

Factorizando:

$$P = G\left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{2}{(1+i)^3} + \frac{3}{(1+i)^4} + \cdots + \frac{(n-1)}{(1+i)^n}\right]$$

Sustituyendo:

$$x = \left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{2}{(1+i)^3} + \frac{3}{(1+i)^4} + \cdots + \frac{(n-1)}{(1+i)^n}\right] \qquad (1)$$

Entonces, *P = G(x)*

Se multiplica cada miembro de la igualdad por *(1 + i)*:

$$x(1+i) = \left[\frac{(1+i)}{(1+i)^2} + \frac{2(1+i)}{(1+i)^3} + \frac{3(1+i)}{(1+i)^4} + \cdots + \frac{(n-1)(1+i)}{(1+i)^n}\right]$$

Simplificando:

$$x(1+i) = \left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{2}{(1+i)^2} + \frac{3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{(n-1)}{(1+i)^{n-1}}\right] \qquad (2)$$

Restando (1) de (2):

$$\begin{aligned}
x(1+i) &= \left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{2}{\cancel{(1+i)^2}} + \frac{3}{\cancel{(1+i)^3}} + \cdots + \frac{(n-1)}{(1+i)^{n-1}}\right] \\
x &= \left[\frac{1}{\cancel{(1+i)^2}} + \frac{2}{\cancel{(1+i)^3}} + \frac{3}{(1+i)^4} + \cdots + \frac{(n-1)}{(1+i)^n}\right] \\
\hline
x(1+i) - x &= \left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} \cdots - \frac{(n-1)}{(1+i)^n}\right]
\end{aligned}$$

Por otra parte:

$$-\frac{(n-1)}{(1+i)^n} = -\frac{n}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1+i)^n}$$

Entonces:

$$x(1+i) - x = \left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} \dots + \frac{1}{(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

El segundo miembro de la ecuación, a excepción del último término, fue demostrado con el valor presente de la anualidad:

$$\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} \dots + \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{(1+i)^{-n}-1}{i}$$

Reemplazando y simplificando:

$$xi = \left[\frac{(1+i)^{-n}-1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

$$x = \frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^{-n}-1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

Sustituyendo en $P = Gx$:

$$P = \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^{-n}-1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

Este es el valor presente de la segunda parte de los flujos de caja, es decir, el gradiente. Recuerden que el valor presente total está compuesto por:

P = valor presente de la anualidad + valor presente del gradiente

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

Cuando el gradiente es decreciente, basta anteponer el signo menos al gradiente (G).

Valor futuro de una serie variable aritmética

Partiendo de la fórmula de valor presente, se lleva a valor futuro n períodos:

$$F = \left[A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^{n}}\right]\right](1+i)^{n}$$

$$F = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{n} + \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^{n}}\right](1+i)^{n}$$

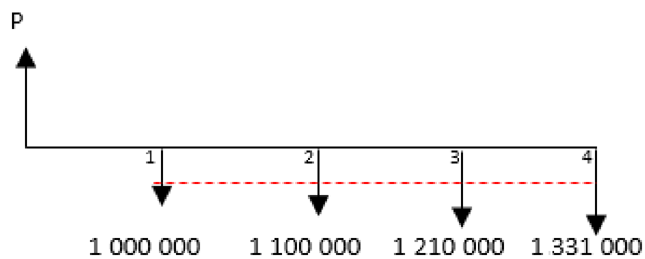
$$F = A\left[\frac{(1+i)^{n}-(1+i)^{0}}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^{n}-(1+i)^{0}}{i} - \frac{n(1+i)^{n}}{(1+i)^{n}}\right]$$

$$F = A\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i} - n\right]$$

Estas fórmulas de valor presente y valor futuro de serie variable lineal también se pueden adaptar para series variables anticipadas y diferidas, de forma análoga al arreglo que se hizo para las anualidades.

Figura 36.

Valor presente de una serie variable geométrica



Partiendo del ejemplo, esta serie inicia con un primer pago de 1 000 000 el cual representa la A; posteriormente, cada cuota se halla a partir de A multiplicando por (1+10 %), donde 10 % es el crecimiento representado por ***g***, entonces el valor presente es:

$$P = \frac{A}{(1+i)} + \frac{A(1+g)}{(1+i)^{2}} + \frac{A(1+g)^{2}}{(1+i)^{3}} \dots \frac{A(1+g)^{n-1}}{(1+i)^{n}}$$

Factorizando:

$$P = A\left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{(1+g)}{(1+i)^{2}} + \frac{(1+g)^{2}}{(1+i)^{3}} \dots \frac{(1+g)^{n-1}}{(1+i)^{n}}\right]$$

Sustituyendo:

$$x = \left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{(1+g)}{(1+i)^2} + \frac{(1+g)^2}{(1+i)^3} \dots \frac{(1+g)^{n-1}}{(1+i)^n}\right] \qquad (1)$$

Entonces, $P = Ax$

Multiplicando por $\frac{(1+g)}{(1+i)}$:

$$x\frac{(1+g)}{(1+i)} = \left[\frac{(1+g)}{(1+i)^2} + \frac{(1+g)^2}{(1+i)^3} + \frac{(1+g)^3}{(1+i)^4} \dots \frac{(1+g)^n}{(1+i)^{n+1}}\right] \qquad (2)$$

Restando (1) de (2):

$$\begin{aligned} x\frac{(1+G)}{(1+i)} &= \left[\cancel{\frac{(1+g)}{(1+i)^2}} + \cancel{\frac{(1+g)^2}{(1+i)^3}} + \cancel{\frac{(1+g)^3}{(1+i)^4}} \dots \frac{(1+g)^n}{(1+i)^{n+1}}\right] \\ x &= \left[\frac{1}{(1+i)} + \cancel{\frac{(1+g)}{(1+i)^2}} + \cancel{\frac{(1+g)^2}{(1+i)^3}} \dots \cancel{\frac{(1+g)^{n-1}}{(1+i)^n}}\right] \end{aligned}$$

$$x\frac{(1+G)}{(1+i)} - x = \left[\frac{(1+g)^n}{(1+i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)}\right]$$

Desarrollando la resta en ambos miembros de la igualdad:

$$x\left[\frac{(1+g)-(1+i)}{(1+i)}\right] = \left[\frac{(1+g)^n-(1+i)^n}{(1+i)^{n+1}}\right]$$

Despejando x:

$$x = \frac{[(1+g)^n-(1+i)^n](1+i)}{(1+i)^{n+1}[(1+g)-(1+i)]}$$

$$x = \frac{(1+g)^n-(1+i)^n}{(1+i)^n(g-i)}$$

Sustituyendo en $P = Ax$:

$$P = A\left[\frac{(1+g)^n-(1+i)^n}{(1+i)^n(g-i)}\right]$$

Simplificando:

$$P = \frac{A}{(g-i)}\left[\frac{(1+g)^n}{(1+i)^n} - \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n}\right]$$

$$P = \frac{A}{(g-i)}\left[\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n - 1\right]; para\ g \neq i$$

$$para\ g = i;\ P = \frac{nA}{1+i}$$

Valor futuro de una serie variable geométrica

Partiendo de la fórmula de valor presente para serie variable geométrica, se llevan a valor futuro n períodos:

$$F = \left[\frac{A}{(g-i)}\left[\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n - 1\right]\right](1+i)^n$$

$$P = \frac{A}{(g-i)}[(1+i)^n - (1+i)^n]; para\ g \neq i$$

$$para\ g = i;\ \ P = \frac{nA}{1+i}$$

Para gradiente escalonado use la siguiente fórmula:

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]\left[\frac{(1+EA)^E - (1+g)^E}{(1+EA)^E(EA-g)}\right]$$

Donde EA es la tasa efectiva anual, E es el número de períodos grandes, n el número de períodos pequeños contenidos en el período grande y $\boldsymbol{g}$ el crecimiento geométrico.

Ejemplo

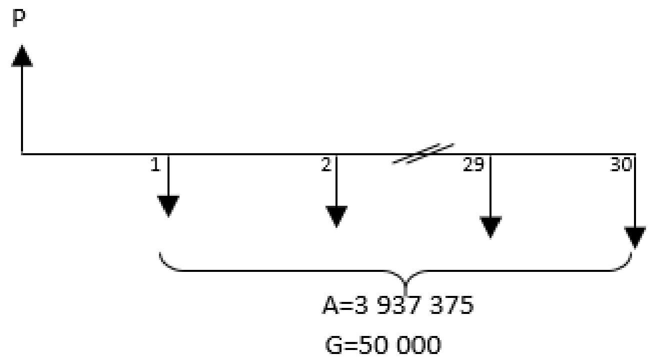
1) Una fábrica hace una inversión en nueva maquinaria y la paga con un préstamo que se amortizará en 30 cuotas mensuales que se inician con un pago de $3 937 375 y crecen cada mes en $50 000. El crédito se negoció a una tasa del 12.6 % nominal mes vencido. ¿Cuál es el valor de contado de la maquinaria?

Solución:

- Se debe hallar el valor presente de un gradiente aritmético creciente.
- Flujo de caja.

Figura 37.

Flujo de caja 23



- Conversión de la tasa:

$$i = \frac{12.6\ \%}{12} = 1.05\ \%\ mensual$$

- Planteamiento y solución de la ecuación:

$$P = 3\ 937\ 375\left[\frac{1-(1+0.0105)^{-30}}{0.0105}\right] + \frac{50\ 000}{0.0105}\left[\frac{1-(1+0.0105)^{-30}}{0.0105} - \frac{30}{(1+0.0105)^{30}}\right]$$

P = 100 876 161 + 17 573 832

P = 118 450 000 (valor aproximado)

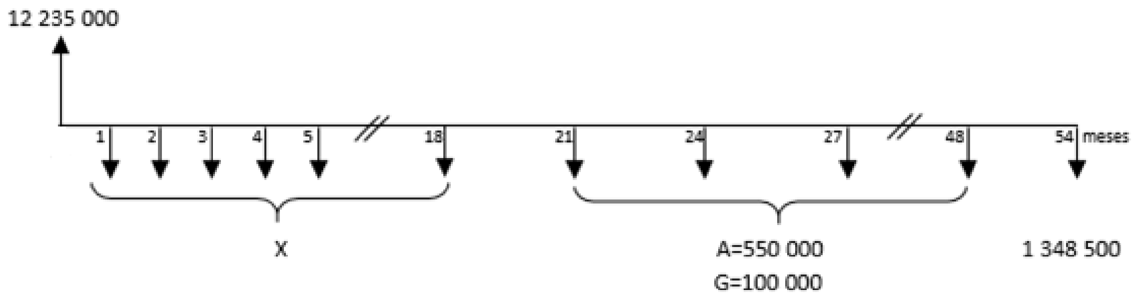
2) Un activo que vale de contado $13 485 000 se va a pagar de la siguiente manera: una cuota inicial de $1 250 000, 18 pagos fijos mensuales; tres meses después de la última cuota de la serie de pagos iguales, se inicia una serie de pagos crecientes, pero trimestrales con un valor de $550 000 el primero, $650 000 el segundo, $750 000 el tercero y así, sucesivamente, hasta terminado el año cuatro. Al finalizar los pagos trimestrales se esperan seis meses para realizar otro pago que equivale al 10 % del valor de contado del activo. Si la tasa de interés de la operación es del 15 % nominal con capitalización mensual, calcule el valor de cada una de las cuotas iguales de la primera serie.

Solución:

- Este ejercicio está compuesto por una serie de pagos iguales, una serie de pagos variables lineales crecientes y dos pagos adicionales.
- Flujo de caja neto.

Figura 38.

Flujo de caja 24



- Conversión de tasas:

$$i = \frac{15\ \%}{12} = 1.25\ \%\ mensual$$

$$i = (1 + 1.25\ \%)^3 - 1 = 3.8\ \%\ trimestral$$

- Para el planteamiento de la ecuación se elige fecha focal cero:

$$12\ 235\ 000 = x\left[\frac{1-(1+0.0125)^{-18}}{0.0125}\right] + \left\{550\ 000\left[\frac{1-(1+0.0387971)^{-10}}{0.0387971}\right] + \frac{100\ 000}{0.038}\left[\frac{1-(1+0.0387971)^{-10}}{0.0387971} - \frac{10}{(1+0.0387971)^{10}}\right]\right\}(1+0.0125)^{-18} + 1\ 348\ 500(1+0.0125)^{-54}$$

$$12\ 235\ 000 = 16.0295489x + 6\ 350\ 771 + 689\ 476$$

$$6\ 194\ \ 753 = 16.0295489x$$

$$x = \frac{6\ 194\ 753}{16.0295489}$$

$$x = 324\ 074$$

La aproximación se debe a los decimales tomados para la tasa trimestral.

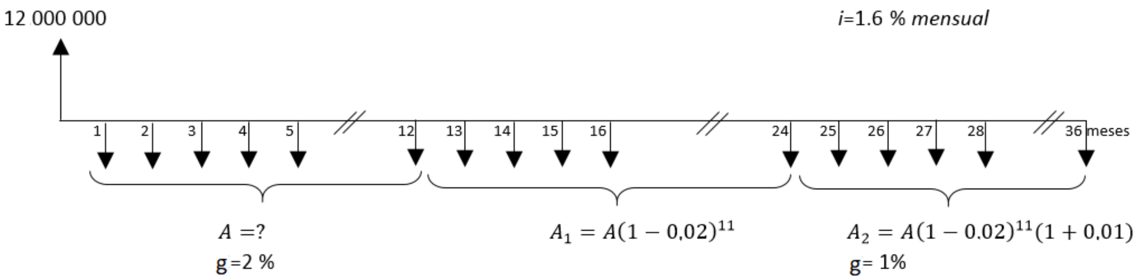
3) Se otorga un préstamo hoy por valor de $12 000 000 que se va a cancelar en pagos mensuales que disminuyen el 2 % cada mes durante el primer año y de allí en adelante permanecen fijos hasta el final del segundo año; luego, empiezan a crecer el 1 % hasta el final del tercer año. La tasa mensual es del 1.6 %. Halle el valor de la primera cuota.

Solución:

- Se debe hallar el valor de la primera cuota en un ejercicio que involucra una serie de pagos decrecientes en forma geométrica, una serie de pagos iguales y una serie de pagos crecientes en forma geométrica.
- Flujo de caja.

Figura 39.

Flujo de caja 25



$$12\,000\,000 = \frac{A}{-0.02-0.016}\left[\left(\frac{1-0.02}{1+0.016}\right)^{12} - 1\right]$$
$$+\left\{A(1-0.02)^{11}\left[\frac{1-(1+0.016)^{-12}}{0.016}\right]\right\}(1+0.016)^{-12}$$
$$+\left\{\frac{A(1-0.02)^{11}(1+0.01)}{0.01-0.016}\left[\left(\frac{1+0.01}{1+0.016}\right)^{12} - 1\right]\right\}(1+0.016)^{-24}$$

$$12\,000\,000 = 9.760635331A + 7.174411475A + 6.318146519A$$

$$A = \frac{12\,000\,000}{23.25319332}$$

$$A = 516\,058$$

4) Una entidad financió la compra de un vehículo a una persona por valor de $42 390 000 con una tasa de financiación del 14 % capitalizable trimestralmente. Se acordó pagarlo con cuotas trimestrales iguales que crecen un 8 % cada año; el plazo de vencimiento de la deuda es de cuatro años. Calcule el valor de la cuota para cada año.

- Este ejercicio corresponde a un gradiente escalonado.
- ***E*** es el número de períodos grandes, es decir, 4 años; ***n*** es el número de períodos pequeños contenidos en el período grande, es decir, 4 trimestres y la tasa efectiva anual es:

$$EA = \left(1 + \frac{0.14}{4}\right)^4 - 1 \approx 0.1475$$

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]\left[\frac{(1+EA)^E - (1+g)^E}{(1+EA)^E(EA-g)}\right]$$

$$42\,390\,000 = A\left[\frac{(1+0.035)^4 - 1}{0.035}\right]\left[\frac{(1+0.1475)^4 - (1+0.08)^4}{(1+0.1475)^4(0.1475-0.08)}\right]$$

$$42\,390\,000 = A\left[\frac{(1+0.035)^4 - 1}{0.035}\right]\left[\frac{(1+0.1475)^4 - (1+0.08)^4}{(1+0.1475)^4(0.1475-0.08)}\right]$$

42 390 000 = A(4.214942875)(3.190149118)

A = 3 152 541 (valor aproximado)

La aproximación se debe a los decimales tomados para la tasa efectiva anual (solamente dos).

Año1 = 3 152 541

Año2 = 3 404 744

Año3 = 3 677 124

Año4 = 3 971 294

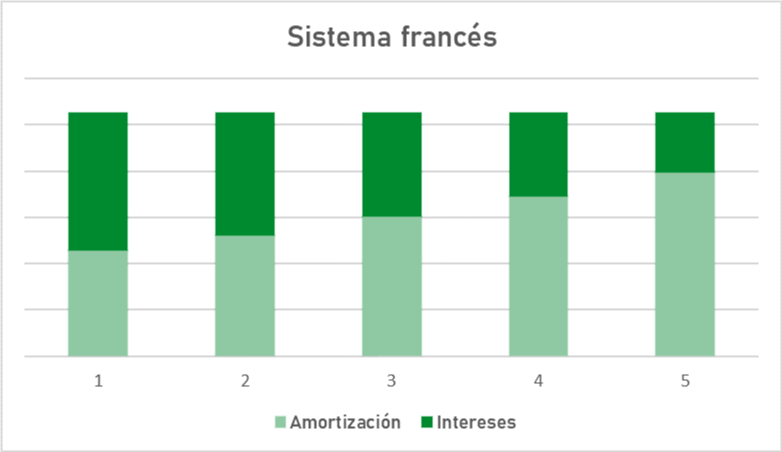
Construcción de sistemas de amortización en hoja de cálculo

Los sistemas de amortización pueden ser tan variados como las formas de negociación, pero en general se pueden clasificar en:

- Sistema de cuota fija: consiste en un pago igual en pesos cada período, conocido también como anualidades o sistema francés. Este sistema puede tener tasa fija o tasa variable. En la amortización de la deuda también pueden existir: cuota inicial, pagos extraordinarios, períodos de gracia y otras variaciones.

Figura 40.

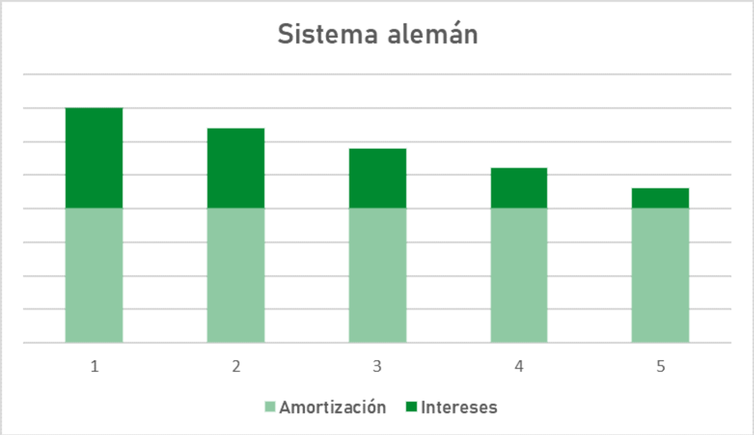
Sistema francés



- Sistema de abono constante a capital: consiste en pagos iguales de amortización de la deuda, lo que implica una cuota diferente en pesos, puesto que la cuota está compuesta por el abono a capital más los intereses y estos van a ser diferentes en cada período porque el saldo de capital es diferente en cada uno. Es conocido también como sistema alemán.

Figura 41.

Sistema alemán



Los dos sistemas de amortización se han graficado con el fin de observar la diferencia entre el comportamiento del abono a capital y el pago de intereses. En el sistema de cuota fija en pesos se puede ver que se inicia con un abono a capital muy pequeño con respecto al pago de intereses; este abono va creciendo hasta finalizar siendo más grande que el pago de intereses. Por otra parte, en el abono constante a capital las cuotas de amortización de la deuda siempre van a ser iguales y, por tanto, el pago de intereses disminuye rápidamente y termina siendo más bajo en forma global comparado con los intereses del sistema de cuota fija en pesos. En el sistema alemán, las cuotas al inicio de la amortización son más altas que en el sistema de cuota fija en pesos y hacia el final terminan siendo más pequeñas.

- ***Sistema de cuota variable:*** consiste en un pago que cambia obedeciendo a un patrón matemático, ya sea lineal o exponencial. Este cambio puede ser creciente o decreciente; también puede operar con tasa fija o tasa variable.
- ***Sistema UVR:*** es un sistema propio del contexto colombiano, pero tiene un comportamiento de gradiente geométrico. La UVR es la unidad de valor real; fue creada en el gobierno de Andrés Pastrana en sustitución del sistema UPAC. Su valor original fue de 100 y este valor se va actualizando con el índice de precios al consumidor, IPC. Este sistema se usa generalmente para créditos hipotecarios por ser de largo plazo. Usted puede consultar la metodología para calcular la UVR en Banco de la República (2016).

Ejemplo

Para explicar la construcción de los distintos sistemas de amortización, se va a suponer la adquisición de una deuda por valor de $48 000 000 con un plazo de 3 años a una tasa del 15.2 % EA. Considere las siguientes variaciones en la forma de pago:

1) Un único pago al final del plazo (los intereses se capitalizan, no hay pago periódico de intereses).

2) 12 pagos trimestrales iguales.

3) Seis meses de período de gracia y 10 pagos trimestrales iguales (los intereses se capitalizan en el período de gracia).

4) 12 pagos trimestrales que inician con un pago de X pesos y crecen en forma lineal hasta vencer el plazo.

5) 12 pagos trimestrales que crecen un 1 % cada trimestre.

6) Pagos trimestrales que se mantienen constantes cada año y crecen un 4 % cuando cambia el año.

7) 12 cuotas de abono constante a capital.

Solución:

Conversión de la tasa:

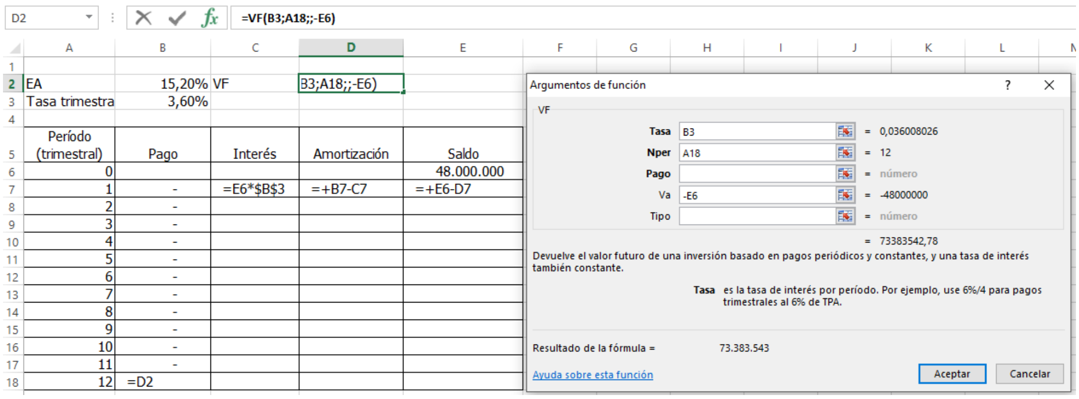
$$i = (1 + 15.2\ \%)^{1/4} - 1 \approx 3.6\ \%$$

En la hoja de cálculo se guardan todos los decimales para que el cálculo sea exacto.

1) Un único pago al final del plazo (los intereses se capitalizan, no hay pago periódico de estos).

Figura 42.

Hoja de cálculo 10



- ***Columna del pago:*** para saber el valor del pago final se usa la fórmula financiera VF y se introducen la tasa, el número de períodos y el valor actual (signo negativo para que arroje el valor final con signo positivo). La celda del pago número 12 se enlaza con la celda donde fue hallado el VF. Los demás pagos (del 1 al 11) van en cero, puesto que no hay pago.
- ***Interés:*** se multiplica la celda del saldo anterior por la tasa trimestral; en esta última celda se inmovilizan tanto fila como columna (F4).
- ***Amortización:*** a la celda del pago se le resta la celda del interés.
- ***Saldo:*** a partir del saldo 1 se formula así: saldo anterior menos amortización del período.

Las fórmulas se arrastran hasta el último período y la última celda (saldo en momento 12) debe aparecer en cero.

Figura 43.

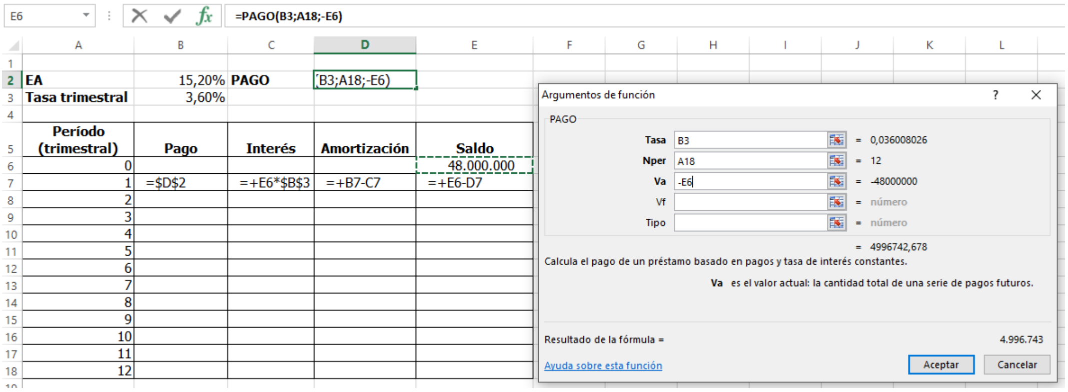
Hoja de cálculo 11

	A	B	C	D	E
1					
2	EA	15,20%	VF	73.383.543	
3	Tasa trimestra	3,60%			
4					
5	Período (trimestral)	Pago	Interés	Amortización	Saldo
6	0				48.000.000
7	1	-	1.728.385	- 1.728.385	49.728.385
8	2	-	1.790.621	- 1.790.621	51.519.006
9	3	-	1.855.098	- 1.855.098	53.374.104
10	4	-	1.921.896	- 1.921.896	55.296.000
11	5	-	1.991.100	- 1.991.100	57.287.100
12	6	-	2.062.795	- 2.062.795	59.349.895
13	7	-	2.137.073	- 2.137.073	61.486.968
14	8	-	2.214.024	- 2.214.024	63.700.992
15	9	-	2.293.747	- 2.293.747	65.994.739
16	10	-	2.376.340	- 2.376.340	68.371.079
17	11	-	2.461.908	- 2.461.908	70.832.987
18	12	73.383.543	2.550.556	70.832.987	-

2) 12 pagos trimestrales iguales.

Figura 44.

Hoja de cálculo 12



- ***Columna del pago:*** para saber el valor del pago se usa la fórmula financiera PAGO y se introducen la tasa, el número de períodos y el valor actual (signo negativo para que arroje el valor del pago con signo positivo). La celda del pago número 1 se enlaza con la celda donde fue hallado el pago y se inmoviliza (F4).
- ***Interés:*** se multiplica la celda del saldo anterior por la tasa trimestral; en esta última celda se inmovilizan tanto fila como columna (F4).
- ***Amortización:*** a la celda del pago se le resta la celda del interés.
- ***Saldo:*** a partir del saldo 1 se formula así: saldo anterior menos amortización del período.

Las fórmulas se arrastran hasta el último período y la última celda (saldo en momento 12) debe aparecer en cero.

Figura 45.

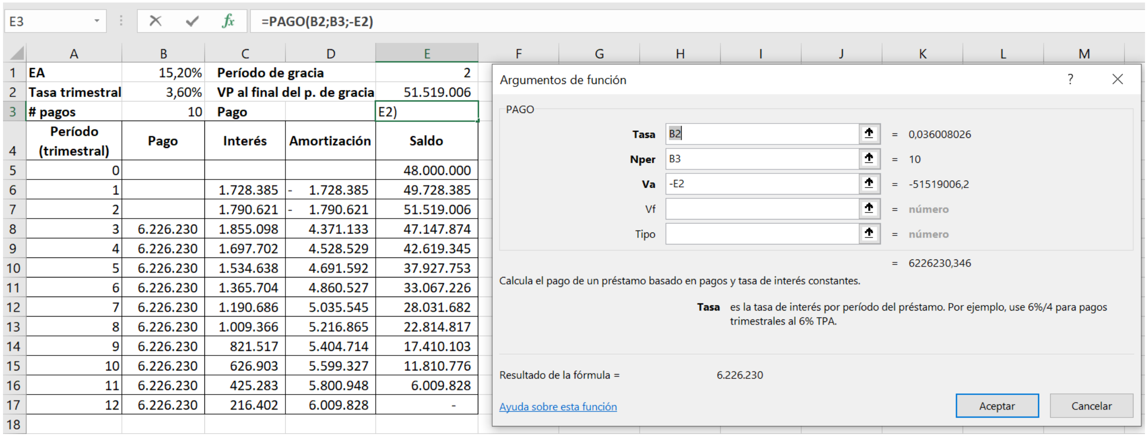
Hoja de cálculo 13

	A	B	C	D	E
1	EA	15,20%			
2	Tasa trimestral	3,60%		Gradiente	1%
3	# Pagos	12		Anualidad	4.996.743
4					
5	**Período trimestral**	**Pago**	**Interés**	**Amortización**	**Saldo**
6	0				48.000.000
7	1	4.996.743	1.728.385	3.268.357	44.731.643
8	2	4.996.743	1.610.698	3.386.045	41.345.598
9	3	4.996.743	1.488.773	3.507.969	37.837.629
10	4	4.996.743	1.362.458	3.634.284	34.203.344
11	5	4.996.743	1.231.595	3.765.148	30.438.197
12	6	4.996.743	1.096.019	3.900.723	26.537.473
13	7	4.996.743	955.562	4.041.181	22.496.293
14	8	4.996.743	810.047	4.186.696	18.309.597
15	9	4.996.743	659.292	4.337.450	13.972.147
16	10	4.996.743	503.109	4.493.633	9.478.513

3) Seis meses de período de gracia y 10 pagos trimestrales iguales (los intereses se capitalizan en el período de gracia).

Figura 46.

Hoja de cálculo 14



E3 =PAGO(B2;B3;-E2)

	A	B	C	D	E
1	**EA**	15,20%	**Período de gracia**		2
2	**Tasa trimestral**	3,60%	**VP al final del p. de gracia**		51.519.006
3	**# pagos**	10	**Pago**		E2)
4	**Período (trimestral)**	**Pago**	**Interés**	**Amortización**	**Saldo**
5	0				48.000.000
6	1		1.728.385	- 1.728.385	49.728.385
7	2		1.790.621	- 1.790.621	51.519.006
8	3	6.226.230	1.855.098	4.371.133	47.147.874
9	4	6.226.230	1.697.702	4.528.529	42.619.345
10	5	6.226.230	1.534.638	4.691.592	37.927.753
11	6	6.226.230	1.365.704	4.860.527	33.067.226
12	7	6.226.230	1.190.686	5.035.545	28.031.682
13	8	6.226.230	1.009.366	5.216.865	22.814.817
14	9	6.226.230	821.517	5.404.714	17.410.103
15	10	6.226.230	626.903	5.599.327	11.810.776
16	11	6.226.230	425.283	5.800.948	6.009.828
17	12	6.226.230	216.402	6.009.828	-
18					

- ***Columna del pago:*** los pagos se inician en el tercer trimestre, puesto que hay un período de gracia de seis meses. Para poder hallar el pago con la fórmula PAGO habría que hallar primero el valor del saldo en el trimestre dos, debido a que los pagos son diferidos. Este sería el valor presente de la serie de pagos. Se introducen la tasa, el número de períodos y el valor presente (signo negativo para que arroje el valor del pago con signo positivo). La celda del pago número 1 se enlaza con la celda donde fue hallado el pago y se inmoviliza (F4).
- ***Interés:*** se multiplica la celda del saldo anterior por la tasa trimestral; en esta última celda se inmovilizan tanto fila como columna (F4).
- ***Amortización:*** a la celda del pago se le resta la celda del interés.
- ***Saldo:*** a partir del saldo 1 se formula así: saldo anterior menos amortización del período.

Las fórmulas se arrastran hasta el último período y la última celda (saldo en momento 12) debe aparecer en cero.

4) 12 pagos trimestrales que se inician con uno de $3 200 000 y crecen en forma lineal hasta vencer el plazo.

Figura 47.

Hoja de cálculo 15

G20

	A	B	C	D	E
1					
2	**EA**	15,20%	**GRADIENTE**	100	
3	**Tasa trimestral**	3,60%			
4					
5	**Período (trimestral)**	**Pago**	**Interés**	**Amortización**	**Saldo**
6	0				48.000.000
7	1	3.200.000	=+E6*$B$3	=+B7-C7	=+E6-D7
8	2	=B7+$D$2			
9	3				
10	4				
11	5				
12	6				
13	7				
14	8				
15	9				
16	10				
17	11				
18	12				

Para automatizar este ejercicio sería necesario introducir toda la formulación matemática del gradiente lineal:

$$48\,000\,000 = \left(\frac{1-(1+3.6\,\%)^{-12}}{3.6\,\%}\right) + \frac{G}{3.6\,\%}\left(\frac{1-(1+3.6\,\%)^{-12}}{3{,}6\,\%} - \frac{12}{(1+3.6\,\%)^{12}}\right)$$

Sin embargo, para resolverlo de una manera más sencilla se acude a la función ***buscar objetivo***; con esta segunda opción, la plantilla no permanece automatizada.

- ***Columna del pago:*** el primer pago es de $3 200 000; a partir del segundo pago se formula el gradiente (crecimiento lineal) así: se supone un valor de "100" para el gradiente, puesto que no se conoce. Luego, en la celda del segundo pago se formula: pago anterior más la celda de los "100" y esta última se inmoviliza (F4).
- ***Interés:*** se multiplica la celda del saldo anterior por la tasa trimestral; en esta última celda se inmovilizan tanto fila como columna (F4).
- ***Amortización:*** a la celda del pago se le resta la celda del interés.
- ***Saldo:*** a partir del saldo 1 se formula así: saldo anterior menos amortización del período.

Finalmente, se arrastran las fórmulas hasta el final de la tabla y se aplica la función ***buscar objetivo***.

Función ***buscar objetivo***: una vez formulada toda la tabla se ubica el cursor en la última celda de la tabla y sigue la ruta: Datos/Análisis de hipótesis/Buscar objetivo. Enseguida se abre un recuadro que solicita los siguientes datos:

- Definir celda: la última celda de la tabla de amortización.
- Con el valor cero (0) porque cuando la tabla aparezca con valor cero en la última celda significa que ya se ha pagado la totalidad de la deuda.

- Cambiando la celda: la celda donde se supuso el valor de los "100".
- ACEPTAR.

  Automáticamente, el ordenador recalcula los "100" y los lleva a su valor real.

Figura 48.

Hoja de cálculo 16

I11

	A	B	C	D	E
1					
2	**EA**	15,20%	**GRADIENTE**	353.709	
3	**Tasa trimestral**	3,60%			
4					
5	**Período (trimestral)**	**Pago**	**Interés**	**Amortización**	**Saldo**
6	0				48.000.000
7	1	3.200.000	1.728.385	1.471.615	46.528.385
8	2	3.553.709	1.675.395	1.878.314	44.650.071
9	3	3.907.418	1.607.761	2.299.657	42.350.414
10	4	4.261.127	1.524.955	2.736.172	39.614.242
11	5	4.614.836	1.426.431	3.188.406	36.425.836
12	6	4.968.545	1.311.622	3.656.923	32.768.913
13	7	5.322.255	1.179.944	4.142.311	28.626.602
14	8	5.675.964	1.030.787	4.645.176	23.981.426
15	9	6.029.673	863.524	5.166.149	18.815.277
16	10	6.383.382	677.501	5.705.881	13.109.396
17	11	6.737.091	472.043	6.265.047	6.844.349
18	12	7.090.800	246.451	6.844.349	- 0

5) 12 pagos trimestrales que crecen un 1 % cada trimestre.

Figura 49.

Hoja de cálculo 17

	A	B	C	D	E	F	G
1	**EA**	15,20%					
2	**Tasa trimestral**	3,60%		**Gradiente**	1%		
3	**# pagos**	12		**Anualidad**	=(E5*(E2-B2))/(((1+E2)/(1+B2))^(B3)-1)		
4	**Período (trimestral)**	**Pago**	**Interés**	**Amortización**	**Saldo**		
5	0				48.000.000		
6	1	=E3	=E5*$B$2	=B6-C6	=E5-D6		
7	2	=B6*(1+$E$2)					
8	3						
9	4						
10	5						
11	6						
12	7						
13	8						
14	9						
15	10						
16	11						
17	12						

CONTENIDO

Nuevamente, para resolver este ejercicio es necesario introducir la formulación matemática si se desea obtener una plantilla automática; si lo que se requiere es solo una respuesta, basta con usar la función ***buscar objetivo***. La formulación matemática es:

$$48\,000\,000 = \frac{A}{0.01 - 0.036}\left(\left(\frac{1+0.01}{1+0.036}\right)^{12} - 1\right)$$

$$A = \frac{48\,000\,000(0.01 - 0.036)}{\left(\left(\frac{1+0.01}{1+0.036}\right)^{12} - 1\right)}$$

- ***Columna del pago:*** el primer pago se enlaza a partir de la celda donde se halló la anualidad. A partir del segundo pago se formula el gradiente (crecimiento geométrico) así: pago anterior por, abre paréntesis, uno más la celda del gradiente geométrico y esta última se inmoviliza, cierra paréntesis (F4).
- ***Interés:*** se multiplica la celda del saldo anterior por la tasa trimestral; en esta última celda se inmovilizan tanto fila como columna (F4).
- ***Amortización:*** a la celda del pago se le resta la celda del interés.
- ***Saldo:*** a partir del saldo 1 se formula así: saldo anterior menos amortización del período.

Las fórmulas se arrastran hasta el último período y la última celda (saldo en momento 12) debe aparecer en cero.

Figura 50.

Hoja de cálculo 18

EA	**15,20%**			
Tasa trimestral	**3,60%**		**Gradiente**	**1%**
# pagos	**12**		**Anualidad**	**4.747.679**
Período (trimestral)	**Pago**	**Interés**	**Amortización**	**Saldo**
0				48.000.000
1	4.747.679	1.728.385	3.019.294	44.980.706
2	4.795.156	1.619.666	3.175.489	41.805.217
3	4.843.107	1.505.323	3.337.784	38.467.434
4	4.891.538	1.385.136	3.506.402	34.961.032
5	4.940.454	1.258.878	3.681.576	31.279.456
6	4.989.858	1.126.311	3.863.547	27.415.909
7	5.039.757	987.193	4.052.564	23.363.345
8	5.090.154	841.268	4.248.886	19.114.459
9	5.141.056	688.274	4.452.782	14.661.677
10	5.192.466	527.938	4.664.528	9.997.149
11	5.244.391	359.978	4.884.413	5.112.735
12	5.296.835	184.100	5.112.735	0

6) Pagos trimestrales que se mantienen constantes cada año y crecen un 4 % cada año. 12 pagos trimestrales que crecen un 1 % cada trimestre.

Figura 51.

Hoja de cálculo 19

F14

	A	B	C	D	E
1					
2	**EA**	15,20%	**GRADIENTE**	4%	
3	**Tasa trimestral**	3,60%	**Primer pago**	100	
4					
5	**Período (trimestral)**	**Pago**	**Interés**	**Amortización**	**Saldo**
6	0				48.000.000
7	1	100	1.728.385	- 1.728.285	49.728.285
8	2	100	1.790.617	- 1.790.517	51.518.803
9	3	100	1.855.090	- 1.854.990	53.373.793
10	4	100	1.921.885	- 1.921.785	55.295.578
11	5	=B10*(1+$D$2)			
12	6	=$B$11			
13	7				
14	8				
15	9				
16	10				
17	11				
18	12				

También se puede formular para obtener una plantilla automática introduciendo la formulación matemática o, de una manera más simple, con la función ***buscar objetivo***.

- ***Columna del pago:*** el primer pago no se conoce, por tanto, se supone un valor de los "100". La celda del primer pago se enlaza con la celda de los "100" y se inmoviliza (F4); se arrastra hasta el período cuatro que es donde finaliza el primer año. En el período cinco se formula el crecimiento así: igual al pago anterior por, abre paréntesis, uno más la celda del gradiente; esta última se fija (F4) y se cierra el paréntesis. El pago seis es igual al pago cinco y se inmoviliza (F4). Esta formulación se repite cada vez que hay cambio de año.
- ***Interés:*** se multiplica la celda del saldo anterior por la tasa trimestral; en esta última celda se inmovilizan tanto fila como columna (F4).
- ***Amortización:*** a la celda del pago se le resta la celda del interés.
- ***Saldo:*** a partir del saldo 1 se formula así: saldo anterior menos amortización del período.

Finalmente, se arrastran las fórmulas hasta el final de la tabla y se aplica la función ***buscar objetivo***.

Función ***buscar objetivo***: una vez formulada toda la tabla se ubica el cursor en la última celda de la tabla y sigue la ruta: Datos/Análisis de hipótesis/Buscar objetivo. Enseguida se abre un recuadro que solicita los siguientes datos:

- ***Definir celda:*** la última celda de la tabla de amortización.
- ***Con el valor:*** cero (0) porque cuando la tabla aparezca con valor cero en la última celda, significa que ya se ha pagado la totalidad de la deuda.

- Cambiando la celda: la celda donde se supuso el valor de los "100".
- ACEPTAR.

  Automáticamente el ordenador recalcula los "100" y los lleva a su valor real.

Figura 52.

Hoja de cálculo 20

J25

	A	B	C	D	E
1					
2	**EA**	15,20%	**GRADIENTE**	4%	
3	**Tasa trimestral**	3,60%	**Primer pago**	4.819.858	
4					
5	**Período (trimestral)**	**Pago**	**Interés**	**Amortización**	**Saldo**
6	0				48.000.000
7	1	4.819.858	1.728.385	3.091.473	44.908.527
8	2	4.819.858	1.617.067	3.202.791	41.705.736
9	3	4.819.858	1.501.741	3.318.117	38.387.619
10	4	4.819.858	1.382.262	3.437.596	34.950.023
11	5	5.012.653	1.258.481	3.754.171	31.195.852
12	6	5.012.653	1.123.301	3.889.351	27.306.501
13	7	5.012.653	983.253	4.029.399	23.277.101
14	8	5.012.653	838.162	4.174.490	19.102.611
15	9	5.213.159	687.847	4.525.311	14.577.300
16	10	5.213.159	524.900	4.688.259	9.889.041
17	11	5.213.159	356.085	4.857.074	5.031.967
18	12	5.213.159	181.191	5.031.967	- 0

7) 12 cuotas de abono constante a capital.

Figura 53.

Hoja de cálculo 21

F13

	A	B	C	D	E
1					
2	**EA**	15,20%	**GRADIENTE**	4%	
3	**Tasa trimestral**	3,60%	**Primer pago**	4.819.858	
4					
5	**Período (trimestral)**	**Pago**	**Interés**	**Amortización**	**Saldo**
6	0				48.000.000
7	1	=C7+D7	=E6*$B$3	=$E$6/12	=E6-D7
8	2				
9	3				
10	4				

- ***Amortización:*** igual a la celda del saldo cero y se inmoviliza (F4) dividido en 12 (número de pagos).
- ***Interés:*** se multiplica la celda del saldo anterior por la tasa trimestral; en esta última celda se inmovilizan tanto fila como columna (F4).

- ***Columna del pago:*** igual a la celda de la amortización más la celda del interés.
- ***Saldo:*** a partir del saldo 1 se formula así: saldo anterior menos amortización del período.

Se arrastran las fórmulas hasta el final de la tabla y el saldo en el momento 12 debe ser cero.

Figura 54.

Hoja de cálculo 22

	A	B	C	D	E
1					
2	EA	15,20%	GRADIENTE	4%	
3	Tasa trimestral	3,60%	Primer pago	4.819.858	
4					
5	Período (trimestral)	Pago	Interés	Amortización	Saldo
6	0				48.000.000
7	1	5.728.385	1.728.385	4.000.000	44.000.000
8	2	5.584.353	1.584.353	4.000.000	40.000.000
9	3	5.440.321	1.440.321	4.000.000	36.000.000
10	4	5.296.289	1.296.289	4.000.000	32.000.000
11	5	5.152.257	1.152.257	4.000.000	28.000.000
12	6	5.008.225	1.008.225	4.000.000	24.000.000
13	7	4.864.193	864.193	4.000.000	20.000.000
14	8	4.720.161	720.161	4.000.000	16.000.000
15	9	4.576.128	576.128	4.000.000	12.000.000
16	10	4.432.096	432.096	4.000.000	8.000.000
17	11	4.288.064	288.064	4.000.000	4.000.000
18	12	4.144.032	144.032	4.000.000	-

Sistema de amortización en UVR

La UVR es la unidad de valor real creada por la Ley 145 de 1995 para reflejar el poder adquisitivo de la moneda, por lo cual se actualiza a partir de los índices de precios al consumidor (IPC) y se usa especialmente para el financiamiento de vivienda a largo plazo. También es usada en los títulos de deuda pública. Las cuotas pagadas en UVR necesariamente son variables porque dependen del valor de la inflación que es variable; lo típico es que las cuotas aumenten cada período y el sistema es estable si las condiciones macroeconómicas son estables. A continuación, se explicará cómo construir un sistema de cuota fija en UVR.

Ejemplo

Costo de la vivienda: $180 000 000

Períodos: 120

Tasa: UVR + 6 % EA

Valor de la UVR: $280

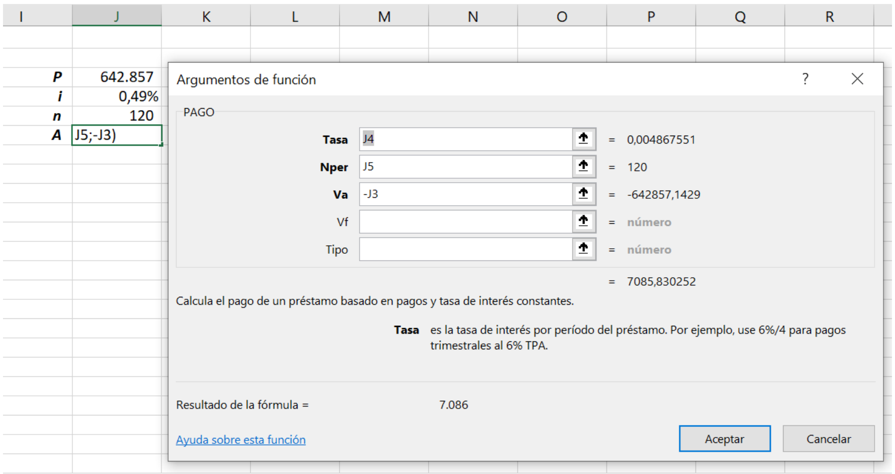
Valor del préstamo en UVR: 642 857

1) Se divide el valor del crédito total en el valor de la UVR (consúltese en indicadores económicos). Así se obtiene el valor del préstamo en UVR.

2) Con la fórmula de pago (en la hoja de cálculo) se halla la anualidad o valor de la cuota fija en UVR.

Figura 55.

Hoja de cálculo 23



Cuota fija en UVR: 7085.83

3) Se consulta en páginas económicas en cuánto se estima que crezca la inflación los próximos años (generalmente este dato está entre el 3 % y el 4 %, por política monetaria); esta tasa se convierte a mensual.

- **a)** Se calculan las tasas mensuales tanto de interés como de inflación (con la equivalencia de tasas efectivas) y se halla la suma compuesta de la tasa mensual (interés + inflación).
- **b)** La UVR se actualiza cada mes multiplicando el valor anterior por (1 + el aumento mensual de inflación mensual): fórmula del gradiente geométrico.
- **c)** La cuota en UVR es la misma hallada anteriormente (paso 2); esto, si es el sistema cuota fija en UVR.
- **d)** Cuota en pesos: se multiplica la cuota UVR por el valor de la UVR.
- **e)** Interés en pesos: se multiplica el saldo anterior en pesos por la suma compuesta de tasas (inflación + interés).
- **f)** Amortización en pesos: cuota en pesos menos interés en pesos.
- **g)** Saldo en pesos: saldo anterior menos amortización en pesos.

Principal	$180 000 000	**Períodos**	120
Tasa	UVR + 6 % EA	**Valor UVR**	280
Inflación proyectada anual	4 %		
Crecimiento mensual UVR	0.3274 %	**Principal en UVR**	642 857
Tasa mensual	0.49 %	**Pago en UVR**	7086
Suma de tasas	0.10 %		

	Saldo inicial	Valor UVR	Cuota UVR	Cuota en $	Interés en $	Abono a capital	Saldo final
1	180 000 000	280.92	7086	1 990 528	1 468 301	522 227	179 477 773
2	179 477 773	281.84	7086	1 997 044	1 464 041	533 003	178 944 769
3	178 944 769	282.76	7086	2 003 582	1 459 693	543 889	178 400 880
4	178 400 880	283.68	7086	2 010 141	1 455 256	554 885	177 845 995
5	177 845 995	284.61	7086	2 016 722	1 450 730	565 992	177 280 003
6	177 280 003	285.55	7086	2 023 324	1 446 113	577 211	176 702 792
7	176 702 792	286.48	7086	2 029 948	1 441 405	588 543	176 114 249
8	176 114 249	287.42	7086	2 036 593	1 436 604	599 990	175 514 259
9	175 514 259	288.36	7086	2 043 261	1 431 709	611 551	174 902 708
10	174 902 708	289.30	7086	2 049 950	1 426 721	623 229	174 279 479
11	174 279 479	290.25	7086	2 056 661	1 421 637	635 024	173 644 455
12	173 644 455	291.20	7086	2 063 394	1 416 457	646 937	172 997 518
13	172 997 518	292.15	7086	2 070 149	1 411 180	658 969	172 338 549
14	172 338 549	293.11	7086	2 076 926	1 405 804	671 122	171 667 428
15	171 667 428	294.07	7086	2 083 725	1 400 330	683 395	170 984 032
16	170 984 032	295.03	7086	2 090 547	1 394 755	695 792	170 288 241
17	170 288 241	296.00	7086	2 097 391	1 389 080	708 311	169 579 930
18	169 579 930	296.97	7086	2 104 257	1 383 302	720 955	168 858 974
19	168 858 974	297.94	7086	2 111 146	1 377 421	733 725	168 125 249
20	168 125 249	298.91	7086	2 118 057	1 371 436	746 622	167 378 628
21	167 378 628	299.89	7086	2 124 991	1 365 345	759 646	166 618 982
22	166 618 982	300.87	7086	2 131 948	1 359 149	772 799	165 846 183
23	165 846 183	301.86	7086	2 138 927	1 352 845	786 083	165 060 100
24	165 060 100	302.85	7086	2 145 930	1 346 432	799 497	164 260 603
25	164 260 603	303.84	7086	2 152 955	1 339 911	813 044	163 447 559
26	163 447 559	304.83	7086	2 160 003	1 333 279	826 724	162 620 835
27	162 620 835	305.83	7086	2 167 074	1 326 535	840 539	161 780 295
28	161 780 295	306.83	7086	2 174 169	1 319 678	854 490	160 925 805
29	160 925 805	307.84	7086	2 181 286	1 312 708	868 578	160 057 227
30	160 057 227	308.85	7086	2 188 427	1 305 623	882 804	159 174 422
31	159 174 422	309.86	7086	2 195 592	1 298 422	897 170	158 277 252
32	158 277 252	310.87	7086	2 202 779	1 291 103	911 676	157 365 576
33	157 365 576	311.89	7086	2 209 991	1 283 666	926 324	156 439 252
34	156 439 252	312.91	7086	2 217 226	1 276 110	941 115	155 498 136
35	155 498 136	313.93	7086	2 224 484	1 268 433	956 051	154 542 085
36	154 542 085	314.96	7086	2 231 767	1 260 635	971 132	153 570 953
37	153 570 953	315.99	7086	2 239 073	1 252 713	986 360	152 584 593
38	152 584 593	317.03	7086	2 246 403	1 244 667	1 001 736	151 582 857

39	151 582 857	318.07	7086	2 253 757	1 236 496	1 017 262	150 565 595
40	150 565 595	319.11	7086	2 261 135	1 228 198	1 032 938	149 532 658
41	149 532 658	320.15	7086	2 268 538	1 219 772	1 048 766	148 483 891
42	148 483 891	321.20	7086	2 275 964	1 211 217	1 064 748	147 419 144
43	147 419 144	322.25	7086	2 283 415	1 202 531	1 080 884	146 338 259
44	146 338 259	323.31	7086	2 290 891	1 193 714	1 097 176	145 241 083
45	145 241 083	324.36	7086	2 298 390	1 184 764	1 113 626	144 127 457
46	144 127 457	325.43	7086	2 305 915	1 175 680	1 130 235	142 997 222
47	142 997 222	326.49	7086	2 313 464	1 166 461	1 147 003	141 850 219
48	141 850 219	327.56	7086	2 321 037	1 157 104	1 163 933	140 686 286
49	140 686 286	328.63	7086	2 328 636	1 147 610	1 181 026	139 505 260
50	139 505 260	329.71	7086	2 336 259	1 137 976	1 198 283	138 306 977
51	138 306 977	330.79	7086	2 343 907	1 128 201	1 215 706	137 091 270
52	137 091 270	331.87	7086	2 351 581	1 118 284	1 233 296	135 857 974
53	135 857 974	332.96	7086	2 359 279	1 108 224	1 251 055	134 606 919
54	134 606 919	334.05	7086	2 367 003	1 098 019	1 268 984	133 337 935
55	133 337 935	335.14	7086	2 374 752	1 087 668	1 287 084	132 050 850
56	132 050 850	336.24	7086	2 382 526	1 077 169	1 305 358	130 745 493
57	130 745 493	337.34	7086	2 390 326	1 066 520	1 323 806	129 421 687
58	129 421 687	338.44	7086	2 398 151	1 055 722	1 342 429	128 079 258
59	128 079 258	339.55	7086	2 406 002	1 044 771	1 361 231	126 718 027
60	126 718 027	340.66	7086	2 413 879	1 033 668	1 380 211	125 337 815
61	125 337 815	341.78	7086	2 421 781	1 022 409	1 399 372	123 938 443
62	123 938 443	342.90	7086	2 429 710	1 010 994	1 418 716	122 519 727
63	122 519 727	344.02	7086	2 437 664	999 421	1 438 243	121 081 485
64	121 081 485	345.15	7086	2 445 644	987 689	1 457 955	119 623 529
65	119 623 529	346.28	7086	2 453 650	975 796	1 477 854	118 145 675
66	118 145 675	347.41	7086	2 461 683	963 741	1 497 942	116 647 733
67	116 647 733	348.55	7086	2 469 742	951 522	1 518 220	115 129 513
68	115 129 513	349.69	7086	2 477 827	939 137	1 538 690	113 590 823
69	113 590 823	350.83	7086	2 485 939	926 586	1 559 353	112 031 470
70	112 031 470	351.98	7086	2 494 077	913 866	1 580 211	110 451 258
71	110 451 258	353.13	7086	2 502 242	900 976	1 601 267	108 849 992
72	108 849 992	354.29	7086	2 510 434	887 914	1 622 520	107 227 472
73	107 227 472	355.45	7086	2 518 653	874 679	1 643 974	105 583 498
74	105 583 498	356.61	7086	2 526 898	861 268	1 665 630	103 917 868
75	103 917 868	357.78	7086	2 535 170	847 681	1 687 489	102 230 379
76	102 230 379	358.95	7086	2 543 470	833 916	1 709 554	100 520 826
77	100 520 826	360.13	7086	2 551 796	819 971	1 731 825	98 789 000
78	98 789 000	361.31	7086	2 560 150	805 844	1 754 306	97 034 694
79	97 034 694	362.49	7086	2 568 532	791 534	1 776 998	95 257 696

80	95 257 696	363.68	7086	2 576 940	777 039	1 799 902	93 457 794
81	93 457 794	364.87	7086	2 585 377	762 356	1 823 020	91 634 774
82	91 634 774	366.06	7086	2 593 840	747 486	1 846 355	89 788 419
83	89 788 419	367.26	7086	2 602 332	732 424	1 869 908	87 918 512
84	87 918 512	368.46	7086	2 610 851	717 171	1 893 680	86 024 831
85	86 024 831	369.67	7086	2 619 399	701 724	1 917 675	84 107 157
86	84 107 157	370.88	7086	2 627 974	686 081	1 941 893	82 165 264
87	82 165 264	372.09	7086	2 636 577	670 241	1 966 337	80 198 927
88	80 198 927	373.31	7086	2 645 209	654 201	1 991 008	78 207 919
89	78 207 919	374.53	7086	2 653 868	637 960	2 015 909	76 192 011
90	76 192 011	375.76	7086	2 662 556	621 515	2 041 041	74 150 970
91	74 150 970	376.99	7086	2 671 273	604 866	2 066 407	72 084 563
92	72 084 563	378.22	7086	2 680 018	588 010	2 092 008	69 992 555
93	69 992 555	379.46	7086	2 688 792	570 945	2 117 847	67 874 708
94	67 874 708	380.70	7086	2 697 594	553 669	2 143 925	65 730 783
95	65 730 783	381.95	7086	2 706 425	536 181	2 170 244	63 560 539
96	63 560 539	383.20	7086	2 715 285	518 478	2 196 808	61 363 731
97	61 363 731	384.45	7086	2 724 175	500 558	2 223 617	59 140 114
98	59 140 114	385.71	7086	2 733 093	482 419	2 250 674	56 889 441
99	56 889 441	386.98	7086	2 742 040	464 060	2 277 980	54 611 461
100	54 611 461	388.24	7086	2 751 017	445 478	2 305 539	52 305 922
101	52 305 922	389.51	7086	2 760 023	426 671	2 333 352	49 972 570
102	49 972 570	390.79	7086	2 769 059	407 638	2 361 421	47 611 148
103	47 611 148	392.07	7086	2 778 124	388 375	2 389 749	45 221 400
104	45 221 400	393.35	7086	2 787 219	368 881	2 418 338	42 803 062
105	42 803 062	394.64	7086	2 796 343	349 154	2 447 189	40 355 873
106	40 355 873	395.93	7086	2 805 498	329 192	2 476 306	37 879 567
107	37 879 567	397.23	7086	2 814 682	308 992	2 505 690	35 373 877
108	35 373 877	398.53	7086	2 823 897	288 553	2 535 344	32 838 533
109	32 838 533	399.83	7086	2 833 142	267 871	2 565 270	30 273 262
110	30 273 262	401.14	7086	2 842 417	246 946	2 595 471	27 677 792
111	27 677 792	402.45	7086	2 851 722	225 774	2 625 948	25 051 844
112	25 051 844	403.77	7086	2 861 058	204 354	2 656 704	22 395 140
113	22 395 140	405.09	7086	2 870 424	182 682	2 687 742	19 707 398
114	19 707 398	406.42	7086	2 879 821	160 758	2 719 063	16 988 335
115	16 988 335	407.75	7086	2 889 249	138 578	2 750 671	14 237 663
116	14 237 663	409.09	7086	2 898 707	116 140	2 782 568	11 455 096
117	11 455 096	410.42	7086	2 908 197	93 442	2 814 755	8 640 340
118	8 640 340	411.77	7086	2 917 718	70 481	2 847 237	5 793 104
119	5 793 104	413.12	7086	2 927 270	47 256	2 880 014	2 913 090
120	2 913 090	414.47	7086	2 936 853	23 763	2 913 090	0

La tabla anterior es la proyección de un préstamo en UVR con una proyección de la tasa de inflación máxima que hace el Banco de la República. Sin embargo, una vez que empieza a ejecutarse la negociación se usarán las tasas de inflación reales que generalmente cambian de período a período tal como lo informa el DANE. Así las cosas, en la siguiente tabla se muestra la ejecución real de 10 meses, del mismo ejemplo, pero con tasas de inflación que van cambiando de mes a mes.

	Saldo inicial	IPC mensual	Valor UVR	Cuota UVR	Cuota en $	Interés en $	Abono a capital	Saldo final
1	180 000 000	0.72 %	282.02	7086	1 998 365	2 178 467	– 180 102	180 180 102
2	179 477 773	0.96 %	284.72	7086	2 017 550	2 604 990	– 587 441	180 065 214
3	178 944 769	0.35 %	285.72	7086	2 024 611	1 500 378	524 233	178 420 536
4	178 400 880	1.14 %	288.98	7086	2 047 692	2 912 045	– 864 353	179 265 233
5	177 845 995	0.53 %	290.51	7086	2 058 544	1 812 846	245 698	177 600 297
6	177 280 003	0.10 %	290.80	7086	2 060 603	1 041 062	1 019 541	176 260 462
7	176 702 792	0.30 %	291.67	7086	2 066 785	1 392 798	673 986	176 028 806
8	176 114 249	0.45 %	292.98	7086	2 076 085	1 653 617	422 469	175 691 780
9	175 514 259	0.19 %	293.54	7086	2 080 030	1 189 425	890 605	174 623 654
10	174 902 708	0.60 %	295.30	7086	2 092 510	1 905 872	186 638	174 716 070

Taller de aplicación

Series uniformes

1) Calcule el valor presente y el valor futuro de 10 pagos trimestrales iguales de $500 000 con las siguientes condiciones:

a) Vencidos.

b) Anticipados.

c) Diferidos (período de gracia, 5 trimestres; es decir, el primer pago en el final del período 6).

Tasa de interés 3 % trimestral.

2) Calcule el valor de contado de un activo por el cual se paga una cuota inicial del 25 % y 18 cuotas mensuales de $600 000 a una tasa del 1.6 % mensual.

3) Se negocia una deuda al 1.2 % mensual por valor de $20 000 000 que se va a cancelar en 24 pagos mensuales iguales de $964 041. Una vez pagada la quinta cuota el deudor empieza a incumplir con los pagos. Si al finalizar el noveno mes se quiere poner al día de las cuotas pendientes, ¿cuánto deberá pagar? (Use la misma tasa de interés remuneratorio para interés moratorio).

4) Se negocia una deuda al 1.2 % mensual por valor de $20 000 000 que se va a cancelar en 24 pagos mensuales iguales de $964 041. Una vez pagada la décima cuota el deudor decide cancelar la totalidad del saldo. ¿Qué suma debe pagar?

5) Una máquina tiene un costo de $4 800 000 de contado; sin embargo, se planea cancelar por medio de 12 pagos mensuales fijos de $335 723 y, adicionalmente, dos pagos extraordinarios por el mismo valor en los meses 6 y 12. Determine el valor de los pagos extras si la tasa de interés es del 18 % capitalizable mensualmente.

6) Una obligación se paga mediante una cuota inicial del 20 %, 10 pagos iguales de $803 895 que se hacen a partir del mes 6 y un pago extra por $1 000 000 al final del plazo. ¿Cuál es el valor presente de la obligación? (Tasa de interés del 21 % EA).

7) Se abre una cuenta de ahorros con $750 000; al final del tercer mes se depositan $500 000; a partir del quinto mes se inicia una serie de 10 depósitos mensuales programados de $250 000. ¿Qué saldo puede retirar el ahorrador al final del mes 15 si se le reconoce una tasa de interés del 0.6 % mensual?

8) Un cliente tiene una deuda pendiente con la empresa ***Comercial*** por valor de $3 859 000. Hace un compromiso con la empresa para consignar $320 000 mensuales. Si la tasa de interés es del 1.1 % mensual, ¿en cuánto tiempo terminará de saldar la deuda?

9) Una empresa adquiere un préstamo con un banco para ampliación de su planta, por valor de $200 000 000 los cuales pagará en cuotas semestrales de $31 164 018 durante 5 años a una tasa del 18 % capitalizable semestralmente. Una vez pagada la cuarta cuota decide negociar la deuda con otro banco, el cual le permite pagarla en 36 cuotas mensuales al 1.3 % mensual. Halle el valor de la nueva cuota.

10) Halle el valor de mercado de un bono cuyo valor nominal es $100 000 000 y paga intereses del 4 % semestralmente sobre ese valor. El bono tiene vencimiento en 5 años y la tasa actual del mercado es del 10 %, liquidada por semestre vencido. (El precio de mercado del bono equivale al valor presente de los flujos de caja futuro descontados a la tasa de mercado).

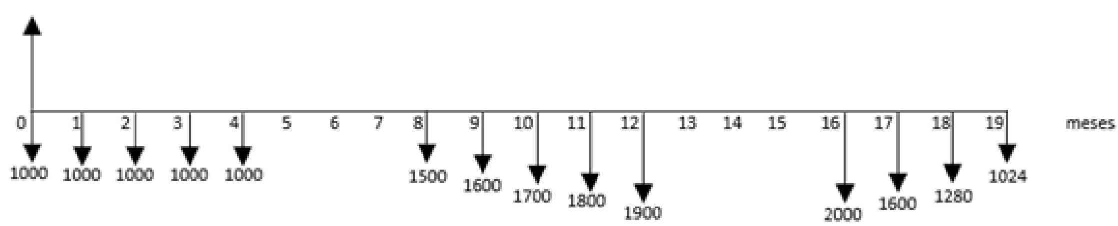
Series variables

1) Calcule el valor presente de una serie de pagos trimestrales que disminuye en $13 500 cada trimestre con un primer pago de $325 000 y por 18 meses, a una tasa de interés del 15 % capitalizable bimestralmente.

2) Halle el valor presente de la serie representada en el gráfico a partir de una tasa del 1 % mensual.

Figura 56.

Flujo de caja 26



3) Una serie de pagos por trimestre vencido de $1 100 000, $1 200 000, $1 300 000 y así, sucesivamente, durante tres años, se va a reemplazar por otra serie equivalente por el mismo tiempo, pero en este caso son pagos mensuales que aumentan en el 5 % cada mes. Halle el valor de esta nueva serie. Use una tasa del 4 % trimestral.

4) Una vivienda se cancela en un plazo de 10 años de la siguiente manera: se inicia con 18 cuotas mensuales iguales de $430 000; a partir de ese momento las cuotas empiezan a crecer $40 000 cada mes hasta terminar el año tres; a partir del cuarto año las cuotas empiezan a crecer un 4 % mensual hasta terminar el año 6; desde al año 7 en adelante y hasta terminar el plazo paga una anualidad de $650 000; al finalizar el año 8 paga una cuota extra de $5 000 000. Calcule el valor actual de la vivienda si la tasa EA es del 16.5 %.

5) Para la compra de una propiedad se ofrecen dos formas de financiación:

a) 36 pagos mensuales iguales de $2 711 429.67.

b) 36 pagos mensuales que inician en $1 911 975.28 que crecen en 2 % cada período.

Tasa de interés es del 1.5 % mensual. ¿Cuál plan de pagos le conviene más al comprador?

Sistemas de amortización en Excel

1) Una deuda de $76 000 000 se va a cancelar con 36 cuotas bimestrales fijas de ***abono a capital*** a una tasa de interés del 18 % bimestre vencido. Calcule el valor de las cuotas bimestrales y construya la tabla de amortización.

2) Una deuda de $10 000 000 a una tasa del 2 % mensual se propone pagar con 30 cuotas mensuales que decrecen $10 000 cada período. Calcule el valor de las cuotas y diseñe la tabla de amortización.

3) Construya la tabla de amortización para un crédito de $12 000 000 financiado a una tasa del 1.5 % mensual y con 18 pagos mensuales que crecen en 2 %, periódicamente.

4) Una deuda va a ser cancelada así: 15 % cuota inicial, un pago de $3 000 000 en el mes 3 y una serie de 5 pagos iguales de $2 000 000 que empiezan en el mes 6. Calcule el valor actual de la deuda si la tasa de interés es del 20 % nominal mes vencido.

5) Halle la primera cuota para cancelar una deuda de $100 000 000 con las siguientes condiciones:

Período de gracia: 3 períodos.

Número de cuotas: 12.

Cuota extraordinaria: pactada por $20 000 000 en el período 12.

Tasa efectiva del período: 10 %.

Característica de la cuota: creciente en un 5 %.

6) Para adquirir vivienda se tienen las siguientes alternativas (para todos los casos considere una tasa de interés del 1.2 % mensual):

- Iniciar con una cuota mensual de $650 000 durante 120 meses y la cuota aumentará el 1 % mensual.

- Iniciar con la misma cuota mensual, el mismo interés y el mismo plazo. La cuota solo aumentará cada año a razón del 7.5 %
- Cuota inicial de $13 000 000 y 120 cuotas fijas mensuales de $680 000 cada una.

  Construya los tres sistemas de amortización y compare.

7) Una vivienda se cancela en un plazo de 10 años, de la siguiente manera: se inicia con 18 cuotas mensuales iguales de $430 000; a partir de ese momento las cuotas empiezan a crecer $40 000 cada mes hasta terminar el tercer año; a partir del tercer año las cuotas empiezan a crecer un 4 % mensual hasta terminar el año 6; desde al año 7 en adelante, y hasta terminar el plazo, paga una anualidad de $650 000; al finalizar el año 8 paga una cuota extra de $5 000 000. Calcule el valor actual de la vivienda si la tasa EA es del 16.5 %.

8) Construya tres tablas de amortización para financiar una deuda de $20 000 000 en un plazo de 5 períodos, a una tasa periódica del 10 %. La primera bajo sistema francés, la segunda bajo sistema alemán y la tercera bajo sistema americano (consulte sobre este último).

9) Compare las tablas anteriores y enuncie una ventaja y una desventaja para cada uno de los sistemas anteriores.

10) Se otorga un préstamo hoy por valor de $12 000 000 que se va a cancelar en cuotas mensuales que disminuyen el 2 % cada mes hasta el final del primer año y de allí en adelante permanecen constantes hasta el final del segundo año; luego, empiezan a crecer el 1 % hasta el final del tercer año. La tasa de interés es del 1.6% mensual. Halle el valor de la primera cuota.

Autoevaluación

1) La diferencia entre gradiente lineal y gradiente geométrico es:

- **a)** El gradiente lineal aumenta en un porcentaje fijo y gradiente geométrico disminuye en un porcentaje fijo.
- **b)** El gradiente lineal aumenta o disminuye en una cantidad fija en pesos y el gradiente geométrico aumenta o disminuye en un porcentaje fijo.
- **c)** El gradiente lineal aumenta en una cantidad de dinero fijo y el gradiente geométrico disminuye en una cantidad de dinero fijo.
- **d)** El gradiente lineal se mantiene en una cuota fija cada período y el gradiente geométrico es creciente.

2) Si se realiza un crédito de $32 000 000 a 36 meses a una tasa del 12.02 % EA y se va a pagar en cuotas mensuales iguales, el valor de la cuota mensual es (elija el valor más aproximado):

- **a)** $2 666 600
- **b)** $1 053 700
- **c)** $1 044 600
- **d)** $896 900

3) Usted ahorra una cuota mensual de $180 000 durante 2 años a una tasa del 8.22 % EA. Al finalizar los dos años tendrá (elija el valor más aproximado):

a) $4 664 300

b) $4 653 500

c) $6 995 800

d) $7 552 000

4) Un crédito se va a pagar de la siguiente manera: cuotas trimestrales vencidas por 4 años a una tasa del 3.5 % trimestral; la primera cuota es de $600 000 y cada trimestre la cuota aumenta $12 000. El valor actual del crédito es (elija el valor más aproximado):

a) $9 954 000

b) $6 030 700

c) $6 145 000

d) $8 239 381

5) Una empresa paga un crédito en cuotas trimestrales (durante 4 años). La primera cuota es de $500 000 y cada trimestre la cuota aumenta un 1 % con respecto a la anterior. Si la tasa de interés es del 18 % nominal TV, el valor actual del crédito es (elija el valor más aproximado):

a) $6 793 600

b) $5 538 000

c) $6 002 800

d) $4 289 000

6) Una maquinaria tiene un costo de $36 000 000; se planea pagar en 6 años con cuotas mensuales iguales a una tasa del 1.5 % mensual. El valor de la cuota es (elija el valor más aproximado):

a) $609 000

b) $714 000

c) $914 000

d) $821 000

7) Para adquirir vivienda tengo las siguientes alternativas (para todos los casos considere una tasa de interés del 1.2 % mensual):

a) Iniciar con una cuota mensual de $650 000 durante 120 meses y la cuota aumentará el 1 % mensual.

b) Iniciar con la misma cuota mensual, el mismo interés y con el mismo plazo. La cuota solo aumentará cada año a razón del 7.5 %.

c) Cuota inicial de \$13 000 000 y 120 pagos fijos de \$680 000 cada uno.

La mejor opción para el adquirente del préstamo es:

La opción a.

La opción b.

La opción c.

Cualquiera de las tres opciones tiene el mismo resultado.

8) Una maquinaria es adquirida mediante el siguiente plan de pagos: cuota inicial de \$4 800 000 y 12 pagos mensuales fijos de \$1 115 695. Si se considera un interés del 1.2 % mensual, el valor de contado de la maquinaria es (elija el valor más aproximado):

a) \$12 400 000

b) \$13 388 000

c) \$17 200 000

d) \$18 188 000

UNIDAD 4

Evaluación de alternativas de inversión

Introducción

Las asignaciones de recursos con el objetivo de conseguir beneficios futuros son decisiones importantes y, por tanto, se debe hacer un estudio cuidadoso que aumente las posibilidades de éxito en la toma de decisiones. El inversionista busca recuperar los recursos y obtener beneficios adicionales para aumentar su riqueza; en esta unidad temática se presentan herramientas útiles que le permitirán analizar un negocio desde distintos ángulos para fundamentar una decisión; entre otras herramientas se analizarán el valor presente neto, la tasa interna de retorno y el costo anual uniforme equivalente.

Estas herramientas le permitirán determinar si los costos de un proyecto pueden ser cubiertos, cuál es la rentabilidad de un proyecto y, además, podrá comparar entre distintas alternativas de inversión.

Resultados de aprendizaje

- Determina los flujos de caja netos en situaciones de las alternativas de inversión de acuerdo con la naturaleza de los ingresos y los egresos.
- Plantea la ecuación que le permite hallar el VPN, TIR y CAUE.
- Halla el VPN de un proyecto de inversión tanto para flujos periódicos como no periódicos; asimismo, el CAUE y la TIR.
- Usa los criterios de decisión para aceptar o rechazar una operación de inversión o financiación de acuerdo con el VPN y la TIR.
- Usa las fórmulas financieras en Excel: VAN, TIR, TIR MODIFICADA, VAN NO PERIÓDICO y TIR NO PERIÓDICA para evaluar alternativas de inversión.

Acción problémica

Don Jaime ha recibido unos recursos y tiene la intención de invertirlos en la compra de una volqueta el 31 de mayo de 20X8. El valor de la volqueta es de $89 200 000, la matrícula y gastos de legalización de esta cuestan $3 500 000. Se proyecta recibir ingresos a partir del segundo mes por valor de $8 600 000 y cada año crecerán en un 10 %; se estima que los gastos de combustible y mantenimiento son de $3 500 000 mensuales con un aumento del 5 % cada año; el impuesto se estima en $1 250 000 por año, se paga en marzo y crece en $60 000 cada año; el seguro cuesta $3 600 000 y se paga en junio de cada año (también aumenta un 5 % por año). Finalizando el año 3 se estima un mantenimiento mayor que costará $12 000 000. La volqueta se venderá al final de los 5 años por $45 000 000. ¿Cuál es la tasa de rentabilidad anual de este negocio? ¿Cuál es el valor presente neto? ¿En qué fecha se recuperará la inversión?

Don Jaime también tenía la opción de comprar un taxi por $32 000 000 y el cupo por $45 000 000. Se estimaban unos ingresos mensuales, desde el primer mes, de $3 900 000 libres del pago del conductor (excepto la seguridad social) y del combustible. Estos ingresos crecerían en $300 000 cada año. La seguridad social del conductor es de $209 000 (crece en 6 % cada año) y estaría a cargo de don Jaime; los gastos de seguro e impuesto se pagan en junio y suman $1 250 000 (crecen 5 % cada año); los gastos de mantenimiento se estiman en $600 000 cada mes en promedio y crecen en 5 % cada año. Después de 5 años se estima que el taxi se puede vender en $20 000 000 y el cupo en $57 000 000. Determine si don Jaime hizo una buena elección al invertir en la volqueta o si le resultaba mejor negocio haber invertido en el taxi.

Tasa de oportunidad: 2 % mensual.

Conceptualización

Los métodos para evaluar alternativas de inversión son herramientas que permiten valorar la viabilidad de un negocio, es decir, permiten determinar si es aceptable invertir o no en el proyecto o en qué condiciones se podría hacer. Existen varias herramientas que se usan para este fin: valor presente neto, tasa interna de retorno, costo anual uniforme equivalente, período de recuperación, relación beneficio/costo y valor económico agregado, entre otros.

Herramientas de evaluación

Valor presente neto

El valor presente neto (VPN) es el valor que se obtiene como resultado de un negocio y que se expresa en precios de hoy (Gutiérrez Carmona, 2012). Matemáticamente, es el valor que resulta de deducir el valor presente de los egresos al valor presente de los ingresos en el momento cero. Esta comparación se puede realizar en cualquier fecha, pero generalmente se usa el momento cero.

$$VPN_{TD} = \sum \ VPI - \sum \ VPE$$

Para realizar esta operación se aplica una tasa de descuento cuya elección depende de la procedencia de los recursos:

- Cuando los recursos son propios puede pensarse, de manera ingenua, que estos no tienen costo, puesto que yo no me cobraría a mí mismo por el uso del dinero; no obstante, este es un costo oculto porque un inversionista racional no podría sus recursos en un negocio sin el ánimo de obtener alguna rentabilidad.

  Una alternativa adecuada para elegir la tasa de descuento cuando los recursos son propios es la tasa de oportunidad. La tasa de oportunidad es la que obtendría en otra alternativa de inversión; es esa tasa que estoy dejando de obtener en otro negocio por invertir en este. Existen otros modelos más complejos para calcular la tasa de fondos propios; es el caso del modelo CAPM, el cual declara que la rentabilidad esperada de un activo es una función lineal positiva de su riesgo sistemático o beta (Ramírez Hassan y Serna Rodríguez, 2012).

- Si los recursos provienen de préstamos de terceros es fácil identificar la tasa, pues sencillamente se elige la que le está cobrando la entidad financiera.
- Existe una tercera posibilidad: el costo promedio ponderado de capital o WACC por sus siglas en inglés (Weighted Average Cost of Capital); corresponde a un promedio ponderado entre el costo de los recursos propios y el costo de los recursos aportados por terceros. A continuación, se mostrará un ejemplo simple con el cual se puede entender este concepto.

Una empresa presenta la siguiente estructura financiera. Si la tasa de tributación es del 25 %, calcule el WACC.

Ilustración 3.

Estructura de capital

$$WACC = r_e k_e + r_d k_{d(1-T)}$$

$$WACC = 0.65 \times 0.18 + 0.35 \times 0.12(1 - 0.25)$$

$$WACC = 0.1485 = 14.85\ \%$$

r_e: *razón patrimonial = 65/100*
k_e: *costo del patrimonio = 0.18*
r_d: *razón de endeudamiento = 35/100*
k_e: *costo de la deuda = 0.12*
(1 – T): Beneficio tributario, donde T es la tasa de impuesto = 0.25

Una vez elegida la tasa de descuento, se puede calcular el VPN.

Ejemplo

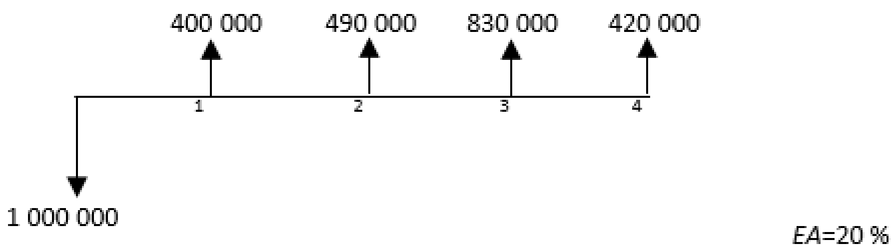
Un inversionista desembolsa $1 000 000 para iniciar un negocio. Se proyecta que el negocio le producirá ingresos durante el primer año por $600 000, el segundo $700 000, el tercero $1 050 000 y el cuarto $650 000. Los gastos de operación empiezan en $200 000 y se incrementan cada año en $10 000. Suponiendo una tasa de oportunidad del 20 % EA, calcule el VPN.

Período	Flujo de caja neto	Ingresos	Egresos
0	–1 000 000		
1	400 000	600 000	200 000
2	490 000	700 000	210 000
3	830 000	1 050 000	220 000
4	420 000	650 000	230 000

- Flujo de caja neto

Figura 57.

Flujo de caja 27



- Planteamiento de la ecuación en el momento cero

$$VPN = \frac{400\ 000}{(1+0.2)} + \frac{490\ 000}{(1+0.2)^2} + \frac{830\ 000}{(1+0.2)^3} + \frac{420\ 000}{(1+0.2)^4} - 1\ 000\ 000$$

$$VPN = 356\ 481$$

- Análisis

  Los $356 481 no son lo que el inversionista se ganó, son el remanente o valor adicional que el inversionista tuvo después de obtener la rentabilidad mínima del 20 %. En este sentido, es importante establecer unos criterios de decisión:

lustración 4.

Criterios de decisión VPN

VPN > 0: el negocio arroja un valor superior al exigido por el inversionista y, por tanto, se debería aceptar el negocio.

VPN = 0: el negocio arroja un valor igual al exigido por el inversionista y, por tanto, es indiferente la decisión que tome el inversionista (desde el punto de vista de la rentabilidad).

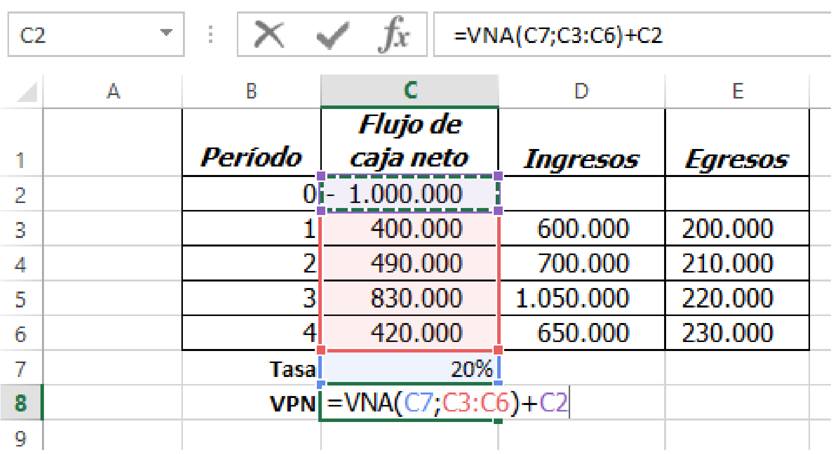
VPN < 0: el negocio arroja un valor inferior al exigido por el inversionista y, por tanto, se debería rechazar el negocio.

Por lo anterior, para el ejemplo en cuestión, al inversionista le conviene aceptar el negocio ya que su VPN es $*356 481*, que es un valor mayor que cero.

Esta operación se puede realizar fácilmente en la hoja de cálculo, que resulta de gran apoyo cuando se trata de operaciones con gran cantidad de flujos de caja. Se debe hacer un listado período a período de los flujos de caja netos; si en algún período no existiera flujo de caja, se debe llenar la casilla con un cero, los valores de los ingresos van positivos y los valores de los egresos van negativos; después, se usa la fórmula financiera VNA (valor neto actual); a esta se puede acceder por el botón de funciones o se puede digitar manualmente como aparece en la imagen =VNA (celda de la tasa; celdas de los valores desde el período uno hasta el último). El valor del momento cero no se debe introducir en la fórmula VNA, debe restarse al final después de cerrado el paréntesis para que quede por fuera de la fórmula del VNA; como es un egreso el valor aparece negativo, por lo cual se digita el signo + para que realice la resta.

Figura 58.

Hoja de cálculo 24


C2 | =VNA(C7;C3:C6)+C2

	A	B	C	D	E
1		*Período*	*Flujo de caja neto*	*Ingresos*	*Egresos*
2		0	- 1.000.000		
3		1	400.000	600.000	200.000
4		2	490.000	700.000	210.000
5		3	830.000	1.050.000	220.000
6		4	420.000	650.000	230.000
7		Tasa	20%		
8		VPN	=VNA(C7;C3:C6)+C2		
9					

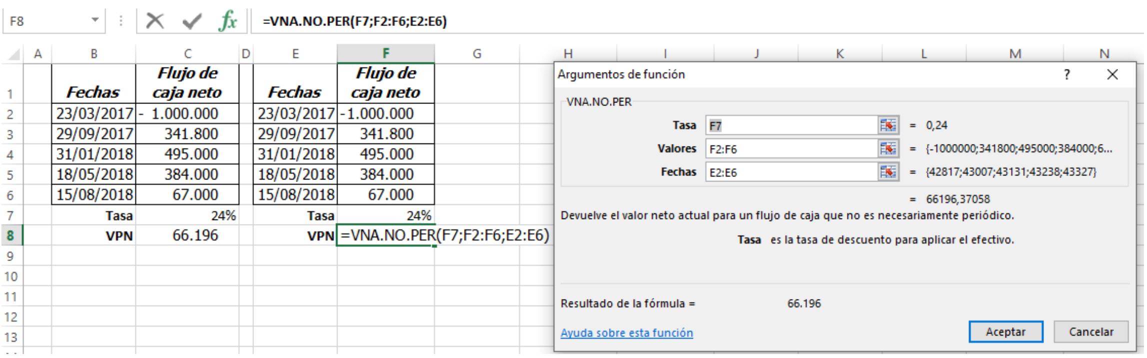
Esta fórmula se puede usar para períodos anuales, trimestrales, mensuales, etc. La tasa aplicada debe corresponder con el período: si los períodos son trimestrales la tasa debe ser trimestral. Cuando los flujos de caja no corresponden a períodos específicos, sino que pueden estar ubicados en cualquier fecha, la hoja de cálculo también ofrece una posibilidad para VNA no periódico; por ejemplo, el 23 de marzo de 20X7 se invierte $1 000 000 y se reciben flujos de caja netos, así:

29 de septiembre de 20X7	$341 800
31 de enero de 20X8	$495 000
18 de mayo de 20X8	$384 000
15 de agosto de 20X8	$67 000

Con esta herramienta se debe introducir una tasa efectiva anual; en este caso se asumirá una tasa del 24 % EA.

Figura 59.

Hoja de cálculo 25



Se observa que, con esta fórmula, se pueden seleccionar todos los valores desde la inversión inicial; luego, se seleccionan todas las fechas, incluida la inicial.

El valor presente neto es una herramienta que reconoce el valor del dinero en el tiempo de todos los flujos de caja involucrados en un proyecto; no obstante, se debe tener cuidado con la elección de la tasa de descuento porque es sensible a esta información, que es de naturaleza externa.

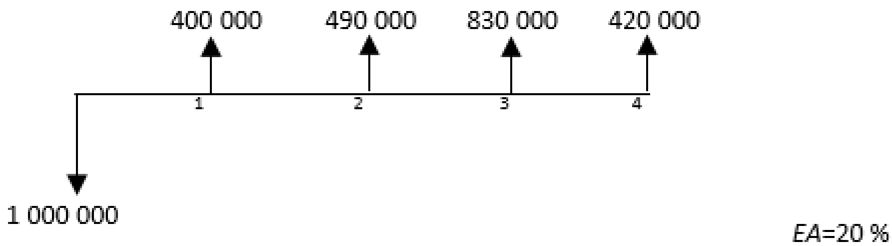
Tasa interna de retorno

Expresado relativamente, la tasa interna de retorno (TIR) mide el retorno de los ingresos y los egresos producidos por una inversión. Matemáticamente, se dice que es la tasa que hace que valor presente neto sea igual a cero o la tasa que hace equivalente el valor presente de los ingresos con el valor presente de los egresos.

A diferencia del VPN, para calcular la TIR no se depende de datos externos. Para calcularla no se tiene una fórmula determinada, simplemente se usa una interpolación lineal o, de una manera más sencilla, se puede obtener en una hoja de cálculo. Por el método de interpolación lineal se hacen tanteos en la fórmula de VPN hasta obtener un VPN negativo y un VPN positivo, lo cual permitirá hacer la interpolación (efectivamente, la hoja de cálculo lo que ejecuta es una serie de tanteos dinámicos). El valor encontrado por medio de una interpolación lineal resulta ser un valor aproximado mas no exacto, puesto que se usa un modelo lineal para una situación que tiene comportamiento geométrico. Si se toma el ejemplo usado para explicar el VPN, se tiene:

Figura 60.

Flujo de caja 28



- VPN con tasa del 20 %

$$VPN = \frac{400\,000}{(1+0.2)} + \frac{490\,000}{(1+0.2)^2} + \frac{830\,000}{(1+0.2)^3} + \frac{420\,000}{(1+0.2)^4} - 1\,000\,000 = 356\,481$$

Ahora se intentará conseguir un VPN negativo; por tanto, se elegirá una tasa más alta, ya que el valor presente actúa de manera inversa a la tasa, es decir, entre más alta la tasa, menor será el VPN.

- VPN con tasa del 30 %

$$VPN = \frac{400\,000}{(1+0.3)} + \frac{490\,000}{(1+0.3)^2} + \frac{830\,000}{(1+0.3)^3} + \frac{420\,000}{(1+0.3)^4} - 1\,000\,000 = 122\,475$$

- VPN con tasa del 40 %

$$VPN = \frac{400\,000}{(1+0.4)} + \frac{490\,000}{(1+0.4)^2} + \frac{830\,000}{(1+0.4)^3} + \frac{420\,000}{(1+0.4)^4} - 1\,000\,000 = -52\,428$$

Entre más cercanos estén los valores al cero mayor será el nivel de precisión; por ende, se tratará de hallar valores más cercanos al cero:

- VPN con tasa del 35 %

$$VPN = \frac{400\ 000}{(1+0.35)} + \frac{490\ 000}{(1+0.35)^2} + \frac{830\ 000}{(1+0.35)^3} + \frac{420\ 000}{(1+0.35)^4} - 1\ 000\ 000 = 28\ 953$$

- VPN con tasa del 38 %

$$VPN = \frac{400\ 000}{(1+0.38)} + \frac{490\ 000}{(1+0.38)^2} + \frac{830\ 000}{(1+0.38)^3} + \frac{420\ 000}{(1+0.38)^4} - 1\ 000\ 000 = -21\ 219$$

Con estos dos valores se hará la interpolación lineal:

Porcentaje	**Pesos**
3 %	50 172
x	28 953

Una distancia de 3 % *(38 % – 35 %)* representa una distancia absoluta en pesos de $50 172 *(|28 953| + |–21 219|)*; en algún punto intermedio entre $28 953 y -$21 219 se encuentra un VPN igual a cero. Se buscará la tasa que corresponde a ese punto; esa tasa es la TIR.

$$x = \frac{3\ \% \times 28\ 953}{50\ 172} = 1.73\ \%$$

Para el valor de $28 953 la tasa correspondiente es el 35 %; luego, la tasa total es:

$$TIR = 35\ \% + 1.73\ \% = 36.73\ \%$$

- Análisis

La TIR del negocio es superior a la tasa de descuento (en este caso, tasa de oportunidad); por tanto, el inversionista debería aceptar el negocio.

Ilustración 5.

Criterios de decisión TIR

TIR > TD: el rendimiento del negocio es superior al exigido por el inversionista y, por tanto, se debería aceptar el negocio.

TIR = TD: el rendimiento del negocio es igual al exigido por el inversionista y, por tanto, es indiferente la decisión que tome el inversionista (desde el punto de vista de la rentabilidad).

TIR < TD: el rendimiento del negocio es inferior al exigido por el inversionista y, por tanto, se debería rechazar el negocio.

Por lo anterior, al inversionista del ejemplo anterior le conviene aceptar el negocio, ya que la TIR es de *36.73 %*, que resulta ser más alta que la tasa de oportunidad que él pedía (20 %).

Ejemplo

Una propiedad raíz tiene un costo de $64 000 000; se estima que después de 8 años se puede vender en $102 400 000. El comisionista cobra 6 % de comisión al vendedor, los gastos de traspaso son de 2.7 por mil del valor del inmueble y se dividen en partes iguales entre comprador y vendedor. El comprador paga el 5 por mil de impuesto de registro. El impuesto predial es de $336 000 por año y se estima que aumente el 4 % cada año. En el primer año se prevé un ingreso por arrendamiento de $4 950 000 y cada año aumenta el 5 %. Calcule la tasa de rendimiento de la inversión por medio de interpolación lineal.

Flujos de caja

	Año 0	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5	Año 6	Año 7	Año 8
Inversión inicial	– 64 000 000								
Impuesto de registro	– 320 000								

Impuesto predial		– 336 000	– 349 440	– 363 418	– 377 954	– 393 072	– 408 795	– 425 147	– 442 153
Costo de traspaso									– 138 240
Costo comisiones de venta									– 6 144 000
Valor de venta									102 400 000
Ingresos arrendamiento		4 950 000	5 197 500	5 457 375	5 730 244	6 016 756	6 317 594	6 633 473	6 965 147
FLUJO NETO DE CAJA	**– 64 320 000**	**4 614 000**	**4 848 060**	**5 093 957**	**5 352 289**	**5 623 683**	**5 908 798**	**6 208 326**	**102 640 754**

Ecuación

$$\frac{102\ 640\ 754}{(1+TIR)^8}+\frac{6\ 208\ 326}{(1+TIR)^7}+\frac{5\ 908\ 798}{(1+TIR)^6}+\frac{5\ 623\ 683}{(1+TIR)^5}+\frac{5\ 352\ 289}{(1+TIR)^4}+\frac{5\ 093\ 957}{(1+TIR)^3}+\frac{4\ 848\ 060}{(1+TIR)^2}+\frac{4\ 614\ 000}{(1+TIR)}-64\ 320\ 000=0$$

Tanteo

Se reemplaza la TIR en la ecuación por valores tentativos. Se elige inicialmente el 16 % y el VPN es negativo; luego, se debe disminuir la tasa para obtener un VPN positivo:

Tasa	VPN
16 %	–11 912 549
14 %	– 5 589 487
12 %	1 139 562
13 %	– 2 488 382

Interpolación

Se elige un valor positivo y uno negativo (los valores más cercanos, 12 % y 13 %). Se plantea y resuelve la regla de tres simple.

Distancia en pesos	3 627 945	1 139 562
Distancia porcentual	1 %	x

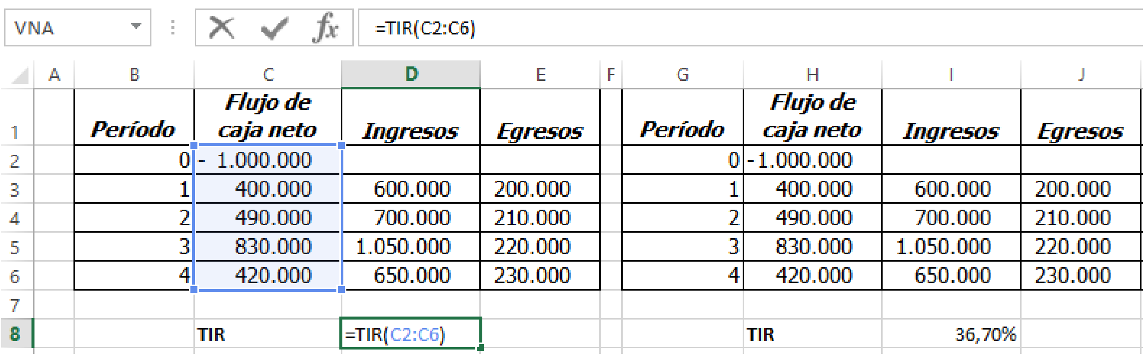
$$X = \frac{1\ \% \times 1\ 139\ 562}{3\ 627\ 945} \approx 0.31\ \%$$

$$TIR = 12\ \% + 0.31\ \% = 12.31\ \%$$

Para encontrar la TIR en la hoja de cálculo se debe hacer un listado período a período de los flujos de caja netos; si en algún período no existiera flujo de caja se debe llenar la casilla con un cero, los valores de los ingresos van positivos y los valores de los egresos van negativos; después, se usa la fórmula financiera TIR a la que se puede acceder por el botón de funciones o se puede digitar manualmente como aparece en la imagen =TIR (celdas de los valores desde el período cero hasta el último).

Figura 61.

Hoja de cálculo 26


VNA =TIR(C2:C6)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		*Período*	*Flujo de caja neto*	*Ingresos*	*Egresos*		*Período*	*Flujo de caja neto*	*Ingresos*	*Egresos*
2		0	- 1.000.000				0	-1.000.000		
3		1	400.000	600.000	200.000		1	400.000	600.000	200.000
4		2	490.000	700.000	210.000		2	490.000	700.000	210.000
5		3	830.000	1.050.000	220.000		3	830.000	1.050.000	220.000
6		4	420.000	650.000	230.000		4	420.000	650.000	230.000
7										
8			TIR	=TIR(C2:C6)				TIR	36,70%	

Como se puede observar, la tasa hallada por interpolación lineal es aproximada a esta. La tasa hallada corresponde al período usado en los flujos de caja; en este caso, como los flujos de caja son anuales, la tasa del 36.7 % es una tasa efectiva anual. Si los períodos fueran mensuales, la tasa hallada sería mensual y así, sucesivamente. De la misma forma que en el VPN, se puede hallar la TIR para negocios donde los flujos de caja no son periódicos. Usando el mismo ejemplo de VPN no periódico, se hallará la TIR no periódica.

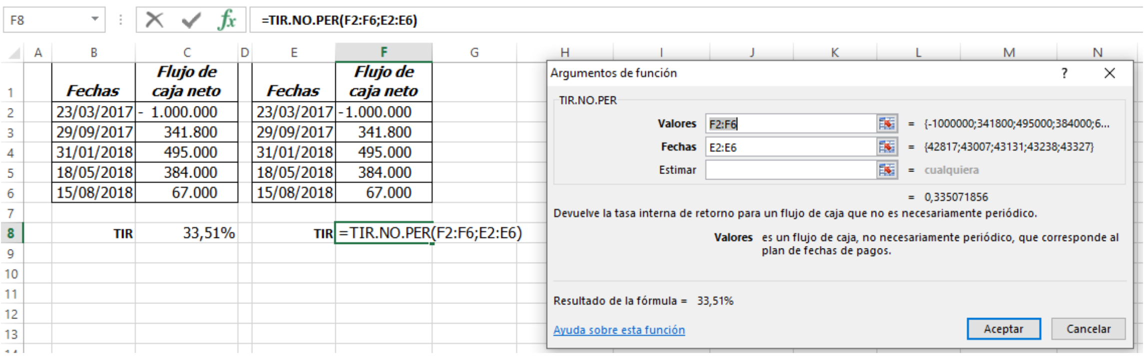
Ejemplo

El 23 de marzo de 20X7 se invierte $1 000 000 y se reciben flujos de caja netos así:

29 de septiembre de 20X7	$341 800
31 de enero de 20X8	$495 000
18 de mayo de 20X8	$384 000
15 de agosto de 20X8	$67 000

Figura 62.

Hoja de cálculo 27



La tasa interna de retorno no depende de datos externos, pero tiene una limitación cuando supone que los fondos que libera un proyecto pueden ser reinvertidos a la misma tasa. También se debe tener cuidado en el momento de comparar dos proyectos, pues este cálculo no muestra el tamaño de los proyectos.

Tasa verdadera de rentabilidad (TVR)

Es la misma TIR modificada. Es la tasa de rendimiento de una inversión, teniendo en cuenta que los flujos de caja recibidos se invertirán a otro tipo de tasa y costo que requiere el proyecto durante su vida. El método consiste en llevar a valor presente los flujos de caja netos negativos (egresos), llevar a valor futuro los flujos de caja netos positivos (ingresos) y aplicar la siguiente fórmula:

$$TVR = \left(\frac{VF\ ingresos}{VP\ egresos}\right)^{1/n} - 1$$

Esta fórmula es la misma que se usa para encontrar la tasa en interés compuesto con pagos únicos. Esto es lo que precisamente se busca en la TVR: reducir los flujos de caja a dos valores, un valor presente y un valor futuro (Gutiérrez Carmona, 2012). Apoyados en el autor, estos se deben hallar así:

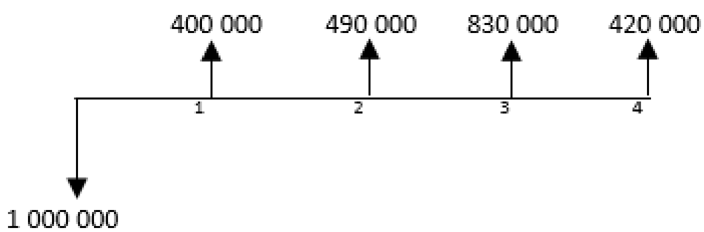
- ***Valor futuro de los ingresos:*** como los ingresos que va liberando el proyecto pueden ser reinvertidos, se busca una tasa de oportunidad para trasladar estos flujos de caja al futuro.
- ***Valor presente de los egresos:*** estos tienen un costo de financiación; por tanto, los egresos que va requiriendo el proyecto se descuentan a una tasa que refleje la tasa a la que rinden normalmente los depósitos de la empresa, pues al efectuar los egresos la empresa deja de obtener los rendimientos que generaban sus depósitos.

A continuación, se aplicará esta metodología al ejercicio que se ha venido desarrollando en esta unidad temática.

Período	Flujo neto de caja	Ingresos	Egresos
0	–1 000 000		
1	400 000	600 000	200 000
2	490 000	700 000	210 000
3	830 000	1 050 000	220 000
4	420 000	650 000	230 000

Figura 63.

Flujo de caja 29



Período	Ingresos	Egresos	Flujo neto de caja	Valor Futuro	Valor Presente
0			– 1 000 000		– 1 000 000
1	600 000	– 200 000	400 000	762 650	
2	700 000	– 210 000	490 000	753 424	
3	1 050 000	– 220 000	830 000	1 029 200	
4	650 000	– 230 000	420 000	420 000	
Tasa de reinversión		24 %		2 965 274	– 1 000 000
Tasa de financiación		18 %			

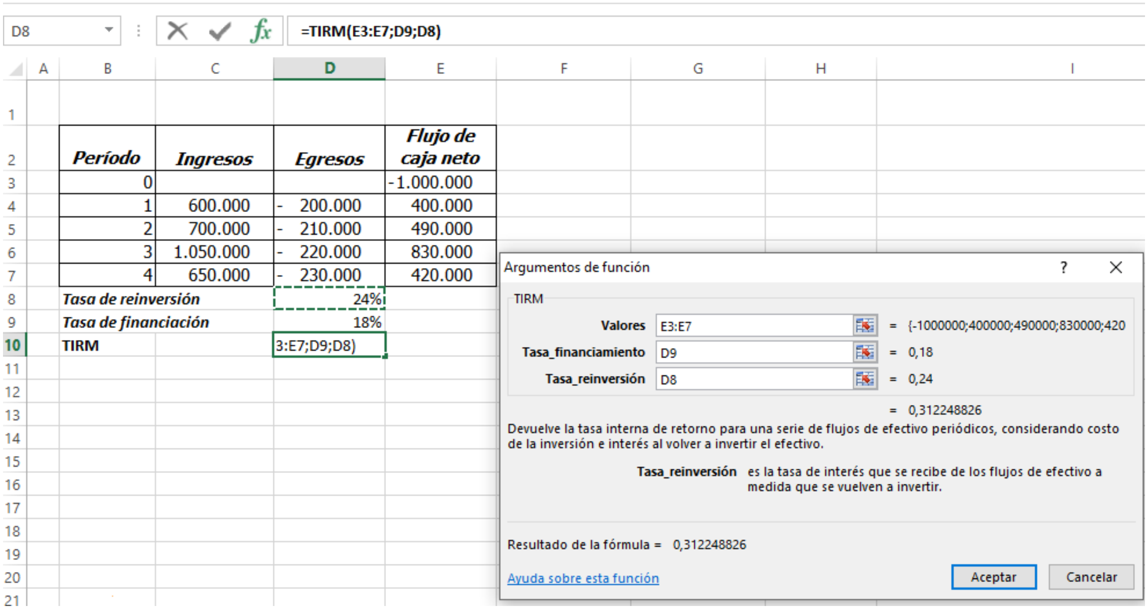
$$TVR = \left(\frac{2\,965\,274}{1\,000\,000}\right)^{1/4} - 1 = 31.22\ \%$$

Se puede notar una leve disminución con respecto al cálculo de la TIR plena, la cual es 36.7 %. Quiere decir que, si el inversionista no puede reinvertir sus flujos de caja en el mismo negocio, sino en un negocio que le renta el 24 %, la TIR ya no será del 36.7 %, sino que se disminuirá al 31.22 %. En este ejercicio, la tasa de financiación no produce ningún efecto, puesto que el único flujo de caja neto negativo es el del momento cero que, por estar ya en el presente, no se descuenta.

Este cálculo también se puede realizar de manera sencilla en la hoja de cálculo:

Figura 64.

Hoja de cálculo 28



Los valores son el flujo de caja neto. Se eligen la tasa de financiamiento y la de reinversión y ACEPTAR.

Costo anual uniforme equivalente

Es un método que convierte todos los ingresos y egresos en una serie de pagos constantes. Si los ingresos son mayores que los egresos el resultado es positivo, lo cual indica que el proyecto es viable desde el punto de vista financiero; de lo contrario, si los ingresos son menores que los egresos el proyecto debe ser rechazado. Matemáticamente, es la anualidad equivalente al valor presente neto del negocio.

$$VPN = VPI - VPE, \text{ luego:}$$

$$CAUE = VPN\left[\frac{i}{(1-(1+i)^{-n})}\right]$$

Este método es utilizado, generalmente, para cotejar proyectos con diferentes vidas útiles o para evaluar proyectos que implican solamente salidas (Gutiérrez Carmona, 2012).

Ejemplo

Un inversionista tiene las siguientes alternativas de inversión. Halle CAUE si la tasa de oportunidad es del 10 %.

	Inversión inicial	Ingresos		
		Año 1	Año 2	Año 2
Alternativa A	50 000 000	13 000 000	28 000 000	35 000 000
Alternativa B	45 000 000	10 000 000	7 000 000	58 000 000

Alternativa A

$$VPN = 13\,000\,000(1 + 10\,\%)^{-1} + 28\,000\,000(1 + 10\,\%)^{-2}$$
$$+ 35\,000\,000(1 + 10\,\%)^{-3} - 50\,000\,000$$
$$VPN = 10\,231\,542$$
$$CAUE = 10\,231\,542\left[\frac{10\,\%}{(1-(1+10\,\%)^{-3})}\right]$$
$$CAUE = 4\,114\,254$$

Alternativa B

$$VPN = 10\,000\,000(1 + 10\,\%)^{-1} + 7\,000\,000(1 + 10\,\%)^{-2}$$
$$+ 58\,000\,000(1 + 10\,\%)^{-3} - 45\,000\,000$$
$$VPN = 12\,229\,356$$
$$CAUE = 12\,229\,356\left[\frac{10\,\%}{(1-(1+10\,\%)^{-3})}\right]$$
$$CAUE = 4\,917\,605$$

Los dos negocios convienen, puesto que los VPN son mayores que cero. Sin embargo, en este caso resulta ser mejor alternativa la B por tener un VPN más alto.

Es importante aclarar que no siempre el proyecto que tiene un VPN más alto es el que más conviene, puesto que lo más normal es que un proyecto a mayor plazo tenga un VPN más alto y, sin embargo, no se puede concluir que es el más conveniente. Por lo cual, en proyectos que tienen diferentes horizontes de tiempo resulta útil hacer el análisis a partir del CAUE. A continuación, se explica con un ejemplo.

Ejemplo

Se tienen dos proyectos de inversión con vidas útiles diferentes que prometen los siguientes flujos de caja:

	Inversión inicial	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5	Año 6
Proyecto A	– 1000	500	380	400	600		
Proyecto B	– 1000	500	380	400	200	180	400

Al calcular el VPN se tiene:

Proyecto A	201.39
Proyecto B	214.78

Si solo tuviéramos en cuenta el VPN, el razonamiento nos conduciría a pensar que es mejor inversión el proyecto B. No obstante, es lógico que el proyecto B tenga un mayor VPN dado que tiene un horizonte de tiempo mayor, por lo cual es necesario que incluyamos en el análisis el CAUE. De esta manera se tiene:

	VPN	**CAUE**
Proyecto A	201.39	77.79
Proyecto B	214.78	64.59

Con lo cual se observa que resulta más rentable el proyecto A.

Ejemplo

Para el siguiente ejercicio se pide evaluar la inversión con los métodos vistos.

Una máquina cuesta $5 400 000, tiene una vida útil de 5 años y un valor residual de $1 000 000; se estima que el costo anual de operación es de alrededor de $450 000, que crecen en $100 000 cada año y se calcula que originará ingresos de alrededor de $2 000 000 el primer año y crecen un 5 % en los años subsiguientes. Determine si la compra de la máquina es aconsejable para los inversionistas quienes tienen tasas de oportunidad diferentes:

a) Inversionista A: 20 %

b) Inversionista B: 12 %

Flujos de caja netos

	Ingresos	Egresos	FC Neto
0		– 5 400 000	– 5 400 000
1	2 000 000	– 450 000	1 550 000
2	2 100 000	– 550 000	1 550 000
3	2 205 000	– 650 000	1 555 000
4	2 315 250	– 750 000	1 565 250
5	3 431 013	– 850 000	2 581 013

Valor presente neto

- ***Inversionista A***

$$VPN = \frac{1\,550\,000}{(1+0.2)} + \frac{1\,550\,000}{(1+0.2)^2} + \frac{1\,555\,000}{(1+0.2)^3} + \frac{1\,565\,000}{(1+0.2)^4} + \frac{2\,581\,013}{(1+0.2)^4} - 5\,400\,000$$

$$VPN = -339\,963$$

- ***Inversionista B***

$$VPN = \frac{1\,550\,000}{(1+0.12)} + \frac{1\,550\,000}{(1+0.12)^2} + \frac{1\,555\,000}{(1+0.12)^3} + \frac{1\,565\,000}{(1+0.12)^4} + \frac{2\,581\,013}{(1+0.12)^4} - 5\,400\,000$$

$$VPN = 785\,678$$

Tasa interna de retorno

- ***Con una tasa del 18 %***

$$VPN = \frac{1\,550\,000}{(1+0.18)} + \frac{1\,550\,000}{(1+0.18)^2} + \frac{1\,555\,000}{(1+0.18)^3} + \frac{1\,565\,000}{(1+0.18)^4} + \frac{2\,581\,013}{(1+0.18)^4} - 5\,400\,000$$

$$VPN = -91\,311$$

- ***Con una tasa del 16 %***

$$VPN = \frac{1\,550\,000}{(1+0.16)} + \frac{1\,550\,000}{(1+0.16)^2} + \frac{1\,555\,000}{(1+0.16)^3} + \frac{1\,565\,000}{(1+0.16)^4} + \frac{2\,581\,013}{(1+0.16)^4} - 5\,400\,000$$

$$VPN = 117\,659$$

- ***Interpolación***

Porcentaje	Pesos
2 %	268 970
x	177 659

$$x = \frac{2\ \% \times 177\ 659}{268\ 970} = 1.32\ \%$$

$$TIR = 16\ \% + 1.32\ \% = 17.32\ \%$$

- Suponiendo una tasa de reinversión y financiación del 12 %, se hallará la tasa verdadera de rentabilidad.

	Ingresos	Egresos	FC Neto	VF	VP
0		– 5 400 000	– 5 400 000		– 5 400 000
1	2 000 000	– 450 000	1 550 000	2 438 995	
2	2 100 000	– 550 000	1 550 000	2 177 638	
3	2 205 000	– 650 000	1 555 000	1 950 592	
4	2 315 250	– 750 000	1 565 250	1 753 080	
5	3 431 013	– 850 000	2 581 013	2 581 013	
				10 901 278	– 5 400 000

$$TVR = \left(\frac{10\ 901\ 278}{5\ 400\ 000}\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 15.08\ \%$$

Costo anual uniforme equivalente

- ***Inversionista A***

$$VPN = -339\ 963$$

$$CAUE = -339\ 963\left[\frac{20\ \%}{(1-(1+20\%)^{-3})}\right] = -113\ 667$$

- ***Inversionista B***

$$VPN = 785\ 678$$

$$CAUE = 785\ 678\left[\frac{12\ \%}{(1-(1+12\%)^{-3})}\right] = 217\ 955$$

Análisis

De acuerdo con los cálculos realizados, para el inversionista A no es buen negocio elegir esta alternativa de inversión, puesto que el VPN es menor que cero y la TIR es menor que su tasa de oportunidad. Por el contrario, para el inversionista B resulta beneficioso hacer este negocio, ya que, para él, el VPN es mayor que cero y la TIR es mayor que su tasa de oportunidad.

Otras herramientas de evaluación

Período promedio de recuperación de la inversión PRI:

Es una herramienta que permite calcular el plazo que se necesita para que los flujos de caja netos de una inversión rediman el costo o inversión inicial. Matemáticamente, se toman los flujos de caja netos y se halla el valor presente con la tasa de oportunidad: período a período se resta el flujo de caja traído a valor presente a la inversión inicial; cuando el saldo PRI cambia de signo quiere decir que ya se cubrió la inversión inicial.

Período	Ingresos	Egresos	Flujo de caja neto	VP de cada FC neto	Saldo del PRI
0			– 1 000 000		– 1 000 000
1	600 000	– 200 000	400 000	322 581	– 677 419
2	700 000	– 210 000	490 000	351 910	– 325 509
3	1 050 000	– 220 000	830 000	367 307	41 798
4	650 000	– 230 000	420 000	420 000	461 798

Para el ejercicio anterior, el período promedio de recuperación está entre el 2 y el 3. Al finalizar el año 2 todavía falta por recuperar $325.000; haciendo una proporción entre lo que falta por recuperar y el valor del flujo descontado del tercer año, $\frac{325\ 509}{367\ 307} = 0.8862$ se puede concluir que a los 2.8862 años se recupera la inversión, es decir, a los dos años, 10 meses y 19 días. Para ampliar el tema puede consultar (Santacruz, 2016).

Este método puede resultar conveniente en un primer acercamiento a la evaluación de proyectos; sin embargo, ha sido cuestionado, entre otras cosas, porque desconoce los flujos de caja que el proyecto redimirá después de completado el período de recuperación. Encuentre más información en (Gómez Ardila, 2012).

Relación beneficio/costo:

Compara los beneficios y los costos de un proyecto descontándolos a la tasa de oportunidad, lo que permite observar la rentabilidad adicional a la tasa de oportunidad que genera el negocio. Matemáticamente, es la relación del valor presente de los ingresos respecto del valor presente de los egresos, ambos descontados a una tasa de oportunidad (Gutiérrez Carmona, 2012).

$$B/C = \frac{valor\ presente\ de\ los\ ingresos}{Valor\ presente\ de\ los\ egresos}$$

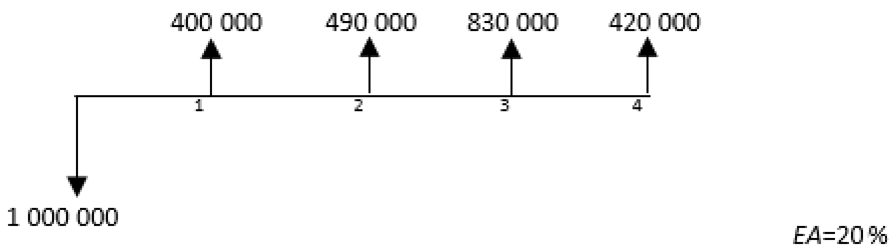
Ejemplo

Hallar la relación B/C para el siguiente proyecto:

Período	Flujo de caja neto	Ingresos	Egresos
0	– 1 000 000		
1	400 000	600 000	200 000
2	490 000	700 000	210 000
3	830 000	1 050 000	220 000
4	420 000	650 000	230 000

Figura 65.

Flujo de caja 30



Período	Flujo neto de caja	Ingresos	Egresos	VP ingresos	VP egresos
0	– 1 000 000				1 000 000
1	400 000	600 000	200 000	500 000	166 667
2	490 000	700 000	210 000	486 111	145 833
3	830 000	1 050 000	220 000	607 639	127 315
4	420 000	650 000	230 000	313 465	110 918
TOTAL				1 907 215	1 550 733

$$\frac{B}{C} = \frac{1\ 907\ 215}{1\ 550\ 733} = 1.23$$

Análisis

La relación arroja un resultado mayor que uno, lo cual indica que, además de haber recibido la rentabilidad mínima esperada, el inversionista obtiene un 23 % adicional. Para hacer el análisis se observan los siguientes criterios:

Ilustración 6.

Criterios de decisión B/C

$B/C > 1$: el inversionista obtiene un rendimiento adicional al esperado; por tanto, debería aceptar el negocio.

$B/C = 1$: el inversionista obtiene un rendimiento igua al esperado; por tanto, es indiferente la decisión que tome.

$B/C < 1$: el inversionista obtiene un rendimiento inferior al esperado; por tanto, debería rechazar el negocio.

Actividad de seguimiento

1) Una empresa está haciendo un estudio para hacer una inversión inicial en un proyecto por $35 000 000. El proyecto tendrá un horizonte de tiempo de 5 años y se prevé que se obtendrán unos flujos de caja netos, así:

Año	Flujo de caja neto
1	1 239 000
2	439 000
3	4 645 000
4	5 205 000
5	43 235 000

Si la tasa de oportunidad es el 12 %, calcule el VPN, TIR, CAUE, PRI, B/C.

2) Una persona natural compra hoy un taxi por $60 000 000 y mensualmente tiene gastos de combustible por $1 300 000, unos costos de operativos de $300 000 cada mes y obtiene unos ingresos mensuales de $3 000 000. Se estima que tanto los ingresos como los costos tendrán un incremento anual del 8 %. Halle la tasa interna de retorno anual si al cabo de 5 años lo vende en $30 000 000.

3) Se compra un bono hoy al 95 % de su valor nominal y la comisión de compra es del 0.3 % de la operación. Los bonos pagan intereses cada año con una tasa del 9 % anual sobre el valor nominal. El valor nominal del bono es de $50 000 000 y se redimen a los 5 años. Calcule la TIR.

4) Una constructora tiene dos opciones para acceder a una grúa: arrendarla o comprarla. Si la compra debe invertir $120 000 000; además, hacer pagos mensuales de mantenimiento por $600 000 durante el primer año y que aumentarán cada año en $100 000; su vida útil será de 5 años y un valor de salvamento de $30 000 000. Si firma un contrato de arrendamiento por la misma grúa, el canon mensual será de $2 500 000 el primer año y se aumentará en un 5 % por año. Elija la opción que más le convenga usando una tasa mínima de retorno del 18 % efectivo anual.

5) Usted compra una casa por $285 000 000 con la expectativa de arrendarla por $1 420 000 mensuales, pagados en forma anticipada, a partir del segundo mes y durante 36 meses (cada año el arrendamiento aumenta de acuerdo con el índice de inflación). El último mes del arrendamiento se vende la casa por $342 000 000. Si su tasa de oportunidad es el 18 % EA, ¿hizo un buen negocio? Halle el VPN y la TIR. Suponga un aumento de la inflación del segundo año con respecto al primero del 6.67 % y del segundo año con respecto al tercero de 4.63 %.

6) Un inversionista compró 100 000 acciones de Ecopetrol el 30 de noviembre de 2007 a $1850 cada una y las mantuvo hasta el 23 de diciembre de 2010 cuando las vendió a $4100 cada una. Mientras tuvo las acciones en su poder recibió dividendos el primer año (2008) de $115 pesos por acción en cuatro cuotas iguales el 25 de abril, 25 de julio, 25 de octubre y 15 de diciembre; el 26 de marzo de 2009 decretaron un dividendo ordinario por acción de $115 y uno extraordinario de $105 por acción y los pagaron en cuotas iguales el 27 de abril, 27 de julio y 27 de octubre; y el último año (2010) pagaron un dividendo por acción de $91: $31 el 25 de abril, $30 el 25 de agosto y $30 el 15 de diciembre. Halle la TIR y el VPN. Si la tasa de oportunidad es del 8 %, ¿se hizo un buen negocio?

7) Un proyecto que tiene un plazo de 5 años requiere una inversión inicial de $30 000 000; se prevé que tendrá unos costos mensuales que empiezan en $200 000 y aumentan un 1 % cada mes hasta el mes 24, luego se mantienen fijos hasta finalizar el proyecto. Adicionalmente, tiene unos costos de $150 000 cada 10 meses durante la vida del proyecto. Los ingresos son fijos los primeros 30 meses por $900 000, luego crecen en $30 000 cada mes hasta finalizar el plazo. Los activos tienen un valor residual de $15 000 000. Calcule el VPN, la TIR, el CAUE y el PRI (tasa de descuento, 16 % capitalizable MV). Determine si hizo un buen negocio.

8) Usted puede invertir $10 000 000 que le pueden ser devueltos de dos formas: (1) recibiendo $5 000 000 cada uno de los próximos cuatro años; (2) recibiendo $4 000 000 durante los próximos seis años. ¿Cuál de las dos opciones es más rentable? Compare VPN y CAUE y haga el análisis correspondiente.

9) Se realizó una inversión el 27 de junio de 20X8 por valor de $20 000 000 y se recibieron los siguientes beneficios en las respectivas fechas.

06/09/20X9	$5 400 000
09/20/20X9	$7 000 000
12/18/20X9	$9 800 000

¿Cuál fue la tasa efectiva anual obtenida?

10) Usted realiza una inversión de $10 000 000 para recibir $5 000 000 cada uno de los próximos cuatro años. Suponga que usted no puede reinvertir los flujos de caja recibidos en el mismo negocio, sino que los puede colocar en un fondo que le renta el 20 % EA. ¿Cuál es la tasa de rentabilidad verdadera?

Autoevaluación

1) Considere las siguientes alternativas para adquirir un equipo:

Alternativa 1:

Pagar una cuota inicial de $7 562 500 y 6 cuotas anuales de $5 518 183.49.

Alternativa 2:

Pagar 4 cuotas anuales de $8 647 023.315 y una cuota extra al finalizar el año 2 por $5 000 000.

Si se considera una tasa del 12 % EA, de acuerdo con el VPN, se puede decir que —desde el punto de vista del comprador— se debe elegir:

a) La opción de mayor costo.
b) La primera opción porque el VPN es menor.
c) La segunda opción porque el VPN es menor.
d) Es indiferente elegir entre cualesquiera de las dos opciones.

2) Para poner a funcionar un proyecto se calcula una inversión inicial del $12 000 000. Por otra parte, se espera que entregue los siguientes flujos de caja futuros:

Año 1: $3 000 000; año 2: $3 800 000; año 3: $4 200 000; año 4: $3 900 000. Al evaluar el proyecto se concluye que la TIR:

a) Es del 10 %
b) Es menor que el 10 %
c) Es mayor que el 20 %
d) Está entre el 10 % y 20 %

3) Se hace una inversión de $15 000 000 que entrega un flujo neto de caja de $3 514 042 en cada uno de los siguientes 7 años. El PRI es:

a) 5 años y 4 meses.
b) 6 años y 3 meses.
c) 5 años y 3 meses.
d) 6 años y 2 meses.

4) La diferencia entre la TIR y la TD es:

a) La TIR es una tasa externa, mientras que la TD es una tasa del proyecto.
b) La TIR es una tasa que capitaliza los intereses, la TD no.
c) La TIR es una tasa propia del decisor, la TD no.
d) La TIR depende de los flujos del proyecto, la TD no.

5) La relación entre VPN y tasa de descuento es:

a) Cuando el costo del dinero disminuye queda menos para ser considerado como VPN.

b) Cuando el costo del dinero aumenta queda más para ser considerado como VPN.

c) Como el costo del dinero hace parte del divisor de la cantidad que se trae a valor presente, si el divisor aumenta, el cociente se hace más pequeño.

d) Como el costo del dinero es un factor de la cantidad que se trae a valor presente, si el factor aumenta, el producto que es el VPN se hace más grande.

6) Una persona A presta a otra persona B $20 000 000 al 3.5 % trimestral con un plazo de un año. El capital se lo pagan en cuotas trimestrales iguales de $5 000 000 y los intereses se calculan sobre el saldo. Cada vez que la persona A recibe el dinero de parte de la persona B lo reinvierte a una tasa del 3 % trimestral. La tasa verdadera de rentabilidad es:

a) 3.5 %

b) 3.3 %

c) 3.35 %

d) 3.53 %

7) Un inversionista tiene dos opciones para invertir $48.000.000; cada una le produce los siguientes flujos de caja netos a partir del primer año:

C	Opción A
1	3 500 000
2	4 550 000
3	5 195 000
4	7 689 000
5	9 996 350
6	12 995 255
7	16 893 832
8	21 961 981
9	28 550 575
10	87 115 748

Año	Opción A
1	8 640 000
2	11 232 000
3	14 601 600
4	18 982 080
5	24 676 704
6	32 079 715

Si la tasa de descuento es del 20 %, el inversionista debería elegir la opción:

a) A porque su VPN es $3 002 485

b) B porque su VPN es $5 264 612

c) A porque su VPN es $2 502 071

d) B porque su VPN es $4 387 177

8) En ciertas evaluaciones comparativas de proyectos no basta con elegir aquel con un VPN mayor, sino que hay que incluir otro análisis. Esto se da en:

a) Proyectos con vida útil diferente.

b) Proyectos con vida útil igual.

c) Proyectos que tienen inversiones en distintos momentos.

d) Proyectos que solo tienen una inversión inicial.

9) Una persona natural compra hoy un taxi por $60 000 000 y mensualmente tiene gastos de combustible por $1 300 000, unos costos de operación y mantenimiento de $300 000 cada mes y obtiene unos ingresos mensuales de $3 000 000. Se estima que tanto los ingresos como los costos tendrán un incremento anual del 8 %; al cabo de 5 años lo vende en $30 000.000. Señale cuáles son los flujos de caja netos de este negocio.

a)

Año	**Flujo de caja neto**
0	– 60 000 000
1	1 400 000
2	1 512 000
3	1 632 960
4	1 763 597
5	31 904 685

b)

Año	**Flujo de caja neto**
0	– 60 000 000
1	1 400 000
2	1 512 000
3	1 632 960
4	1 763 597
5	1 904 685

c)

Año	**Flujo de caja neto**
0	– 60 000 000
1	4 600 000
2	4 968 000
3	5 365 440
4	5 794 675
5	36 258 249

d)

Año	**Flujo de caja neto**
0	– 60 000 000
1	1 400 000
2	1 400 000
3	1 400 000
4	1 400 000
5	31 400 000

10) Un proyecto que tiene un plazo de 5 años requiere una inversión inicial de \$30 000 000. Se prevé que tendrá unos costos mensuales que empiezan en \$200 000 y aumentan un 1 % cada mes hasta el mes 24; luego se mantienen fijos hasta finalizar el proyecto. Adicionalmente, tiene unos costos de \$150 000 cada 10 meses durante la vida del proyecto. Los ingresos son fijos los primeros 30 meses por \$900 000; luego crecen en \$30 000 cada mes hasta finalizar el plazo. Los activos tienen un valor residual de \$17 000 000. Si la tasa es del 1.33 % mensual, halle el valor aproximado del CAUE mensual.

a) \$281 521

b) \$110 777

c) \$261 299

d) \$98 606

Glosario

Amortización: proceso mediante el cual se cancela una deuda junto con sus intereses por medio de unos pagos que pueden ser periódicos o no, en un tiempo determinado.

Costo anual uniforme equivalente: cuota uniforme hallada a partir del valor presente neto de un proyecto.

Costo: tasa de interés que se cobra por el préstamo de dinero.

Devaluación: pérdida del valor de la moneda local con respecto a monedas extranjeras.

Equivalencia: correspondencia entre dos cantidades que tienen el mismo efecto financiero.

Inflación: crecimiento sostenido de los precios de los bienes y servicios durante un período.

Interés: es la rentabilidad o costo de un negocio, expresado en unidades monetarias.

Período de recuperación: período del proyecto en el cual se ha recuperado la inversión inicial de este.

Plazo: tiempo que transcurre desde la negociación de la deuda hasta su vencimiento.

Relación beneficio/costo: relación entre el valor presente de los ingresos y el valor presente de los egresos.

Sistema alemán: sistema de pagos periódicos con cuotas de abono a capital constantes.

Sistema francés: sistema de pagos periódicos con cuotas constantes en pesos.

Tasa de descuento: tasa usada para descontar los flujos de caja futuros. Esta puede ser una tasa de oportunidad, una tasa de deuda o un promedio ponderado.

Tasa de interés: es un indicador porcentual del interés.

Tasa efectiva: tasa que incluye la capitalización de los intereses.

Tasa interna de retorno: tasa implícita en un negocio. Es la tasa que permite que el valor presente neto sea igual a cero.

Tasa nominal: tasa que no considera la capitalización de los intereses.

Tasa periódica: tasa que se aplica directamente al capital para determinar los intereses periódicos.

Valor futuro: es el valor final al cual se le han adicionado los intereses de una cantidad que se recibió o entregó en fechas anteriores y que tiene implicaciones financieras en períodos subsiguientes.

Valor presente neto: cifra que se obtiene al deducir el valor presente de los egresos al valor presente de los ingresos.

Valor presente: es el valor actual al que se le han descontado los intereses de una cantidad que se recibirá o entregará en el futuro o que tendrá implicaciones financieras en períodos futuros.

Soluciones

Unidad 1

Taller de aplicación

A)

1) Aplicación de recursos económicos en un proyecto o empresa con el fin de recibir réditos en el futuro;

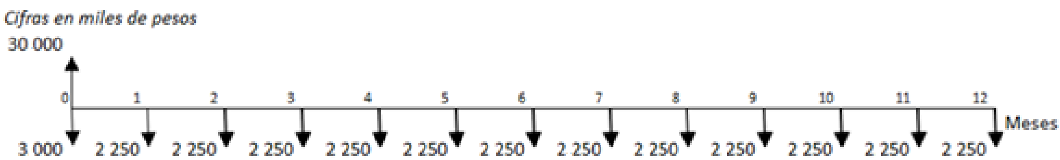
3) Es el costo del dinero expresado en unidades monetarias.

B)

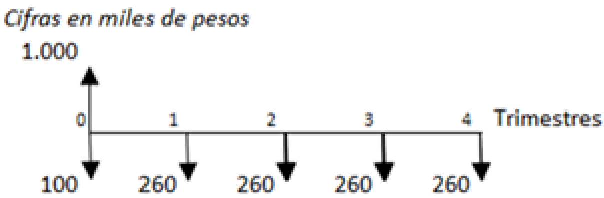
a) 0.23
b) 0.19
c) 0.114
d) 0.04
e) 0.01
f) 0.3465
g) 0.3254
h) 0.095
i) 0.0009
j) 0.285

C)

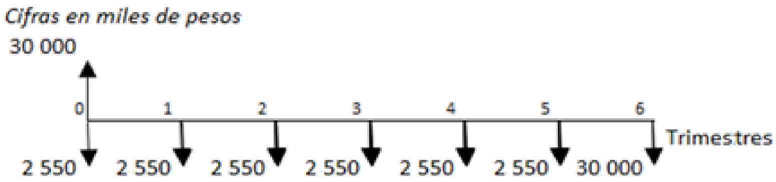
1)



2)



5)



Interés simple

1) 0.025
3) 49 242 424
5) 6 trimestres
7) Alternativa a
9) 0.15

Interés compuesto

1) 187 298
3) 1 152 282
5. 6 415 617
7. 0.1892
9. 13.39 trimestres

Ecuaciones de valor con interés compuesto

2) 981 786
4) 572 633
6) 745 221
8) 835 060 y 1 085 060
10) 54 535 182

Unidad 2

A) 1) Periódica
3) Periódica
5) Nominal
7) Nominal
9) Nominal

B) 2) 0.16
4) 0.16
6) 0.11
8) 0.2387
10) 0.0612
12) 0.2388
14) 0.1194

C) 1) 01056
3) 0.1498
5) Perdiendo poder adquisitivo.
7) La del 9 % EA
9) 0.1941

D) 2) 0.2682
4) 0.0379
6) 0.1941
8) 0.1120
10) 0.2235
12) 0.2472
14) 0.21

Unidad 3

Series uniformes

2) 12 426 370
4) 3 926 132
6) 7 491 697
8) 13 meses
10) 92 278 265

Series variables

1) 1 545 798
3) 1 236 649; la primera.
5) Opción a.

Unidad 4

2) Con FC mensuales, tasa mensual 0.0168 y tasa anual del 0.2208
4) Conviene comprarla.
6) Hizo un buen negocio; el VPN es positivo y la TIR mayor que la tasa de oportunidad.

Referencias

Álvarez Arango, A. (1999). ***Matemáticas financieras***. McGraw Hill.

Apilánez, A. (2009). La metástasis del capital. ***Nómadas***, ***23***(3),2-7.

Baca, G. (2000). ***Fundamentos de ingeniería económica***. McGraw Hill.

Banco de la República (2013). ***Funciones. Qué hacemos***. http://www.banrep.gov.co/es/el-banco/que-hacemos

Banco de la República. (21 de diciembre de 2016). ***Unidad de valor real (UVR)***. http://www.banrep.gov.co/es/uvr

Blank, L.; Tarquin, A. (2006). ***Ingeniería económica***. McGraw Hill.

Decreto 663 de 1993 [con fuerza de ley]. Por medio del cual se actualiza el Estatuto Orgánico del Sistema Financiero y se modifica su titulación y numeración. 2 de abril de 1993. D. O. n.° 40820. http://www.secretariasenado.gov.co/senado/basedoc/estatuto_organico_sistema_financiero.html

Flórez Uribe, J. A. (2011). ***Matemáticas financieras empresariales***. ECOE Ediciones.

Gómez Ardila, C. (15 de enero de 2012). ***Período de recuperación, un mal criterio financiero***. http://www.portafolio.co/opinion/redaccion-portafolio/periodo-recuperacion-mal-criterio-financiero-99424

Gutiérrez Carmona, J. (2012). ***Matemáticas financieras***. ECOE Ediciones.

Gutiérrez, L. (2010). ICESI. ***El costo de las deudas en dólares***. https://repository.icesi.edu.co/biblioteca_digital/bitstream/10906/2620/1/costo_deudas_dolares.pdf

Makonye, J. P. (2020). Towards a culturally embedded Financial Mathematics PCK framework. ***Research in Mathematics Education***, ***22***(2), 98-116. https://doi.org/10.1080/14794802.2020.1752788

Marichal, C. (2013). ***Nueva historia de las grandes crisis financieras: Una perspectiva global***, 1873-2008. Random House.

Meza Orozco, J. (2010). ***Matemáticas financieras aplicadas***. Ecoe Ediciones.

Meza Orozco, J. (2017). ***Matemáticas financieras aplicadas***. ECOE Ediciones.

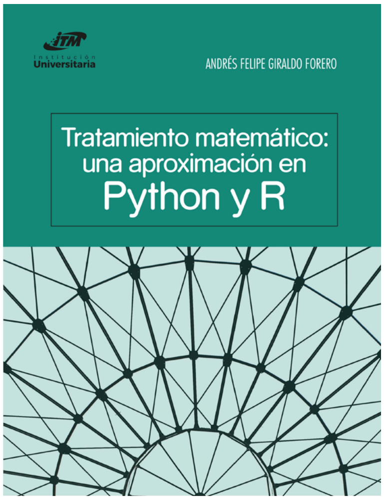
Piaget, J. (1981). La teoría de Piaget. ***Journal for the Study of Education and Development***, ***4***(2), 13-54. https://doi.org/10.1080/02103702.1981.10821902

Ramírez Hassan, A. y Serna Rodríguez, M. (2012). Validación empírica del modelo CAPM para Colombia 2003-2010. ***Ecos de Economía***, (34), 49-74. http://www.scielo.org.co/pdf/ecos/v16n34/v16n34a3.pdf

Superintendencia Financiera. (14 de abril de 2008). ***Interés bancario corriente, tasa máxima remuneratoria, usura***. https://www.superfinanciera.gov.co/SFCant/Normativa/Conceptos2008/2008008666.pdf

Uribe Escobar, J. D. (2013). El sistema financiero colombiano: estructura y evolución reciente. ***Revista del Banco de la República***, ***86***(1023), 5-18. https://publicaciones.banrepcultural.org/index.php/banrep/article/view/8421

Otros títulos



TRATAMIENTO MATEMÁTICO: UNA APROXIMACIÓN EN PYTHON Y R

Libro digital

1a edición. 2022
Editorial ITM

Autor: Andrés Felipe Giraldo Forero

Este libro brinda los conceptos básicos de fundamentación matemática y suministra al lector las bases necesarias para introducirse en el área de ciencias de la computación. Para ello, se realizan múltiples aproximaciones a dos de los principales lenguajes que se emplean en temas de análisis de datos, R y Python. Los temas expuestos en este libro hacen parte del contenido del curso Tratamiento Matemático de la maestría en Automatización.

INTRODUCCIÓN A LA ADQUISICIÓN Y ACONDICIONAMIENTO DE SEÑALES

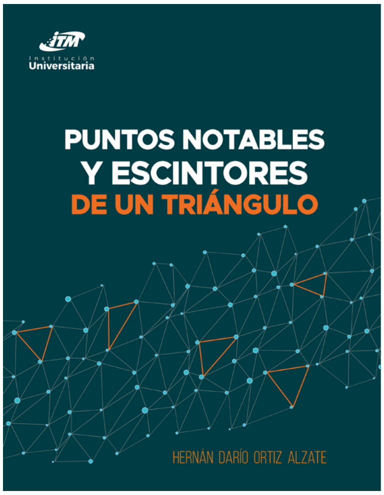
Libro digital

1a edición. 2022
Editorial ITM

Autores: Marcela Vallejo Valencia, Alexander Arias Londoño

Como la adquisición de datos es un componente transversal a muchos desarrollos tecnológicos, los autores creemos que resulta una herramienta muy útil como iniciación en la formación de estudiantes en competencias investigativas en el área de la ingeniería.

El material de este texto puede usarse en cualquier curso sobre adquisición de datos y en aquellos concentrados en la etapa de acondicionamiento de la señal. También es ideal para el estudio del amplificador operacional, que se aborda ampliamente en este libro.



PUNTOS NOTABLES Y ESCINTORES DE UN TRIÁNGULO

Libro digital

1a edición. 2021
Editorial ITM

Autor: Hernán Darío Ortiz Alzate

Este texto trata del desarrollo de fórmulas algebraicas para localizar directamente las coordenadas de algunos puntos notables de un triángulo, como el incentro, el gravicentro, el ortocentro, el circuncentro, el punto de Nagel y el punto de Spieker, en función de la longitud de sus lados o de las coordenadas cartesianas de sus vértices. De igual manera, se refiere al desarrollo de las fórmulas algebraicas que permiten ubicar directamente las coordenadas de los puntos extremos de los escintores de un triángulo, a saber, mescintor (cleaver), vescintor (splitter) y escintriz (equalizer), en términos de la longitud de sus lados o de las coordenadas cartesianas de sus vértices.

Editorial ITM

Matemáticas financieras

Este libro se editó en Medellín en 2023.

Las fuentes tipográficas empleadas son Myriad Pro Regular en 12 puntos para texto corrido, Myriad Pro Bold y Bold Italic en 12 y 14 puntos más Square Bold en 16 puntos para subtítulos y Square Bold en 35 y 65 puntos para títulos.

Naturae
Ciencias Naturales

El libro está compuesto por cuatro unidades temáticas: (1) Generalidades, interés simple e interés compuesto, (2) Tasas de interés, (3) Sistemas de pago y (4) Evaluación de alternativas de inversión y financiación. Cada unidad provee desarrollo conceptual, talleres de aplicación y autoevaluación; estos componentes contribuirán a la comprensión del valor del dinero en el tiempo, las diversas manifestaciones de las tasas de interés como expresión relativa del costo o rentabilidad del dinero, las distintas formas de amortizar una deuda y los principales métodos de valoración de inversiones y financiaciones los cuales le proveerán herramientas básicas para la evaluación de proyectos.

@ITMFondoEditorial
@editorial_itm

Editorial ITM

Alcaldía de Medellín
Distrito de
Ciencia, Tecnología e Innovación