



Juan Carlos Molina García

Tópicos de cálculo en varias variables con Matlab



FONDO
EDITORIAL
ITM



Tópicos de cálculo en varias variables con Matlab





Tópicos de cálculo en varias variables con Matlab

Juan Carlos Molina García



Institución Universitaria
Acreditada en Alta Calidad





Molina García, Juan Carlos

Tópicos de cálculo en varias variables con Matlab / Juan Carlos Molina García.
-- 1a ed. -- Medellín : Instituto Tecnológico Metropolitano, 2016.
233 p. -- (Textos académicos)

Incluye referencias bibliográficas
ISBN 978-958-8743-91-2

1. Cálculo (Matemáticas) 2. Matlab (Lenguaje de programación) I. Tít. II. Serie

515.028 5 SCDD 21 ed.

Catalogación en la publicación - Biblioteca ITM

TÓPICOS DE CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES CON MATLAB

© Instituto Tecnológico Metropolitano -ITM-

Primera edición: noviembre de 2016

Publicación electrónica para consulta gratuita

Autor

Juan Carlos Molina García

Rectora

María Victoria Mejía Orozco

Directora Editorial

Silvia Inés Jiménez Gómez

COMITÉ EDITORIAL

Eduard Emiro Rodríguez Ramírez, MSc.

Jaime Andrés Cano Salazar, PhD.

Silvia Inés Jiménez Gómez, MSc.

Yudy Elena Giraldo Pérez, MSc.

Viviana Díaz, Esp.

Corrección de estilo

Lila M. Cortés Fonnegra

Asistente Editorial

Viviana Díaz

Colaboradora

Diana Marroquín

Diseño y diagramación

Leonardo Sánchez Perea

Hecho en Medellín, Colombia

INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO

Fondo Editorial –ITM

Calle 73 No. 76A 354

Tel.: 4405197

<http://fondoeditorial.itm.edu.co/>

www.itm.edu.co

Medellín – Colombia

Las opiniones originales y citas del texto son de la responsabilidad del autor. El ITM salva cualquier obligación derivada del libro que se publica. Por lo tanto, ella recaerá única y exclusivamente sobre el autor.

Agradecimientos

Este libro, fruto de mi experiencia docente de los últimos años, ha contado con el apoyo de las directivas de la Facultad de Ciencias Exactas y Aplicadas del INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO, ITM, a quienes les manifiesto un cordial mensaje de agradecimiento. De igual forma, al profesor Luis Eduardo Naspirán, por sus aportes en la concepción y acompañamiento en el desarrollo de la presente obra. Agradezco también a todas las personas que han colaborado en la revisión y edición de este texto, el cual está orientado al beneficio académico de la comunidad, tanto docente como estudiantil.

Juan Carlos Molina García

Contenido

PRESENTACIÓN	7
Generalidades de Matlab	
1.1 Tips importantes para comenzar	9
1.2 Expresiones simbólicas	16
1.3 Ecuaciones y su visualización gráfica	22
1.4 Scripts con Matlab: creación de archivos .m	28
1.5 Vectores y matrices	33
1.6 Gráficas en el plano con Matlab	48
Rectas y planos en el espacio	
2.1 Rectas	68
2.2 Planos	72
Superficies en el espacio tridimensional	
3.1 Cilindros	80
3.2 Funciones de dos variables	84
3.3 Curvas de nivel de una superficie	93
3.4 Funciones en coordenadas esféricas y cilíndricas	102
Derivación parcial y gradiente	
4.1 Derivadas parciales de funciones de dos variables	113
4.2 Gradiente y derivadas direccionales	118
4.3 Campo vectorial gradiente y curvas de nivel	125

Planos tangentes a una superficie	135
5.1 Aproximaciones lineales	135
5.2 Diferenciabilidad	137
Extremos de funciones de varias variables	142
6.1 Criterio de la segunda derivada parcial	142
6.2 Multiplicadores de Lagrange	150
Funciones vectoriales	155
7.1 Curvas en el plano y en el espacio	155
7.2 Vectores velocidad y aceleración	159
7.3 Vectores tangente y normal unitario, longitud de una curva	163
7.4 Curvatura y componentes normal y tangencial de la aceleración	168
Integración múltiple	
8.1 Integrales dobles sobre rectángulos, integrales iteradas	174
8.2 Integrales sobre regiones generales	179
8.3 Integrales dobles en coordenadas polares	186
8.4 Integrales triples	194
8.5 Integrales de línea	200
8.6 Independencia de la trayectoria	207
8.7 Teorema de Green	211
8.8 Integrales de superficie y teorema de la divergencia	216
8.9 Teorema de Stokes	222
Lista de Tablas	226
Lista de Figuras	227
Referencias bibliográficas	231
Referencias electrónicas	233



PRESENTACIÓN

Las herramientas informáticas son indispensables no solo a la hora de ejecutar extensas operaciones matemáticas, sino también en el análisis de las variaciones y aplicaciones de los distintos conceptos y procedimientos matemáticos. En el trabajo diario, en matemáticas, aparecen expresiones o procedimientos que desde el punto de vista operativo son complejos de manejar, bien sea por su extensión o por la gran cantidad de variables y de cálculos que requieren. El programa Matlab surge como una herramienta computacional caracterizada por su gran desempeño en el cálculo numérico, manejo de expresiones y ayudas para la visualización y graficación. El presente texto pretende aproximar los docentes y estudiantes a este entorno computacional, con el propósito de establecer la facilidad de su utilización en el manejo de expresiones y procedimientos que se derivan de aplicaciones matemáticas de diversa naturaleza. De manera particular, se abordarán temas del cálculo de varias variables y la forma de operacionalizarlos desde la herramienta informática, para realizar cálculos y contrastar resultados. En esta perspectiva, el texto apunta a generar estrategias que permitan a los lectores hacer una aproximación comprensiva de las instrucciones básicas del Matlab para el manejo de funciones de varias variables y los procesos de derivación e integración multivariada.

Las estrategias planteadas para el logro de los objetivos propuestos, se relacionan con la descripción del entorno de trabajo básico de Matlab y la ilustración de los procedimientos de aplicación de los comandos predefinidos para el manejo de relaciones matemáticas e interpretación de resultados.

La ruta didáctica del libro parte de identificar las potencialidades del software a través de un recorrido por su estructura general y la descripción de las instrucciones que facilitan su utilización. Para esto se relacionan los comandos básicos que permiten la entrada, procesamiento y presentación de la información. Los ejemplos son claves en este proceso, ya que acercan al lector a la forma de acceder a otros procedimientos en que intervienen estructuras

matemáticas semejantes. Las actividades de práctica propuestas varían en nivel de complejidad, lo cual favorece la participación activa del lector, el contraste de resultados y la identificación de campos de aplicación.

Para lograr un mejor aprovechamiento del texto, se sugiere al lector estar frente a su equipo de cómputo en el que previamente debe tener instalado el software Matlab. El libro está diseñado para confrontar los resultados y resolver las actividades de práctica una vez se hayan comprendido los conceptos y las instrucciones que se detallan en cada sección del cuerpo del escrito.



Lista de Tablas

Tabla 1.	Operaciones básicas en Matlab	10
Tabla 2.	Expresiones simbólicas	12
Tabla 3.	Algunas funciones predefinidas en Matlab	13
Tabla 4.	Formatos de salida para un valor racional	15
Tabla 5.	Funciones aplicables a expresiones simbólicas	18
Tabla 6.	Límites, derivadas e integrales sobre expresiones simbólicas	20
Tabla 7.	Funciones predefinidas para generar matrices	39
Tabla 8.	Operadores para cálculos elemento a elemento	42
Tabla 9.	Comandos para argumentos escalares y vectoriales	43
Tabla 10.	Funciones predefinidas para generar vectores	45
Tabla 11.	Instrucciones de chequeo sobre vectores o matrices	46
Tabla 12.	Evaluación de la función $f(x)=e^{-x/10}\text{sen}(2x)$	49
Tabla 13.	Características para gráficas en el plano	53
Tabla 14.	Operadores relacionales de Matlab	56
Tabla 15.	Operadores lógicos en Matlab	56
Tabla 16.	Evaluación de las funciones $x=2\cos(t)$, $y=2\text{sen}(t)$	60
Tabla 17.	Interpretación de salida meshgrid	75
Tabla 18.	Mapas de colores para graficado en 3D	78
Tabla 19.	Criterio de la segunda derivada para extremos de funciones $f(x,y)$	143
Tabla 20.	Extremos de $f(x,y)=x^3+y^3-3x^2-3y^2-9x$, por criterio de la segunda derivada	144
Tabla 21.	Extremos de $f(x,y)=(-3y)/(x^2+y^2+1)$	147
Tabla 22.	Evaluación de la función vectorial $r(t)=2\cos(t)i+(1+\text{sent})j+tk$	157

Lista de Figuras

Figura 1.	Gráfica de las relaciones $y=-2x+4$, $y=x-5$ con la función ezplot	24
Figura 2.	Curva asociada con el polinomio $p(x)=x^3-3x^2-13x+15$	27
Figura 3.	Relación $h=-4.9t^2+980t$ con la función ezplot	32
Figura 4.	Gráfica de la función $f(x)=e^{(-x/10)} \text{sen}(2x)$ con la función plot	50
Figura 5.	Función trascendente	51
Figura 6.	Función $f(x)=e^{(-x/10)} \text{sen}(2x)$ con la función plotyy y atributo stem	52
Figura 7.	Funciones $f(x)=1+e^x$, y , $g(x)=x^2+e^{(-x)}$ sobre un mismo plano	54
Figura 8.	Gráficos sobre figuras diferentes	55
Figura 9.	Gráfica de función definida por tramos	58
Figura 10.	Función definida por segmentos o tramos	59
Figura 11.	Gráfica de las relaciones paramétricas $x=2\cos(t)$, $y=2\text{sen}(t)$	61
Figura 12.	Curva $x=2\cos(3t)$, $y=3\text{sen}(5t)$ con la opción de graficado comet	62
Figura 13.	Elementos del plano polar	63
Figura 14.	Gráfica de $r(\theta) = 4\cos(\theta)+2$	64
Figura 15.	Gráfica de la relación $r(\theta) = 1 + \text{sen}2\theta \cos2\theta$	65
Figura 16.	Gráfica de la relación $r(\theta)=4 \cos(3\theta)$ con la función ezpolar	66
Figura 17.	Recta en el espacio	68
Figura 18.	Recta en el espacio tridimensional	70
Figura 19.	Recta en el espacio que pasa por los puntos $(2,0,6)$ y $(-3,0,1)$	71
Figura 20.	Plano en el espacio tridimensional	72
Figura 21.	Coordenadas cartesianas de un punto en el espacio	73
Figura 22.	Valores para gráfica en el espacio	75
Figura 23.	Gráfica del plano $z=(2+2x-4y)/3$ con función mesh	76
Figura 24.	Gráfica del plano $z=(2+2x-4y)/3$, con la función mesh y surf	77

Figura 25. Gráfica tridimensional del plano $x=3$	79
Figura 26. Cilindro logarítmico generado con la función stem3	81
Figura 27. Cilindro cosenoidal generado con la función stem3	81
Figura 28. Gráfica del cilindro $x=\text{sen}(z)$ mediante malla sobre el plano yz	82
Figura 29. Malla refinada para una superficie en el espacio	85
Figura 30. Superficie $z=f(x,y)$, con cambio de características	86
Figura 31. Gráfica de una superficie con la función ezsurf	87
Figura 32. Superficie en el espacio con atributo colorbar	88
Figura 33. Superficie en escala de grises	89
Figura 34. Sección de un hiperboloide de dos hojas para z positivo	91
Figura 35. Curvas de nivel de la superficie $z=\sqrt{x^2+y^2}+4$	94
Figura 36. Tres curvas de nivel de la superficie $z=\sqrt{x^2+y^2}+4$	95
Figura 37. Curvas de nivel de $z=\sqrt{x^2+y^2}+4$ levantadas desde el plano xy	97
Figura 38. Gráfica de $z=\sqrt{x^2+y^2}+4$ con las funciones mesh y meshc	98
Figura 39. Gráfica de superficie con la función ezmeshc	99
Figura 40. Gráfica de la relación $x^5-y^5=3xy$ con la función contour	100
Figura 41. Cuatro versiones de la gráfica de $z=2/3 x^2-4 y $	101
Figura 42. Sistema de coordenadas cilíndricas	103
Figura 43. Cono en coordenadas cilíndricas	104
Figura 44. Superficie en coordenadas cilíndricas con atributo colormap copper	105
Figura 45. Superficie en coordenadas cilíndricas con función meshc	106
Figura 46. Superficie $z=xe^{-(x^2+y^2)}$, con cambio de bordes y color	107
Figura 47. Gráfica de la relación $-(x^2)/9-y^2+z^2=1$	108
Figura 48. Sistema de coordenadas esféricas	109
Figura 49. Gráfica de $z=3+\sqrt{9-x^2-y^2}$ en coordenadas esféricas	110
Figura 50. Derivada parcial: razón de cambio en dirección a los ejes x e y	114
Figura 51. Gráfica de vector gradiente sobre curva de nivel	120

Figura 52. Derivada direccional como razón de cambio en la dirección \hat{u}	121
Figura 53. Superficie y sus curvas de nivel	126
Figura 54. Gráfica de un campo vectorial gradiente	127
Figura 55. Campo vectorial gradiente asociado a la función $f(x,y)=4+x^3+y^3-3xy$	128
Figura 56. Campo vectorial gradiente asociado con la función $f(x,y,z)=xy^2-yz^3$	130
Figura 57. Campo vectorial gradiente y curvas de nivel de $f(x,y)=-x^2-y^2$	131
Figura 58. Campo vectorial gradiente y curvas de nivel de $f(x,y)=4+x^3+y^3-3xy$	132
Figura 59. Gráfica de la superficie $f(x,y)=4+x^3+y^3-3xy$	133
Figura 60. Plano que aproxima la superficie $f(x,y)=3+x^2+y^2$ en $(-1,2)$	136
Figura 61. Plano tangente a una superficie	138
Figura 62. Plano $z=-8x-4y+13$ que aproxima a superficie en $(1,2)$	139
Figura 63. Gráfica de la función $f(x,y)=x^3+y^3-3x^2-3y^2-9x$	144
Figura 64. Curvas de nivel de la superficie $f(x,y)=x^3+y^3-3x^2-3y^2-9x$	145
Figura 65. Curvas de nivel de la superficie $f(x,y)=x^3+y^3-3x^2-3y^2-9x$	146
Figura 66. Función $z=f(x,y)$ desde ángulos distintos	148
Figura 67. Curvas de nivel de la superficie $f(x,y)=(-3y)/(x^2+y^2+1)$	149
Figura 68. Superficie $f(x,y)=(-3y)/(x^2+y^2+1)$ y sus curvas de nivel	149
Figura 69. Extremos de una función sujetos a una restricción	151
Figura 70. Cilindro $x+y-2=0$, perpendicular a la superficie $f(x,y)=9-x^2-y^2$	152
Figura 71. Curvas de nivel y curva restrictiva	154
Figura 72. Curva $\vec{r}(t)$ en el espacio	155
Figura 73. Proyección de una curva sobre el plano xy	156
Figura 74. Gráfica de la curva $r(t)$ mediante la función <code>ezplot3</code>	157
Figura 75. Curva en espiral	158
Figura 76. Vectores velocidad tangentes y vectores aceleración	161
Figura 77. Vector tangente unitario $T(t)$ sobre una curva suave	163

Figura 78. Vectores tangentes a una curva en el espacio	165
Figura 79. Vectores normal y tangente unitarios en un punto sobre una curva	166
Figura 80. Función vectorial $r(t)$ y su proyección sobre un plano	169
Figura 81. Vector aceleración en su descomposición tangencial y normal	170
Figura 82. Vectores posición, tangente y normal unitarios sobre una curva	172
Figura 83. Sólido limitado por una región R y una superficie $z=f(x, y)$	174
Figura 84. Regiones tipo I y tipo II en el plano xy	180
Figura 85. Región D sobre el plano xy	181
Figura 86. Cambio de tipo de región de integración	184
Figura 87. Región triangular en el plano	184
Figura 88. Representaciones de rectángulos polares	187
Figura 89. Área de un sector circular	187
Figura 90. Partición de una región en rectángulos polares	188
Figura 91. Diferenciales en el plano polar	189
Figura 92. Regiones tipo I y II en el plano polar	191
Figura 93. Región sólida en el espacio	196
Figura 94. Tetraedro y su proyección sobre el plano xy	198
Figura 95. Partición sobre una curva	200
Figura 96. Clases de subconjuntos en el plano	208
Figura 97. Curva simple cerrada recorrida positivamente	211
Figura 98. Orientación positiva de la frontera de una región no simplemente conexa	212
Figura 99. Región no simplemente conexa orientada positivamente	213
Figura 100. Superficie asociada a un plano en el primer octante	223



Referencias bibliográficas

- Alarcón, S.; González, M. y Quintana, M. (2008). *Cálculo diferencial, límites y derivadas*. Medellín: Fondo Editorial ITM.
- Álvarez, Y. y Díaz, G. (2007). *Funciones reales con MatLab*. Medellín: Fondo Editorial ITM.
- Arnold, D. (2014). *Matlab Activities for Multivariable Calculus*. Recuperado de <http://msemac.redwoods.edu/~darnold/math50c/matlab/>. [Consultado el 26 de marzo de 2015].
- Álvarez, Y. y Agudelo, J. (2013). *Cálculo Integral con sucesiones y series. Guía de trabajo independiente*. Segunda Ed. Medellín: Fondo Editorial ITM.
- Arboleda, D. y Álvarez, R. (2006). *MatLab aplicaciones a las matemáticas básicas*. Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.
- Báez, D. (2006). *Matlab con aplicaciones a la ingeniería, física y finanzas*. Alfaomega.
- Córdoba, F. y Ardila, P. (2014). *Módulo de geometría vectorial*. Medellín: Fondo Editorial ITM.
- Duffy, D. (2011). *Advanced engineering mathematics with MATLAB*. Third Edition. CRC Press.
- Gilat, A. (2006). *Matlab: una introducción con ejemplos prácticos*. Barcelona: Reverté.
- Gil, M. (2003). *Introducción rápida a Matlab y Simulink para ciencia e Ingeniería*. Madrid: Ediciones Díaz de Santos.
- Molina, J. (2009). Recursos didácticos con Matlab: interfaz gráfica de usuario para caracterizar curvas en el espacio tridimensional. *TecnoLógicas, Edición Especial*, 71-84.

- Molina, J.; Ramírez, I. y Madrigal, J. (2011). Mediadores para el aprendizaje de las ciencias básicas a través de interfaces gráficas. *Entre Ciencia e Ingeniería*, 8, 148-160.
- Molina, J. (2013). *Mediación y mediadores en la caracterización de funciones vectoriales a partir de las tecnologías del aprendizaje y el conocimiento*. En VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática CIBEM. Montevideo.
- Molina, J. y Ramírez, I. (2012). *Diseño de herramientas para la solución de problemas de álgebra lineal que incluyen matrices*. En IV congreso internacional en formación y modelación en ciencias básicas. Medellín.
- Molina, J. y Naspirán L. (2011). *Tratamiento de problemas de optimización mediante cálculo vectorial con interfaces GUIDE de Matlab*. En III congreso internacional en formación y modelación en ciencias básicas. Medellín.
- Moore, H. (2007). *MATLAB para ingenieros*. México: Pearson Educación.
- Palm, W. (2005). *Introduction to MATLAB for Engineers*. Boston: McGraw-Hill.
- Pratap, R. (2009). *Getting started with MATLAB: A quick introduction for scientists and engineers*. New York: Oxford University Press.
- Purcell, E.; Varberg, D. y Rigdon, S. (2007). *Cálculo diferencial e integral*. Novena Ed. México: Prentice Hall.
- Siciliano, A. (2008). *MATLAB: Data analysis and visualization*. Singapore: World Scientific.
- Stewart J. (2008). *Cálculo trascendentes tempranas* (Sexta ed). México: Cengage Learning.
- Zill, D. y Dewar, J. (2008). *Matemáticas avanzadas para Ingeniería* (3ªed). Vol. 2: *Cálculo vectorial, análisis de Fourier y análisis complejo*. México: McGraw Hill.
- Zill, D. (2002). *Cálculo con geometría analítica*. Grupo Editorial Iberoamérica.



Referencias electrónicas

http://www.mathworks.com/academia/?s_tid=gn_acad

http://www.mathworks.com/academia/examples.html?s_tid=acmain_st-pop-exm_gw_bod

http://www.mathworks.com/academia/student_center/tutorials/?s_tid=acmain_st-pop-tut_gw_bod

http://www.mathworks.com/academia/courseware/?s_tid=acmain_ed-pop-cw_gw_bod

http://www.mathworks.com/academia/webinars.html?s_tid=acmain_ed-pop-web_gw_bod

Juan Carlos Molina García

Matemático y Magíster en Educación. Profesor asociado de la Facultad de Ciencias Exactas y Aplicadas del INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO, ITM. Se desempeña como líder de la línea de investigación en Didáctica, medios y ambientes de enseñanza para el aprendizaje de las ciencias, del ITM.

juanmolina@itm.edu.co



Tópicos de Cálculo en varias variables con Matlab

Fuente tipográfica: Ubuntu,
12 puntos en texto corrido y en 17 puntos en títulos y subtítulos

Este texto académico presenta la integración de conceptos del cálculo en variables y su desarrollo a través de las herramientas que ofrece el software Matlab. Asimismo, hace un recorrido por los temas centrales contemplados en el microcurrículo de la asignatura de «Cálculo vectorial», que ofrece el ITM para los estudiantes de ingeniería. El texto, visto como recurso didáctico, hace énfasis en ejemplos y modos de aplicación de los distintos comandos y funciones de que dispone la herramienta computacional, y traza una ruta de apoyo didáctico, que favorece tanto el contraste de resultados como la comprensión y aplicación de conceptos matemáticos en el espacio tridimensional. Esta obra se constituye en un aporte para el mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Ciencias Básicas.

This academic work presents the integration of the concepts of calculus in variables and their evolution due to tools offered by the Matlab software. Similarly, this work reviews the main topics of "Vector calculus", a subject that served as part of the engineering programs at ITM. This work, seen as a teaching tool, is focused on examples and ways to apply different commands and functions of the aforementioned software, and it serves as a learning guide which will be a support for comparing results as well as understanding and applying mathematical concepts in the tridimensional space. This work contributes to improving the learning and teaching processes of Basic Sciences.

