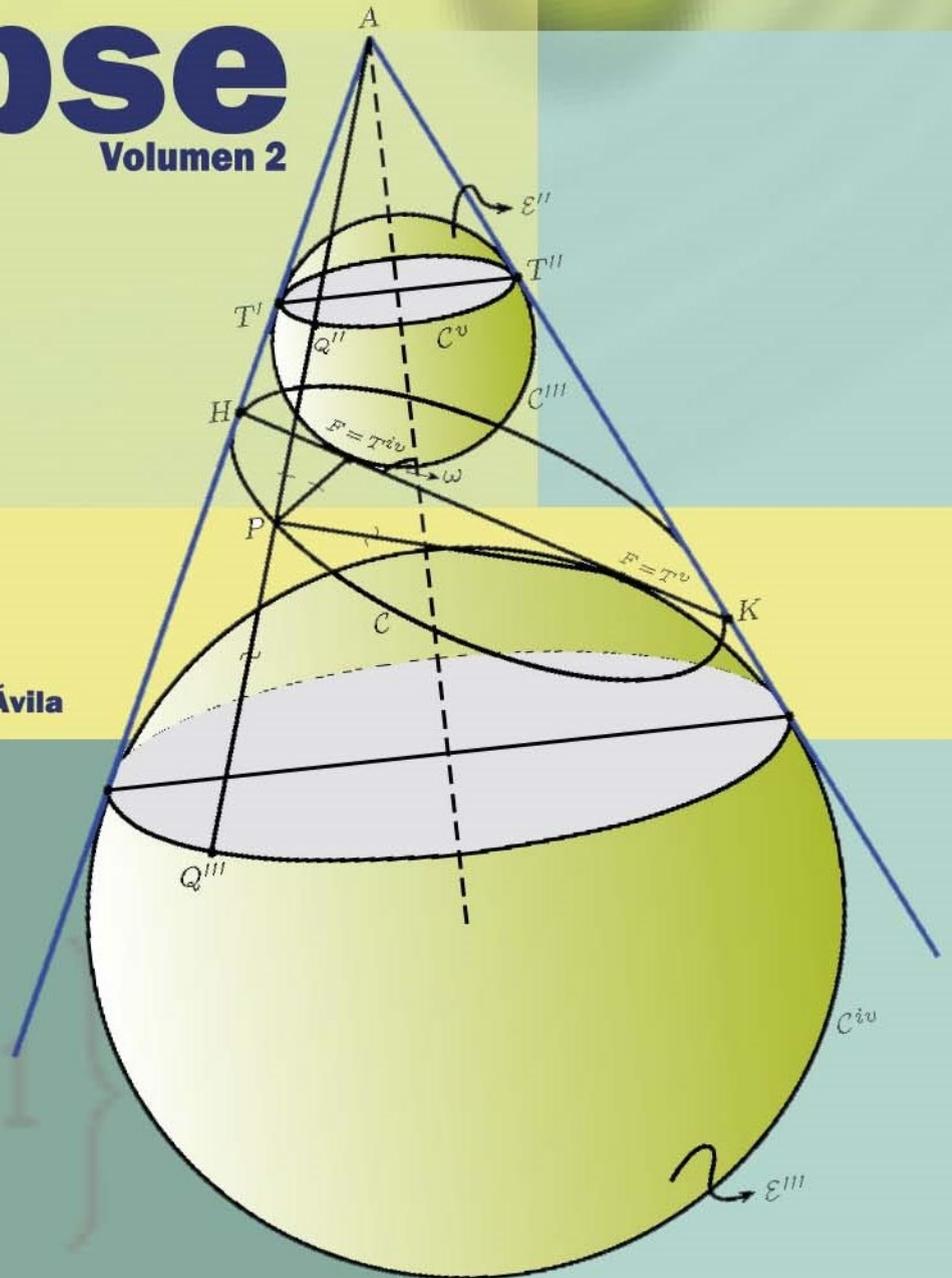


Tratado de las Secciones Cónicas:

La Elipse

Volumen 2

Jaime Chica Escobar
Hernando Manuel Quintana Ávila



Tratado de las Secciones Cónicas

La Elipse

JAIME CHICA ESCOBAR

HERNANDO MANUEL QUINTANA ÁVILA



Tratado de las Secciones Cónicas: La Elipse

© JAIME CHICA ESCOBAR
© HERNANDO MANUEL QUINTANA
© Instituto Tecnológico Metropolitano

Edición: diciembre 2013

ISBN:

Hechos todos los depósitos legales

Rectora

LUZ MARIELA SORZA ZAPATA

Editora

SILVIA INÉS JIMÉNEZ GÓMEZ

Secretaría técnica

VIVIANA DÍAZ

Corrección de textos

LILA MARÍA CORTÉS FONNEGRA

Diagramación

GIOVANNY ATEHORTÚA GUTIÉRREZ

Impresión

EDICIONES DIARIO ACTUAL

Editado en Medellín, Colombia

Fondo Editorial ITM

Instituto Tecnológico Metropolitano

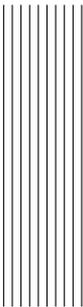
Calle 73 No. 76A 354

Tel.: (574) 440 5197 • Fax: 440 5246

www.itm.edu.co

Medellín – Colombia

Las opiniones, originales y citas del texto son de la responsabilidad del autor. El ITM salva cualquier obligación derivada del libro que se publica. Por lo tanto, ella recaerá única y exclusivamente sobre el autor.

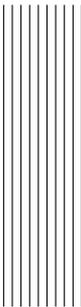


Contenido

2	La Elipse	1
2.1	Definición	1
2.2	Ecuaciones analíticas de la elipse	4
2.3	Análisis de la ecuación canónica y extensión de la curva	7
2.4	Otro foco y otra directriz para la elipse	9
2.5	Expresiones de los radios focales. Otra definición de la curva	19
2.5.1	Una propiedad de los vértices	21
2.6	Construcciones de la elipse	23
2.6.1	Un método continuo	23
2.6.2	Un método para trazar la curva por puntos	23
2.6.3	Otra construcción de la elipse por puntos	24
2.7	Una construcción más de la elipse	27
2.8	Ecuaciones paramétricas de la elipse	28
2.9	Otra construcción de la elipse	29
2.10	Ecuación de la elipse en coordenadas polares	29
2.11	Anomalía excentrica y anomalía verdadera de un punto de la elipse. Relación entre ambas	33
2.12	Relación entre la anomalía verdadera y la anomalía excéntrica	35
2.13	La cuadratura de la elipse	36
2.14	Otra construcción de la elipse	39
2.15	Valores de la función $f(x, y) = a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2$	45
2.16	Valores de la función $g(P) = PF' + PF$	47
2.17	Valores de la función $h(P) = \frac{PD}{PF}$	47
2.18	Tangente a la elipse por un punto $P(x_1, y_1)$ de la curva	48
2.19	Subtangente y subnormal en la elipse	50
2.20	Una construcción de la tangente a la elipse por uno de sus puntos	51
2.21	Ecuación de la tangente a la elipse por un punto de la curva empleando análisis vectorial	53
2.22	Propiedad óptica de la elipse	54
2.23	Importancia de la elipse en la mecánica	58
2.24	Sección obtenida al cortar un cono con un plano	63
2.25	Cálculo de los segmentos determinados sobre los lados de un triángulo por los puntos de contacto de las circunferencias inscritas y exinscritas.	67
2.26	Teorema de Dandelin	69
2.27	Ecuación de las normales a \mathcal{E} paralelas a $y = mx$	75
2.28	Intersección de una recta y una elipse	77
2.29	Problemas sobre tangentes y normales a la elipse	79
2.30	Diámetros de la elipse	83
2.31	Propiedades de los diámetros. Diámetros conjugados	85

2.32	Cuerdas suplementarias de la elipse	87
2.33	Fórmulas de Chasles	90
2.34	Teoremas de Apolonio	91
2.34.1	Primer teorema de Apolonio	91
2.34.2	Segundo teorema de Apolonio	92
2.35	Ecuación de la elipse referida a un par de diámetros conjugados	94
2.36	Ecuación de la tangente t a la elipse por un punto $P(h, k)$ de la curva referida a dos diámetros conjugados	95
2.37	Otra construcción de la elipse	101
2.38	Otras propiedades de diámetros y tangentes	104
2.39	Tangentes a la elipse desde un punto exterior a la curva	117
2.40	Polo y polar en la elipse	119
2.41	Teoremas de Poncelet para la elipse	125
2.41.1	Primer teorema de Poncelet para la elipse	127
2.41.2	Segundo teorema de Poncelet para la elipse	127
2.42	Tangente, normal, subtangente y subnormal en la elipse	128
2.43	El radio de curvatura en un punto de la elipse. Una construcción del centro de curvatura	131
2.44	La evoluta de la elipse	134
2.45	Longitud de arco de la elipse	137

Bibliografía**139**



Prólogo

El tercer gigante matemático de la antigüedad griega, al lado de Euclides (325 a.C - 265 a.C) y Arquímedes (287 a.C - 212 a.C) fue Apolonio (262 a.C - 200 a.C) quien nació en Perga al sur de Asia Menor. Siendo joven fue a Alejandría donde estudió con los sucesores de Euclides y luego pasó la mayor parte de su vida en la universidad de esa ciudad.

Debe su fama a la extraordinaria y monumental obra: *Secciones Cónicas* trabajo con el que ganó el título entre sus contemporáneos de «El mejor geometra».

Las secciones cónicas de Apolonio son 8 libros que contienen aproximadamente 400 proposiciones. Son una investigación profunda de estas curvas: parábola, elipse e hipérbola que sustituyó a trabajos anteriores sobre el mismo tema. Los antiguos griegos las obtenían como secciones de un cono circular recto en un plano que corte al eje del cono. Como se comprende, Apolonio dedujo la mayor parte de las propiedades de las cónicas sin utilizar coordenadas ni ecuaciones de las curvas como lo hacemos ahora, ya que dicho estudio solo empezó a hacerse después de la creación de la Geometría Analítica por parte de los matemáticos franceses Rene Descartes (1596 - 1650) y Pierre de Fermat (1601 - 1665).

Estas tres monografías que presentamos: la parábola, la elipse y la hipérbola recogen cada una por separado un estudio de las propiedades geométricas básicas de estas curvas, empezando por la construcción de ellas, todas obtenidas utilizando Geometría Analítica, es decir, las ecuaciones analíticas de las curvas.

Hay un punto de vista común que utilizamos en las tres monografías para definir las cónicas: dada una recta \mathcal{DD} llamada *directriz*, un punto F no contenido en \mathcal{DD} que llamaremos *foco* y un número real $\epsilon > 0$, denominado *excentricidad*, la cónica de directriz \mathcal{DD} , foco F y excentricidad ϵ es el conjunto de los puntos P del plano (el plano \mathcal{DD} y F) en los que se cumple que:

$$\frac{PF}{PD} = \epsilon.$$

- Cuando $\epsilon < 1$ la cónica se llama elipse.
- Cuando $\epsilon = 1$ la cónica se llama parábola.
- Cuando $\epsilon > 1$ la cónica se llama hipérbola.

Hay que señalar que estas curvas tienen gran importancia en la técnica: en muchos diseños de ingeniería se aplican las parábolas, en óptica se utilizan en la construcción de telescopios, en la ingeniería de los radares, en telecomunicaciones, etc.

Pero el lugar donde juegan un papel esencial es en la *Ley de Gravitación Universal* de Newton (Isaac Newton 1642 - 1727) y en las *Leyes de Kepler* (Johannes Kepler 1571 - 1630) que rigen el

movimiento de los planetas alrededor del sol. La 3^a. de ellas dice expresamente que «la orbita de todo planeta alrededor del sol es una elipse, con el sol en uno de sus focos».

Es posible demostrar que las leyes de Keppler son equivalentes a la Ley de Gravitación Universal. O sea, partiendo de las Leyes de Keppler se puede demostrar la Ley de Gravitación Universal y viceversa. Este es uno de los problemas más importantes que ha resuelto la mente humana y que resolvió Newton utilizando el cálculo que acababa de inventar.

El contenido de cada una de estas monografías puede resumirse así:

- Definición de la curva.
- Diferentes contrucciones de ellas, bien sea por puntos o por métodos continuos.
- Ecuaciones analíticas y análisis de la extensión de cada curva.
- Intersección de una cónica con una recta.
- Propiedades ópticas de cada curva.
- Recta tangente a una cónica y de pendiente dada.
- Ecuación de tangentes y normales por un punto.
- Construcción de la tangente en un punto de la curva.
- Subtangentes y subnormales en un punto. Propiedades.
- Polo y polar de una cónica.
- Diámetros y sus propiedades; diámetros conjugados.
- Ecuación de la cónica referida a un par de diámetros conjugados.
- Distintas ecuaciones paramétricas de las cónicas. Ecuación en cordenadas polares.
- Longitud de arco y cuadratura de cada curva. Radio de curvatura y ecuación de la evoluta.

Para el tratamiento del último punto es indispensable el uso de herramientas del cálculo: derivadas e integrales.

También debe señalarse que en las monografías se emplean Ecuaciones de Rectas, Circunferencias y Álgebra de Vectores. El tratamiento de estos temas se supone conocido por el lector.

Finalmente quedan pendientes tres problemas:

1. Estudio analítico de las secciones obtenidas al cortar un cono con un plano.
2. Los lugares geométricos representados por la ecuación general de segundo grado en dos variables:
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (1)$$
3. Los lugares geométricos representados por la ecuación general de segundo grado en tres variables:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0. \quad (2)$$

Para el estudio de los dos últimos problemas, especialmente el tercero es indispensable el empleo de Valores y Vectores Propios de una matriz, tema que se estudia en un curso de Álgebra Lineal.

La primera ecuación puede representar una cónica no centrada o sea, trasladada y rotada en el plano que puede ser:

- Una circunferencia.
- Una elipse.
- Una parábola.
- Una hipérbola.

o una cónica degenerada:

- Dos rectas paralelas.
- Dos rectas concurrentes.
- Una recta.
- Un punto.
- Φ (vacío), o sea que $\nexists(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen (2.22).

La ecuación puede representar una superficie cuádrica no centrada, o sea, trasladada y rotada a un punto del espacio y puede representar:

- Un cono circular recto.
- Un cono elíptico.
- Un cono hiperbólico.
- Una esfera.
- Un elipsoide.
- Un hiperboloide de una hoja.
- Un hiperboloide de dos hojas.
- Un paraboloides hiperbólico.

o una cuádrica degenerada:

- Dos planos paralelos.
- Dos planos que se cortan.
- Un plano.
- Un punto.
- Φ , esto es, ningún punto del espacio satisface (2).

*Jaime Chica Escobar
Hernando Manuel Quintana Ávila*

2 La Elipse

2.1 Definición

Sea \mathcal{DD} una recta dada llamada *directriz* y F un punto del plano, $F \notin \mathcal{DD}$, que se llama *el foco*. Sea ϵ un número real, $0 < \epsilon < 1$ que llamaremos *excentricidad*. Se define la elipse (véase figura 2.1) de directriz \mathcal{DD} , foco F y excentricidad ϵ , denotada por $\mathcal{E}_{\mathcal{DD},F,\epsilon}$ como el lugar de los puntos P del plano, cuya distancia al foco dividida por su distancia a la directriz es igual a ϵ . O sea,

$$\mathcal{E}_{\mathcal{DD},F,\epsilon} = \left\{ P \mid \frac{PF}{PD} = \epsilon; 0 < \epsilon < 1 \right\}.$$

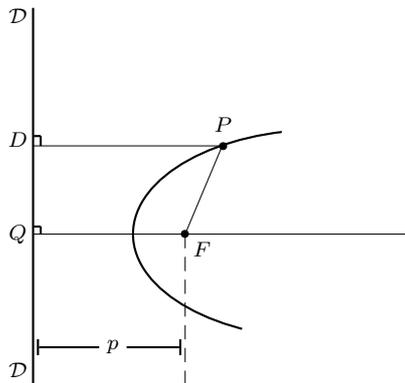


Figura 2.1 Elipse con directriz \mathcal{DD} y foco F

Se llama $p = d(F, \mathcal{DD})$: la distancia foco-directriz.

Si bajamos desde F , \overline{FQ}^1 perpendicular a \mathcal{DD} , la curva es simétrica respecto a la recta \overleftrightarrow{FQ} .² Se deja al lector demostrarlo.

Así que la recta \overleftrightarrow{FQ} es eje de simetría de la elipse.

Observación: en la sección 1.1 (monografía de la parábola) se discute la variación de la función:

$$\begin{aligned} f: \alpha - \mathcal{DD} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longrightarrow f(P) = \frac{PF}{PD} = \lambda, \end{aligned}$$

donde α es el semiplano definido por \mathcal{DD} y F .

¹ \overline{FQ} o simplemente FQ denota el segmento de recta del punto F al punto Q .

² \overleftrightarrow{FQ} denota la recta que pasa por los puntos F y Q .

$$OQ = OF + p = \frac{p\epsilon^2}{1-\epsilon^2} + p = \frac{p}{1-\epsilon^2}.$$

Luego,

$$\frac{OF}{OQ} = \epsilon^2$$

En la figura 2.3 se tiene localizados V, V', O, \dots

Nótese que:

$$FV' = \frac{2p\epsilon}{1-\epsilon^2} - \frac{p\epsilon}{1+\epsilon} = \frac{p\epsilon}{1+\epsilon} \left(\frac{2}{1-\epsilon} - 1 \right) = \frac{p\epsilon}{1-\epsilon}.$$

2.2 Ecuaciones analíticas de la elipse

Sea ahora la $\mathcal{E}_{\mathcal{D}\mathcal{D},F,\epsilon}$ y un sistema de ejes rectangulares xy , con origen en el foco F y eje x la recta \overleftrightarrow{FQ} (véase figura 2.4).

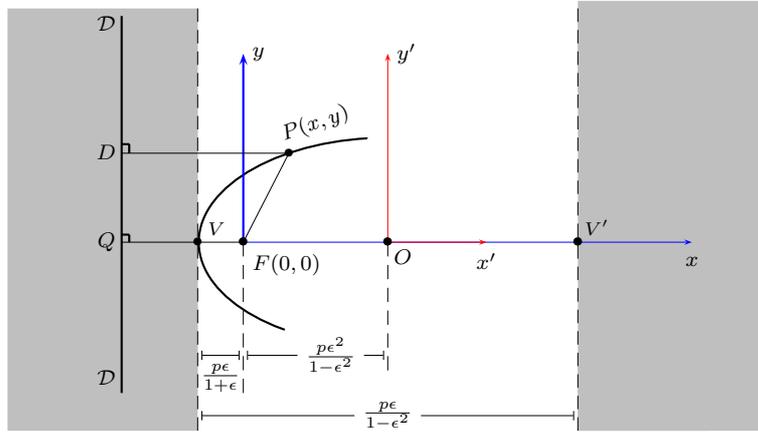


Figura 2.4 Puntos $P(x, y)$ de la elipse respecto al sistema xy con centro en $F(0,0)$

Sea $P(x, y) \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}\mathcal{D},F,\epsilon}$. Entonces:

$$\frac{PF}{PD} = \epsilon. \tag{2.1}$$

Pero:

$$\begin{aligned} PF &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ PD &= x + p, \quad \text{con} \quad -\frac{p\epsilon}{1+\epsilon} \leq x \leq \frac{p\epsilon}{1-\epsilon}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + p} = \epsilon, \quad \text{de donde} \quad x^2 + y^2 = \epsilon^2(x + p)^2.$$

O sea que:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \epsilon^2(x^2 + 2px + p^2), \\ (1 - \epsilon^2)x^2 - 2p\epsilon^2x + y^2 &= \epsilon^2p^2 \\ \left[(1 - \epsilon^2)x^2 - 2p\epsilon^2x + \frac{p^2\epsilon^4}{1 - \epsilon^2} \right] + y^2 &= \epsilon^2p^2 + \frac{p^2\epsilon^4}{1 - \epsilon^2} \end{aligned}$$

Dibujamos la parábola y la recta $y = x$. La gráfica de la recta está por debajo de la gráfica de la curva cuando $0 < x < 1$ (véase figura 2.9).

Esto “muestra” que si $0 < x < 1$, $x < \sqrt{x}$. Como $1 - \epsilon^2 < 1$, $1 - \epsilon^2 < \sqrt{1 - \epsilon^2}$, de donde,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} < \frac{1}{1 - \epsilon^2}$$

y, por tanto,

$$\frac{\epsilon p}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} < \frac{\epsilon p}{1 - \epsilon^2},$$

o sea que $b < a$.

(Una prueba de que si $0 < x < 1$, $x < \sqrt{x}$ podría ser: Tomemos x fijo, $0 < x < 1$

- Si $x = \sqrt{x}$, $x^2 = x$ y por tanto $x = 1$, lo cual es contradictorio.
- Si $x > \sqrt{x}$, $x^2 > x$, entonces $x > 1$, lo cual es una contradicción.

Luego $x < \sqrt{x}$).

2.4 Otro foco y otra directriz para la elipse

Ahora, como resultado de la simetría de la curva respecto a los ejes xy , se sigue que la elipse tiene otro foco F' y otra directriz $D'D'$ que son simétricos de F y DD respecto al eje y .

Construyamos los simétricos F' y $D'D'$ respecto al eje y (véase figura 2.10).

Entonces $OF' = OF$ y $OQ' = OQ$.

Se afirma que:

$$P \in \mathcal{E}_{DD,F,\epsilon} \iff \frac{PF'}{PD'} = \epsilon,$$

o lo que es lo mismo que

$$\frac{PF}{PD} = \epsilon \iff \frac{PF'}{PD'} \in \mathcal{E}_{D'D',F',\epsilon}$$

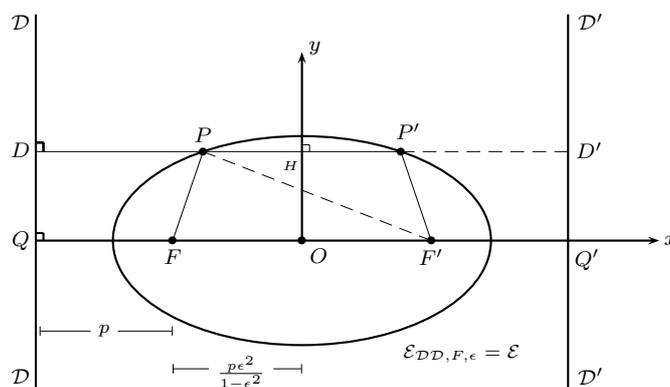


Figura 2.10 Focos y directrices de una elipse

“ \Rightarrow ” Sea $P \in \mathcal{E}$. Como la curva es simétrica respecto al eje y , la recta \overleftrightarrow{DP} corta a la elipse \mathcal{E} en P' y a $D'D'$ en D' , siendo P' el simétrico de P respecto al eje y y D' el simétrico de D respecto al eje y .

Como $P \in \mathcal{E}$, $\frac{PF}{PD} = \epsilon$, y $\frac{PF'}{PD'} = \epsilon$, siendo $P' \in \mathcal{E}$,

$$\frac{P'F}{P'D} = \epsilon. \tag{2.6}$$

Como $a = \frac{\epsilon p}{1 - \epsilon^2}$,

$$p = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{\epsilon} = \frac{a \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)}{\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}} = \frac{\frac{b^2}{a}}{\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}}.$$

O sea que:

$$p = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Problemas

En cada uno de los problemas que siguen se da un foco de una elipse respecto a los ejes xy y la ecuación de la directriz también respecto a los ejes xy . Se pide localizar el centro, calcular a y b y la longitud del lado recto. Situar los vértices, localizar el otro foco y con la ayuda del lado recto dibuje cuatro puntos de la curva. Encuentre la ecuación de la otra directriz respecto a los ejes xy paralelos a los ejes xy y con centro en el centro C de la curva. Finalmente halle la ecuación de la curva respecto a los ejes xy con origen en C y realizando una transformación de coordenadas, determine la ecuación de la elipse respecto a xy .

- 1) $F(2, 3)$ respecto a xy ; eje focal paralelo al eje y ; $DD: x = 4$; $\epsilon = \frac{1}{2}$.
- 2) $F(1, -2)$ respecto a xy ; eje focal paralelo al eje x ; $DD: x = 0$; $\epsilon = \frac{1}{3}$.
- 3) $F(1, 4)$ respecto a xy ; eje focal paralelo al eje y ; $DD: y = 8$; $\epsilon = \frac{1}{3}$.
- 4) $F(0, -2)$ respecto a xy ; eje focal paralelo al eje y ; $DD: x = 0$; $\epsilon = \frac{1}{3}$.

Ejercicio 2.2. Encuentre la ecuación de la curva que describe un punto que se mueve en el plano de modo que en todo momento su distancia al origen es $\frac{4}{5}$ de su distancia a la recta $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ (véase figura 2.13).

Se trata de una elipse de foco $F(0, 0)$, directriz DD :

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$$

y de excentricidad $\epsilon = \frac{4}{5}$. Vamos a encontrar su ecuación respecto a xy con origen en F .

Sus elementos se calculan así:

$$p = OQ = FQ = d(F, DD) = 4 \cos 45^\circ = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Si llamamos C al centro de la curva,

$$CF = \frac{\epsilon^2 p}{1 - \epsilon^2}.$$

Sus semiejes se calculan así:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\epsilon p}{1 - \epsilon^2} \\ b &= \frac{\epsilon p}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \end{aligned}$$

vii) $4x^2 + 9y^2 + 24x + 36y + 36 = 0$

2) En cada uno de los casos siguientes se conoce algunos elementos de una elipse que tiene eje focal paralelo al eje x o al eje y . Calcular los restantes elementos, p , ϵ , semiejes a y b , centro, focos, vértices, directrices, lado recto, ... Dibuje la curva y encuentre su ecuación respecto a xy .

- i) El centro es $C(-3, 2)$, eje focal paralelo al eje y , semiejes $b = 2$, $a = 1$.
- ii) Centro $C(-2, -1)$, eje focal paralelo al eje x , semiejes $a = 4$, $b = 2$.
- iii) Vértices en $(4, 2)$ y $(12, 2)$, eje focal paralelo al eje x , $b = 3$.
- iv) Focos en $(-2, 4)$ y $(6, 4)$, longitud del eje menor 6.
- v) Focos en $(-3, 0)$ y $(-3, 2)$, longitud del eje mayor 10.
- vi) Vértices en $(-2, 0)$ y $(-2, 26)$. Un foco está en $(-2, 1)$.
- vii) Un foco está en $(-2, 4)$, eje menor sobre la recta $x = 3$ y longitud del eje mayor 26.
- viii) Un foco está en $(-3, 3)$, un vértice en $(5, 3)$, longitud del eje menor 8.
- ix) Un foco en $(-3, -1)$, un vértice del eje menor en $(0, 3)$, eje focal paralelo al eje y .
- x) Un vértice en $(-8, 0)$, un vértice del eje menor en $(-4, 3)$, eje focal paralelo al eje x .

2.5 Expresiones de los radios focales. Otra definición de la curva

Consideremos la $\mathcal{E}_{\mathcal{D}\mathcal{D},F,\epsilon}$ y los ejes xy con origen en O (O es el punto medio de VV'). Sea $P(x, y)$ un punto de la curva. Sabemos que $\frac{PF}{PD} = \epsilon$, esto es,

$$P \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}\mathcal{D},F,\epsilon} \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $a = \frac{\epsilon p}{1 - \epsilon^2}$ y $b = \frac{\epsilon p}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$.

Sean F y F' los focos de la curva. Se une P con F y con F' . PF y PF' se llaman *radios focales* asociados al punto P . Figura (2.17)

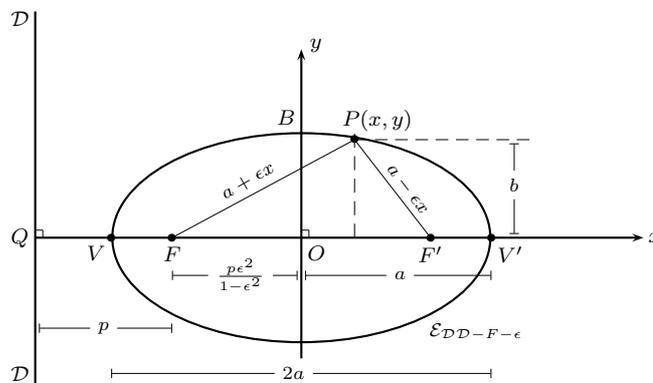


Figura 2.17 Radios focales PF' y PF asociados al punto P .

2.6 Construcciones de la elipse

2.6.1 Un método continuo

La propiedad anterior, ecuación (2.21), permite construir la elipse por un procedimiento continuo.

Supongase que conocemos la directriz $\mathcal{D}\mathcal{D}$, el foco y la excentricidad ϵ y que ya se han situado los focos F y F' en el plano de la curva (figura 2.19). Se toma una cuerda de longitud $2a$ donde $a = \frac{\epsilon p}{1 - \epsilon^2}$ y se fijan sus extremos en F y F' . Con la punta P de un lápiz se tensa la cuerda. Al mover el lápiz manteniendo en todo momento tensionada la cuerda el punto P traza la $\mathcal{E}_{\mathcal{D}\mathcal{D}, F, \epsilon}$

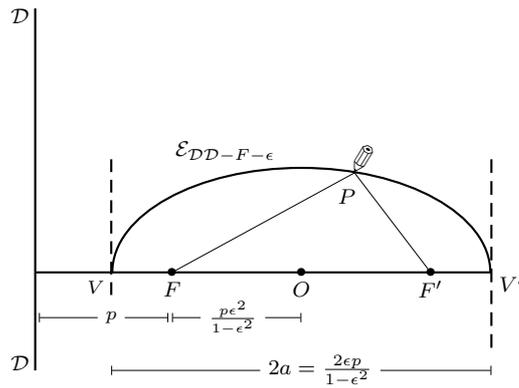


Figura 2.19 Construcción de la elipse de forma continua.

2.6.2 Un método para trazar la curva por puntos

Supongase que se conocen los focos F y F' y la longitud del eje mayor: $2a$. Se traza el círculo focal $\mathcal{C}(F', 2a)$ (figura 2.20). Luego se traza un radio $F'P'$ cualquiera de dicho círculo.

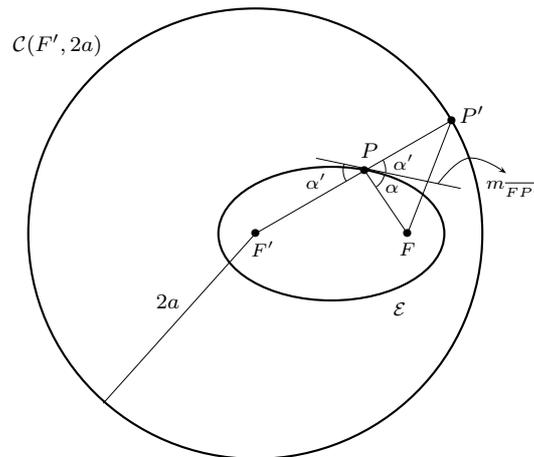


Figura 2.20 Construcción de puntos $P \in \mathcal{E}$ utilizando la circunferencia focal $\mathcal{C}(F', 2a)$.

Se une F con P' y se traza la mediatriz de FP' : $m_{\overline{FP'}}$, la cual corta a $F'P'$ en P . El punto P así construido está en la elipse pedida. Para demostrarlo, unamos P' con F . Como $P \in m_{\overline{FP'}}$, $PF = PP'$. Luego

$$PF' + PF = PF' + PP' = 2a$$

Las circunferencias $\mathcal{C}(F', 2a)$ y $\mathcal{C}(F, 2a)$ se llaman las **circunferencias focales de la elipse**. Al mover el punto P' sobre la circunferencia focal se obtienen suficientes puntos de la elipse que luego se unen obteniéndose así una forma aproximada de la curva. Además, como veremos luego, la tangente a la elipse por el punto P es la mediatriz de FP' : $m_{\overline{FP'}}$. En efecto, como $\alpha' = \alpha$, la recta $m_{\overline{FP'}}$ forma ángulos iguales con los radio vectores $\overline{PF'}$ y \overline{PF} asociados al punto P y eso basta, como será establecido dentro de poco, para garantizar que la $m_{\overline{FP'}}$ es la tangente a la curva por P .

2.6.3 Otra construcción de la elipse por puntos

Consideremos la $\mathcal{E}_{\mathcal{D}\mathcal{D}, F, \epsilon}$ y supongase que se ha localizado los vértices V y V' y los focos F y F' (figura 2.21). Se sabe que

$$P \in \mathcal{E} \Leftrightarrow PF + PF' = 2a$$

y que $VV' = 2a$. Se toma ahora un punto $P \in \overline{FF'}$. Es claro que

$$PV + PV' = 2a \tag{2.22}$$

Se toma la distancia PV con el compás la distancia PV y con centro en F se traza un arco de radio PV .

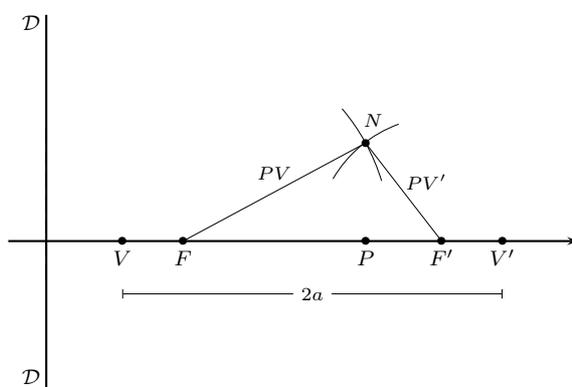


Figura 2.21 Construcción de puntos de la elipse con focos F, F' y vértices V, V' .

Luego, con centro en F' y radio PV' se traza otro arco que corta al anterior en el punto N . Como

$$NF + NF' = PV' + PV = 2a, \quad N \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}\mathcal{D}, F, \epsilon}$$

Consideremos la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2.23}$$

donde a y b son reales positivos y $a > b$.

De (2.23) se observa que el lugar es simétrico respecto a los ejes x e y y se tiene por tanto al origen como centro de simetría.

De (2.23),

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \tag{2.24}$$

Si $x = 0$, $y = \pm b$. Así que los puntos $B(0, b)$ y $B'(0, -b)$ (figura 2.22) pertenecen al lugar.
De (2.23)

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \quad (2.25)$$

Luego si $y = 0$, $x = \pm a$. O sea que los puntos $V'(-a, 0)$ y $V(a, 0)$ están en el lugar.
Del análisis de (2.24) y (2.25) se concluye que el lugar representado por 2.22 es una curva cerrada y continua confinada en el rectángulo de la figura (2.22).

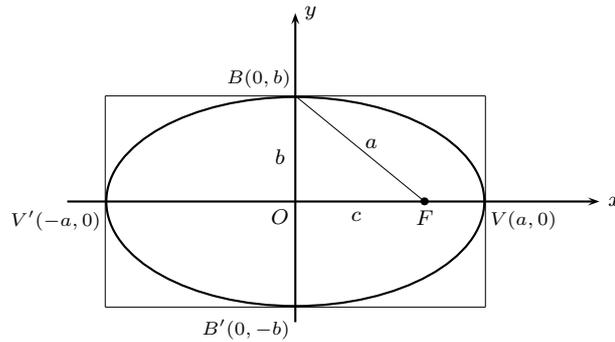


Figura 2.22 Elipse confinada en un rectángulo.

Como $a > b$, $a^2 > b^2$, $a^2 - b^2 > 0$. Definimos $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Es claro que $c < a$. Considerese en el eje x el punto F de abscisa c y sea $\epsilon = \frac{c}{a}$. Como $c < a$, $\epsilon = \frac{c}{a} < 1$ y como $\epsilon < 1$, $\frac{a}{\epsilon} > a$. Finalmente definase la recta \mathcal{DD} como paralela al eje y y de ecuación respecto a xy : $x = \frac{a}{\epsilon}$. Como $\frac{a}{\epsilon} > a$, la recta \mathcal{DD} está a la derecha de V .

Se afirma que el lugar representado por (2.23) es la $\mathcal{E}_{(\mathcal{DD}: x=\frac{a}{\epsilon}, F(c,0), \epsilon=\frac{c}{a})}$ donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $\epsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ y

$$\begin{aligned} p = d(F, \mathcal{DD}) &= \frac{a}{\epsilon} - c = \frac{a}{\frac{c}{a}} - c = \frac{a^2}{c} - c \\ &= \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{b^2}{c} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \end{aligned}$$

Para demostrarlo, sea $P(x, y)$ un punto que satisface (2.23). Se une P con F y se baja desde P , $\overline{PD} \perp \mathcal{DD}$ (figura 2.23).

Es ahora facil ver que $\frac{PF}{PD} = \epsilon$.

$$PF^2 = (x - c)^2 + y^2.$$

Pero $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Entonces

$$\begin{aligned} PF^2 &= x^2 + c^2 - 2cx + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \\ &= x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \end{aligned}$$

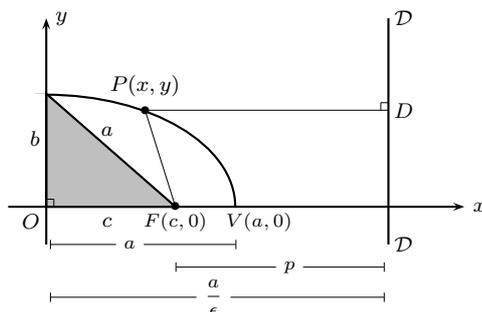


Figura 2.23

$$\begin{aligned}
 &= x^2 - 2cx + (a^2 - b^2) + b^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2 \\
 &= x^2 - 2cx + a^2 - x^2 + \epsilon^2 x^2 \\
 &= a^2 - 2a\epsilon x + \epsilon^2 x^2 = (a - \epsilon x)^2
 \end{aligned}$$

Luego,

$$PF = a - \epsilon x$$

Ahora, $PD = \frac{a}{\epsilon} - x$. Luego

$$\frac{PF}{PD} = \frac{a - \epsilon x}{\frac{a}{\epsilon} - x} = \epsilon$$

Ejercicio 2.5. Demuestre que si b y a son positivos, con $b > a$, la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ representa una elipse de focos en el eje y con $F(0, c)$ siendo $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $\epsilon = \frac{c}{b}$ y directriz DD' de ecuación respecto a xy : $y = \frac{b}{\epsilon}$ (figura 2.24).

La distancia foco-directriz se obtiene así

$$p = d(F, DD') = \frac{b}{\epsilon} - c = \frac{b}{\frac{c}{b}} - c = \frac{b^2}{c} - c = \frac{b^2 - c^2}{c} = \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Ejercicio 2.6. Se tiene dos puntos F y F' situados sobre el eje x , simétricos respecto a O y a una distancia $FF' = 2c$, c dado.

Se toma $a > 0$ y tal que $2a > 2c$. Demostrar que el lugar de los puntos P del plano tales que $PF + PF' = 2a$ tiene por ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ donde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ y por tanto $b < a$. Se trata entonces de una elipse de focos en $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, excentricidad $\epsilon = \frac{c}{a}$ y directriz DD' de ecuación $x = \frac{a}{\epsilon}$.

Ejercicio 2.7. Se tiene dos puntos F y F' en el eje y , simétricos respecto a O a una distancia $FF' = 2c$, c dado.

Sea $b > 0$ una constante dada con $2b > 2c$. Demostrar que el lugar de los puntos P del plano para los cuales $PF + PF' = 2b$ tiene ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ donde $a = \sqrt{b^2 - c^2}$ y por tanto $a < b$. O sea que el lugar es una elipse de focos en $F(0, c)$, $F'(0, -c)$, excentricidad $\epsilon = \frac{c}{b}$ y directriz DD' de ecuación $y = \frac{b}{\epsilon}$.

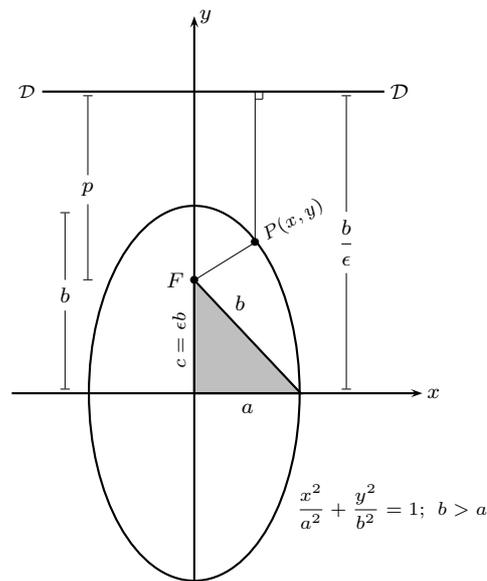


Figura 2.24 Elipse con focos sobre el eje y .

2.7 Una construcción más de la elipse

Supongase la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$ y nos piden dibujarla por puntos.

Procedemos como sigue: Se trazan los círculos principales que son dos circunferencias de centro en O y radios a y b (figura (2.25))

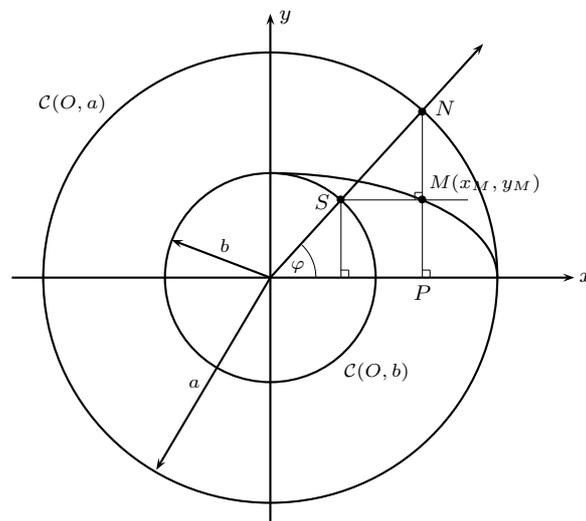


Figura 2.25 Puntos de la elipse , utilizando las circunferencias $\mathcal{C}(O, a)$ y $\mathcal{C}(O, b)$.

Se traza un rayo cualquiera con origen en O y por los puntos de intersección S y N con las circunferencias principales se traza paralelas a los ejes x e y respectivamente las cuales se cortan en $M(x_M, y_M)$. Entonces M está en la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Será suficiente con demostrar que $\frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = 1$.

Se tiene (figura 2.25)

$$y_M = MP = b \operatorname{sen} \varphi \quad x_M = OP = a \operatorname{cos} \varphi$$

$$\therefore \frac{y_M^2}{b^2} = \operatorname{sen}^2 \varphi \quad \frac{x_M^2}{a^2} = \operatorname{cos}^2 \varphi$$

y al sumar

$$\frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = 1.$$

2.8 Ecuaciones paramétricas de la elipse

Las ecuaciones de la sección anterior

$$x = x(\varphi) = a \operatorname{cos} \varphi \quad y = y(\varphi) = b \operatorname{sen} \varphi$$

constituyen una parametrización de la elipse. El ángulo φ se llama “la anomalía excentrica del punto M ” y su significado será estudiado más adelante.

Hay otra parametrización de la curva en la que las coordenadas de un punto de ella se expresan como funciones racionales del parámetro.

Definamos el parámetro $u = \tan \frac{\varphi}{2}$, donde φ es la anomalía excentrica del punto M .

Recordemos que

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha \quad \operatorname{cos}(2\alpha) = \operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

Si hacemos $\alpha = \varphi/2$, se obtiene

$$\operatorname{sen} \varphi = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\varphi}{2} \right) \operatorname{cos} \left(\frac{\varphi}{2} \right) \quad \operatorname{cos} \varphi = \operatorname{cos}^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right).$$

Luego,

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{2 \operatorname{sen} \left(\frac{\varphi}{2} \right) \operatorname{cos} \left(\frac{\varphi}{2} \right)}{\operatorname{cos}^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)} = \frac{2 \tan \left(\frac{\varphi}{2} \right)}{1 + \tan^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)} = \frac{2u}{1 + u^2}$$

$$\operatorname{cos} \varphi = \frac{\operatorname{cos}^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)}{\operatorname{cos}^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)} = \frac{1 - \tan^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)}{1 + \tan^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

Así que

$$x = x(u) = a \left(\frac{1 - u^2}{1 + u^2} \right)$$

$$y = y(u) = b \left(\frac{2u}{1 + u^2} \right), \quad u = \tan \left(\frac{\varphi}{2} \right)$$

es la parametrización buscada.

Ejercicio 2.8. Una regla de longitud $a+b$ donde $a > b$ resbala apoyandose sobre los ejes xy (figura 2.26). Se marca un punto M en la regla de modo que $AM = a$ y $MN = b$. Se perfora la regla en el punto M y se pone un lápiz en M . Demostrar que al resbalar la regla el punto M describe una elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

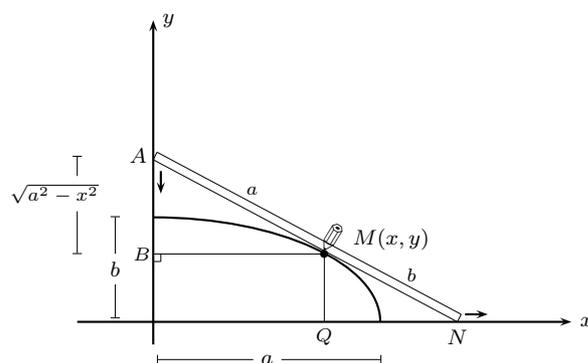


Figura 2.26 Elipse descrita por el punto M de la recta AN .

En toda posición de la regla se tiene

$$\triangle AMB \sim \triangle MQN, \quad \text{de donde} \quad \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{y}.$$

O sea que $\frac{a^2}{a^2 - x^2} = \frac{b^2}{y^2}$, esto es,

$$a^2 y^2 = a^2 b^2 - b^2 x^2$$

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

de donde,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Observación: Si el punto M es el punto medio de la regla, la curva trazada por el lápiz es una circunferencia de centro en el origen y radio $\frac{AN}{2}$.

2.9 Otra construcción de la elipse

El ejercicio anterior suministra otro método para construir la $\mathcal{E}_{D,F,\epsilon}$ en la que se conocen p y ϵ .

Se calcula inicialmente los semiejes a y b y se coloca dos ejes xy en el punto medio O de VV' . (Figura 2.27)

Se toma ahora un punto D en el eje x y con radio $a + b$ y centro en D , se traza un arco que corta al eje y en el punto C . Se une C con D y se toma $M \in \overline{CD}$ de modo que $CM = a$.

El punto M así construido está en la $\mathcal{E}_{D,F,\epsilon}$.

2.10 Ecuación de la elipse en coordenadas polares

- 1) Polo en F y eje polar el eje x .

2.23 Importancia de la elipse en la mecánica

Estudiando una gran cantidad de datos experimentales, Kepler (1571-1630) enunció los siguientes hechos sobre el movimiento de los planetas alrededor del sol conocida como *leyes de Kepler*

- 1) La órbita de cada planeta es una elipse con el sol en uno de sus focos.
- 2) El radio vector trazado desde el sol a un planeta barre arcos iguales en tiempos iguales.
- 3) Los cuadrados de los periodos de los planetas son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de la órbita elíptica

Newton (1642-1727) partiendo de estas tres leyes y utilizando elementos del cálculo diferencial e integral apenas recién creado por él pudo deducir la “ley de gravitación universal”: la fuerza que hace el sol sobre un planeta es una fuerza de atracción radial e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los centros del sol y del planeta y viene dado por $F = \frac{GmM}{r^2}$ donde m es la masa del planeta; M la masa del sol y G constante de gravitación universal.

Recíprocamente es posible, partiendo de la ley de gravitación universal deducir las tres leyes de Kepler. Esto es algo que haremos en este trabajo más adelante.

Uno de los objetos más importantes del sistema solar es el cometa Halley que tiene una excentricidad $\epsilon = 0,98$ y una órbita elíptica cuyo eje mayor es $\approx 36 ua$ (1ua=150 millones de kilómetros=semieje mayor de la órbita de la tierra \approx distancia tierra-sol. Con razón la luz tarda 8 minutos en venir a la tierra). El periodo de revolución de este cometa es de 76 años. Fue observado por el astrónomo Edmund Halley en 1682 el cual predijo que volvería a aparecer en 1758. Así efectivamente fué pero Halley no pudo verificar su predicción ya que murió en 1742. Esta periodicidad de la órbita del Halley fué uno de los sucesos mas convincentes en favor de la teoría de gravitación de Newton.

Problema.

Se tiene la elipse \mathcal{E} de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$.

- i) Se traza la tangente t por $P(x_1, y_1) \in \mathcal{E}$ la cual corta a la DD en L . Demostrar que $\widehat{PFL} = 90^\circ$. (Figura 2.64).
- ii) Se une O con P y se prolonga \overline{OP} . Se lleva la perpendicular por F a t . Demostrar que \overleftrightarrow{OP} y la perpendicular trazada se corta sobre la directriz.

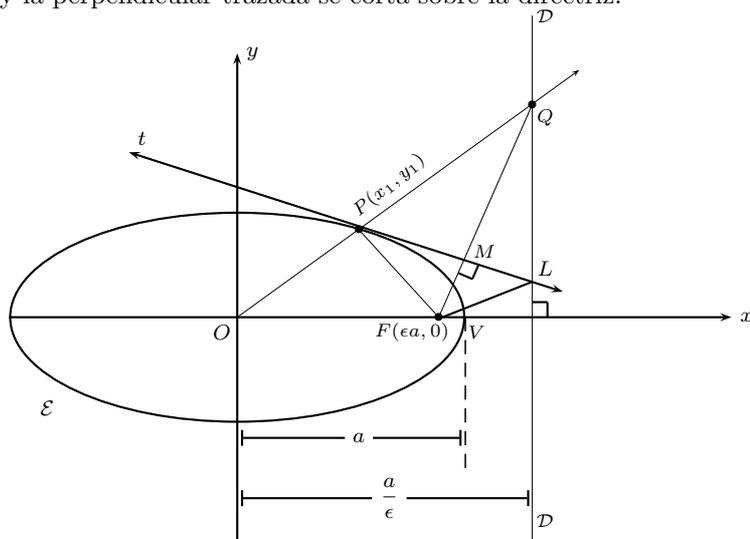


Figura 2.60

Solución.

- i) Ecuación de t : $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$. Localicemos a L (figura 2.60). $L\left(\frac{a}{\epsilon}, y_L\right)$ Para hallar a y_L vamos a la ecuación de t con $x = \frac{a}{\epsilon}$

$$\frac{\frac{a}{\epsilon}x_1}{a^2} + \frac{y_L y_1}{b^2} = 1$$

$$\frac{x_1}{a\epsilon} + y_L \frac{y_1}{b^2} = 1$$

$$\therefore y_L = \left(1 - \frac{x_1}{a\epsilon}\right) \frac{b^2}{y_1}$$

Así que

$$L\left(\frac{a}{\epsilon}; \frac{\epsilon a - x_1}{a\epsilon} \frac{b^2}{y_1}\right)$$

y por tanto

$$m_{\overleftrightarrow{FL}} = \frac{\left(\frac{\epsilon a - x_1}{a\epsilon}\right) \frac{b^2}{y_1} - 0}{\frac{a}{\epsilon} - \epsilon a}$$

$$m_{\overleftrightarrow{FP}} = \frac{y_1 - 0}{x_1 - \epsilon a}$$

Así que

$$\begin{aligned} m_{\overleftrightarrow{FP}} \cdot m_{\overleftrightarrow{FL}} &= \frac{y_1}{x_1 - \epsilon a} \left(\frac{\epsilon a - x_1}{a\epsilon}\right) \frac{b^2}{y_1} \left(\frac{\epsilon}{a - \epsilon^2 a}\right) \\ &= -\frac{b^2}{a(a - \epsilon^2 a)} = -\frac{b^2}{a^2(1 - \epsilon^2)} \\ &= -\frac{b^2}{a^2 \left(\frac{b^2}{a^2}\right)} = -1 \end{aligned}$$

lo que demuestra que $\overline{FP} \perp \overline{FL}$.

- ii) Sea Q el punto de encuentro de \overleftrightarrow{OP} con la perpendicular por F a t . Vamos a demostrar que $Q \in \mathcal{DD}$. Bastará con probar que $x_Q = \frac{a}{\epsilon}$.

Ecuación de \overleftrightarrow{OP}

$$y = \frac{y_1}{x_1} x \tag{2.38}$$

Ecuación de la perpendicular por F a t (\overleftrightarrow{FQ}). De la ecuación de t tenemos que

$$m_t = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

$$m_{\overleftrightarrow{FQ}} = -\frac{1}{m_t} = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}.$$

Luego

$$\overleftrightarrow{FQ}: y - 0 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - \epsilon a) \tag{2.39}$$

Resolviendo simultaneamente (2.38) y (2.39)

$$y_Q = \frac{y_1}{x_1} x_Q$$

$$y_Q = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x_Q - \epsilon a).$$

Igualando se tiene que

$$\frac{y_1}{x_1} x_Q = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x_Q - \epsilon a).$$

Luego

$$\begin{aligned} b^2 x_Q &= a^2 x_Q - \epsilon a^3 \\ x_Q &= \frac{\epsilon a^3}{a^2 - b^2} = \frac{\epsilon a^3}{\epsilon^2 a^2} = \frac{a}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Problema.

Se tiene un punto $P(h, k) \in \text{ext } \mathcal{E}$, esto es,

$$f(h, k) = a^2 k^2 + b^2 h^2 - a^2 b^2 > 0.$$

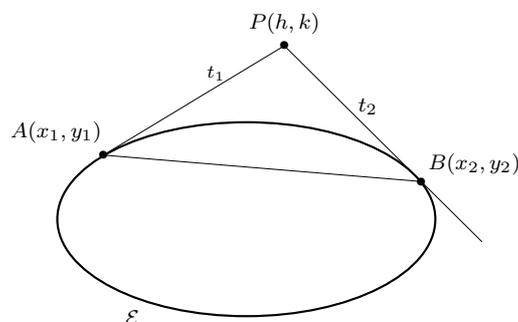


Figura 2.61 \overline{AB} cuerda de contacto de las tangentes t_1 y t_2 .

Desde P se trazan las tangentes t_1 y t_2 a \mathcal{E} . Demostrar que la cuerda de contactos \overline{AB} tiene ecuación

$$\frac{hx}{a^2} + \frac{ky}{b^2} = 1.$$

La demostración es la misma que se hizo para el caso de la parábola.

Problema.

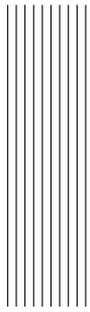
Se tiene la elipse $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$ y una cuerda focal \overline{AB} . Se trazan las tangentes desde A y B a \mathcal{E} . Demostrar que ellas se cortan sobre la directriz asociada al foco. O sea que las tangentes a \mathcal{E} por los extremos de una cuerda focal se cortan sobre la directriz asociada al foco.

Recíprocamente, las tangentes a la curva llevadas por un punto de la directriz determinan sobre la elipse una cuerda de contactos que pasa por el foco F .

Demostrar también que el segmento que une el punto de intersección de las tangentes con el foco es perpendicular a la cuerda focal. O sea que $\overline{FP} \perp \overline{AB}$. (Figura 2.62).

Solución.

Sean t_1 y t_2 las tangentes a \mathcal{E} desde $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ respectivamente (figura 2.62). Llamemos $P(h, k)$ al punto de intersección de t_1 y t_2 . Debemos demostrar que $P \in \mathcal{DD}$. Bastará con demostrar que $h = \frac{a}{\epsilon}$. (Figura 2.62).



Bibliografía

- S, Smith, Edward y Salkover, Meyer. (1954). *Analytic geometry*. John Wiley.
- Frere, Robert y Gastam, Bertrand. (1954). *Cours de geometrie analytique*. Imprimerie de la Salle.
- Mataix, Carlos. (1957). *Tratado de geometría analítica*. Dossat.
- De Greiff, Luís. (1968). *Geometría analítica plana y del espacio*. Bedout.
- N. V. Efimov. (1970). *Formas cuadráticas y matrices*. Moscú: Mir.
- B. Nievengłowski. (1894). *Cours de géométrie*. Paris: Gauthiers-Villars.
- H. Lehmann, Charles. *Geometría analítica*. París: Limvse.
- H. Kindle, Joseph. *Teoría y problemas de geometría analítica plana y del espacio*. Serie Schaum.

JAIME CHICA ESCOBAR

Ingeniero Civil (Universidad Nacional de Colombia). Matemático (Universidad de Antioquia). Profesor de Mecánica en la Universidad Nacional entre los años 1960-1972. Docente de tiempo completo en la facultad de ingeniería de la U de A entre los años 1972-1975. Docente jubilado del Departamento de Matemáticas de la U de A. Asesor de tesis de pregrado a algunos estudiantes de Matemáticas de la U de A. Ha participado en encuentros de Matemáticas de carácter regional y nacional como ponente. Entre sus publicaciones se destacan: *Introducción a la Geometría del Espacio*, *Monografía sobre las Cónicas*, *Los Lugares Geométricos Representados por la Ecuación de Segundo Grado en dos Variables*, *Veinte demostraciones del Teorema de Pitágoras* y *Álgebra de Tensores y Análisis Matricial*.

HERNANDO MANUEL QUINTANA ÁVILA

Matemático, Magister en Matemáticas Aplicadas, Especialista en Estadística, Administrador de Empresas Agropecuarias. Docente de tiempo completo de la Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas ITM.



Este libro se terminó de imprimir
Ediciones Diario Actual
en el mes de diciembre de 2013
La carátula se imprimió en propalcote C1S 240 gramos,
las páginas interiores en Bond alta blancura 60 gramos.
Las fuentes tipográficas empleadas son