Textos Académicos

FONDO EDITORIAL ITM

PROBLEMAS RESUELTOS DE ELECTROMAGNETISMO

Volumen I

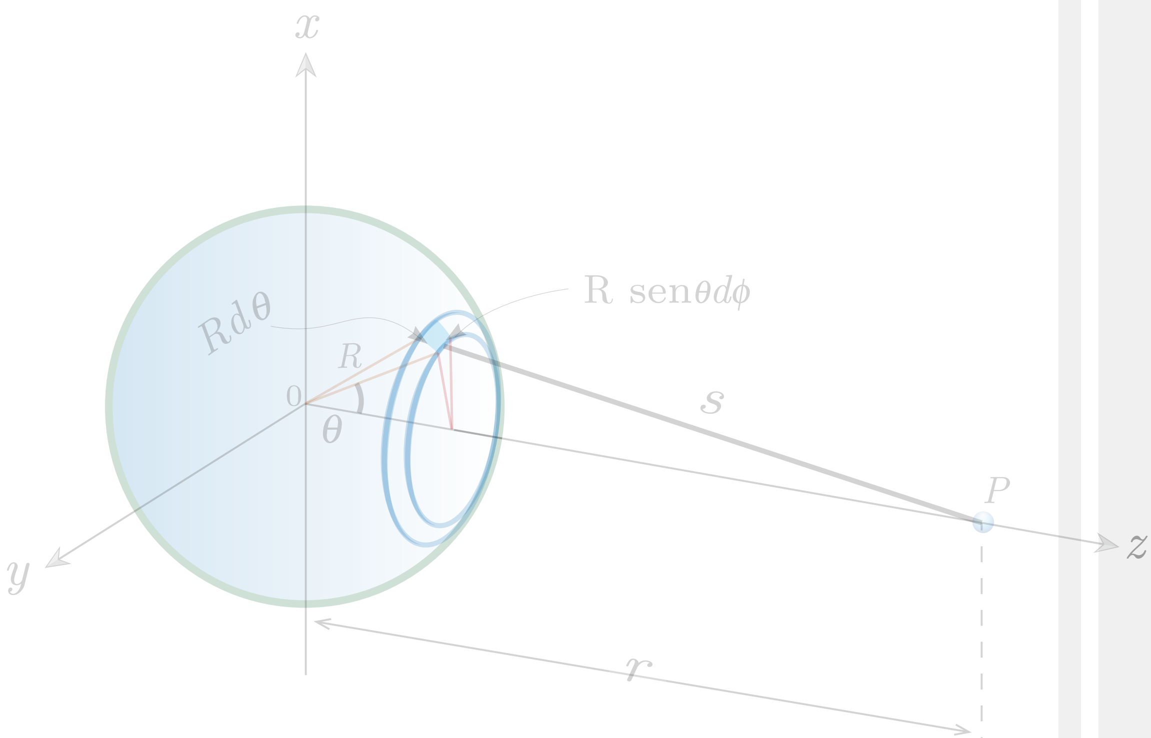
ELECTROSTÁTICA

Jorge David Garcés Gómez
Lope Alberto Ciro López

PROBLEMAS RESUELTOS DE ELECTROMAGNETISMO

Volumen I

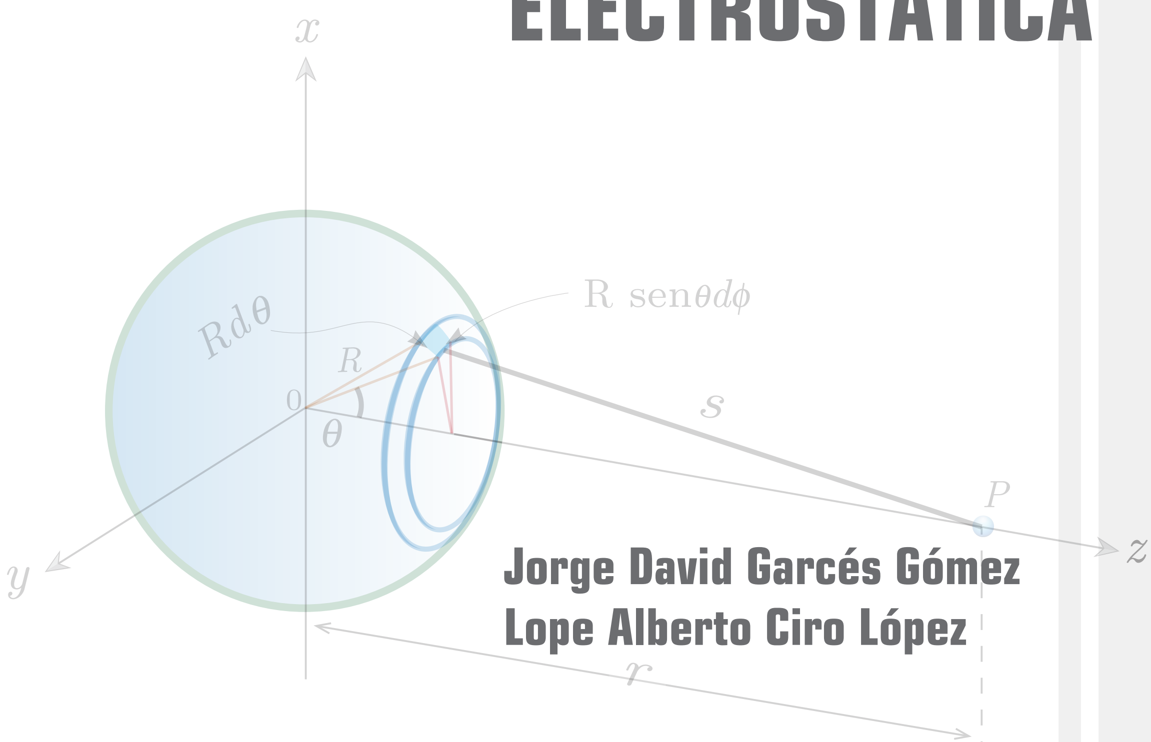
ELECTROSTÁTICA



PROBLEMAS RESUELTOS DE ELECTROMAGNETISMO

Volumen I

ELECTROSTÁTICA



Jorge David Garcés Gómez
Lope Alberto Ciro López

Garcés Gómez, Jorge David.
Problemas resueltos de electromagnetismo. Volumen I Electrostática / Jorge David Garcés Gómez, Lope Alberto Ciro López, – 1a ed. – Medellín : Instituto Tecnológico Metropolitano, 2019.
243 p. – (Textos Académicos)

1. Electromagnetismo 2. Electrostática I. Ciro López, Lope Alberto. II. Tít. III. Serie
537 SCDD Ed. 21

Catalogación en la publicación - Biblioteca ITM

Problemas resueltos de electromagnetismo. Volumen I Electrostática

EDICIÓN: septiembre de 2019
ISBN: 978-958-5414-88-4 (html)
ISBN: 978-958-5414-86-0 (ePub)
ISBN: 978-958-5414-87-7 (pdf)
https://doi.org/10.22430/9789585414884

AUTORES
Jorge David Garcés Gómez
Lope Alberto Ciro López

CORRECTORA DE TEXTOS
Lila María Cortés Fonnegra

ASISTENTE EDITORIAL
Viviana Díaz

DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN
Alfonso Tobón Botero
Jorge David Garcés

IMAGEN DE CARÁTULA
© Pixaboy/Boboshow

Editado en Medellín, Colombia
Sello editorial Fondo Editorial ITM
Instituto Tecnológico Metropolitano
Calle 73 No. 76A 354
Tel.: (574) 440 5100 Ext. 5197 - 5382
www.itm.edu.co
fondoeditorial@itm.edu.co

Prólogo

Este libro es una ayuda para el estudio y el aprendizaje de los procesos de análisis y solución, aplicados a problemas de campos electrostáticos y afines.

Se presentan soluciones a problemas que corresponden a temas como la Ley de Coulomb y sus aplicaciones; fuerzas eléctricas debidas a distribuciones de cargas continuas y discretas; campo y potencial eléctricos debidos a distribuciones de cargas continuas y discretas; una estructura eléctrica muy importante es el dipolo eléctrico, del cual se resuelven problemas sobre su campo y potencial eléctricos, como también sus líneas de fuerza. Merece especial mención la Ley de Gauss que se aplica tanto en forma integral como diferencial.

Otros temas fundamentales son la energía de los campos electrostáticos, medios materiales, polarización de dieléctricos, electrostática en dieléctricos, condiciones de frontera, problemas con valor en la frontera, soluciones a la ecuación de Laplace para potenciales y método de imágenes.

Las soluciones a los problemas se desarrollan en general de manera explícita, esto es, no se omiten pasos con el fin de llevar al estudiante paso a paso hasta la solución final. Este libro acompaña al estudiante que esté cursando las asignaturas de Campos Electromagnéticos o Electromagnetismo, entre otras. Para llevar a cabo la solución a problemas de los temas anunciados arriba, se hace acopio de prerrequisitos como el cálculo diferencial, integral y vectorial, en una, dos y tres variables.

El formato del libro es bastante informal, puesto que lo que se busca es brindar acompañamiento a los estudiantes en sus competencias para enfrentar las soluciones a problemas y situaciones particulares de la física de los campos electrostáticos. No es un libro donde se expone la fundamentación científica de la electrostática o campos electrostáticos, ya que para este fin hay abundancia de textos; en cambio, libros dedicados a ilustrar cómo se solucionan los problemas, son pocos.

El libro presenta al final los apéndices A, B y C, donde se realiza la solución a ciertos pasos que apenas se citan en la solución formal de un determinado problema.

Agradecemos especialmente a los profesores Mauricio Velásquez, catedrático del Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín; y John Jairo Zuluaga, profesor de la Universidad de Antioquia, por sus contribuciones en la digitación del manuscrito y solución de algunos problemas, respectivamente.

Serán bien recibidas todas las sugerencias de profesores y estudiantes que tengan como fin mejorar la calidad del libro en cualquiera de sus aspectos.

Jorge David Garcés Gómez
Lope Alberto Ciro López

Contenido

Capítulo 1

FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA VECTORIAL

1.1 Elementos del álgebra vectorial

Un vector $\vec{A}$ en tres dimensiones se expresa en términos de los vectores unitarios $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$ y $\hat{u}_z$, así: $\vec{A} = A_x\hat{u}_x + A_y\hat{u}_y + A_z\hat{u}_z$, donde los coeficientes A_x, A_y y A_z se conocen como componentes rectangulares o componentes cartesianos. A_x es la componente rectangular del vector $\vec{A}$ en el eje de las x, A_y es la componente rectangular en el eje de las y, y A_z es la componente rectangular en el eje de las z. La Figura 1.1 muestra al vector $\vec{A}$ en el origen del sistema de coordenadas cartesianas y los ángulos que definen su dirección con respecto a cada uno de los ejes.

Los cosenos de los ángulos α_x, α_y y α_z se denominan los cosenos directores del vector $\vec{A}$.

$$\vec{A} = \left|\vec{A}\right| \cos\alpha_x\hat{u}_x + \left|\vec{A}\right| \cos\alpha_y\hat{u}_y + \left|\vec{A}\right| \cos\alpha_z\hat{u}_z. \tag{1.1}$$

Un vector unitario en la dirección del vector $\vec{A}$ se define como $\hat{u}_A \equiv \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$, con $\left|\vec{A}\right|$ igual a la magnitud del vector $\vec{A}$.

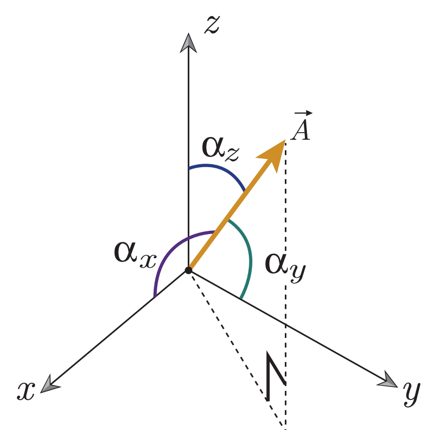


Figura 1.1. Dirección del vector $\vec{A}$ en 3-D

La expresión (1.1) se puede dividir a ambos lados por $\left|\vec{A}\right|$, así:

$$\frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|} = \cos\alpha_x\hat{u}_x + \cos\alpha_y\hat{u}_y + \cos\alpha_z\hat{u}_z,$$

$$\hat{u}_A = \cos\alpha_x\hat{u}_x + \cos\alpha_y\hat{u}_y + \cos\alpha_z\hat{u}_z. \tag{1.2}$$

Por tanto, de (1.2) se puede concluir que los componente rectangulares de un vector unitario son sus cosenos directores.

La expresión (1.2) se puede expresar también como:

$$\hat{u}_A = (\cos\alpha_x, \cos\alpha_y, \cos\alpha_z).$$

De igual manera a partir de (1.1):

$$\vec{A} = \left(\left|\vec{A}\right| \cos\alpha_x, \left|\vec{A}\right| \cos\alpha_y, \left|\vec{A}\right| \cos\alpha_z\right), \tag{1.3}$$

así que:

$$A_x = \left|\vec{A}\right| \cos\alpha_x, \quad A_y = \left|\vec{A}\right| \cos\alpha_y \quad \text{y}$$

$$A_z = \left|\vec{A}\right| \cos\alpha_z.$$

En la Figura 1.2, se nota que la proyección del vector $\hat{u}_A$ en el plano $x - y$ tiene una magnitud igual a $\sqrt{\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y}$. La magnitud de $\hat{u}_A$ queda:

$$|\hat{u}_A| = \left[\left(\sqrt{\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y}\right)^2 + \cos^2\alpha_z\right]^{1/2}$$

$$|\hat{u}_A| = \left[\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z\right]^{1/2}$$

$$|\hat{u}_A|^2 = \cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z.$$

Por definición, la magnitud $|\hat{u}_A| = 1$, así que:

$$1 = \cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z, \tag{1.4}$$

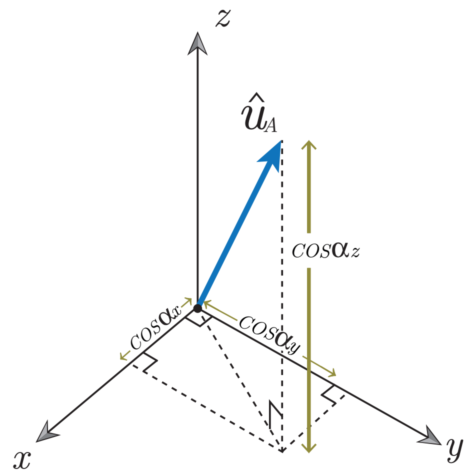


Figura 1.2. Componentes rectangulares del vector unitario

esto es, la suma de los cuadrados de los cosenos directores del vector $\vec{A}$ es igual a 1.

Ahora, $\dfrac{A_x}{\left|\vec{A}\right|} = \cos\alpha_x$, $\dfrac{A_y}{\left|\vec{A}\right|} = \cos\alpha_y$, $\dfrac{A_z}{\left|\vec{A}\right|} = \cos\alpha_z$.

Elevando al cuadrado miembro a miembro y sumando, se tiene:

$$\frac{{A_x}^2}{\left|\vec{A}\right|^2} + \frac{{A_y}^2}{\left|\vec{A}\right|^2} + \frac{{A_z}^2}{\left|\vec{A}\right|^2} = \cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z$$

$$\frac{{A_x}^2}{\left|\vec{A}\right|^2} + \frac{{A_y}^2}{\left|\vec{A}\right|^2} + \frac{{A_z}^2}{\left|\vec{A}\right|^2} = 1 \quad \text{ó}$$

$$\left|\vec{A}\right|^2 = {A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2 \rightarrow \left|\vec{A}\right| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}.$$

Así que un vector en tres dimensiones queda definido por su magnitud y cosenos directores, o equivalentemente sus ángulos, así:

$$\vec{A} = \left(\left|\vec{A}\right|, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z\right). \tag{1.5}$$

1.2 Operaciones entre vectores

1.2.1 Suma de vectores

Sean $\vec{A} = A_x\hat{u}_x + A_y\hat{u}_y + A_z\hat{u}_z$ y $\vec{B} = B_x\hat{u}_x + B_y\hat{u}_y + B_z\hat{u}_z$.

La suma es:

$$\vec{A}+\vec{B} = (A_x\hat{u}_x + A_y\hat{u}_y + A_z\hat{u}_z) + (B_x\hat{u}_x + B_y\hat{u}_y + B_z\hat{u}_z)$$
$$\vec{A}+\vec{B} = (A_x+B_x)\hat{u}_x + (A_y+B_y)\hat{u}_y + (A_z+B_z)\hat{u}_z,$$
$$|\vec{A}+\vec{B}| = \sqrt{(A_x+B_x)^2 + (A_y+B_y)^2 + (A_z+B_z)^2},$$
$$\cos\alpha_x = \frac{A_x+B_x}{|\vec{A}+\vec{B}|},\ \cos\alpha_y = \frac{A_y+B_y}{|\vec{A}+\vec{B}|},\ \cos\alpha_z = \frac{A_z+B_z}{|\vec{A}+\vec{B}|}$$

La suma de vectores es conmutativa.

1.2.2 Resta de vectores

A diferencia de la suma de vectores, la diferencia de vectores es anticonmutativa, esto es,

$$\vec{A}-\vec{B} = -(\vec{B}-\vec{A}).$$

Sean los vectores $\vec{A} = A_x\hat{u}_x + A_y\hat{u}_y + A_z\hat{u}_z$ y $\vec{B} = B_x\hat{u}_x + B_y\hat{u}_y + B_z\hat{u}_z$.

Sea la diferencia $\vec{A}-\vec{B} = (A_x\hat{u}_x + A_y\hat{u}_y + A_z\hat{u}_z) - (B_x\hat{u}_x + B_y\hat{u}_y + B_z\hat{u}_z)$

$$\vec{A}-\vec{B} = (A_x-B_x)\hat{u}_x + (A_y-B_y)\hat{u}_y + (A_z-B_z)\hat{u}_z,$$
$$|\vec{A}-\vec{B}| = \sqrt{(A_x-B_x)^2 + (A_y-B_y)^2 + (A_z-B_z)^2},$$
$$\cos\alpha_x = \frac{A_x-B_x}{|\vec{A}-\vec{B}|},\ \cos\alpha_y = \frac{A_y-B_y}{|\vec{A}-\vec{B}|},\ \cos\alpha_z = \frac{A_z-B_z}{|\vec{A}-\vec{B}|}.$$

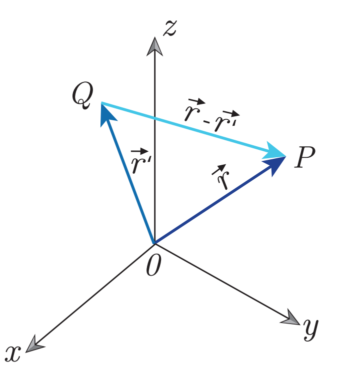


Figura 1.3. Posición relativa entre dos puntos

En la Figura 1.3, el vector de posición del punto P está dado por:

$$\vec{r} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z.$$

El vector posición del punto Q está dado por:

$$\vec{r'} = x'\hat{u}_x + y'\hat{u}_y + z'\hat{u}_z.$$

La posición relativa del punto P respecto al punto Q está dada por: $\vec{r}-\vec{r'}$

$$\vec{r}-\vec{r'} = (x-x')\hat{u}_x + (y-y')\hat{u}_y + (z-z')\hat{u}_z.$$

La magnitud del vector, da la distancia entre los dos puntos,

distancia $PQ = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$, entonces, la distancia entre dos puntos se obtiene como la magnitud de la diferencia de los vectores de posición de ambos puntos.

1.2.3 Multiplicación de un vector por un escalar

Sea el vector $\vec{A} = A_x\hat{u}_x + A_y\hat{u}_y + A_z\hat{u}_z$, y sea λ un escalar. Se puede definir un nuevo vector al multiplicar el escalar λ por el vector $\vec{A}$ así:

$$\lambda\vec{A} = \lambda(A_x\hat{u}_x + A_y\hat{u}_y + A_z\hat{u}_z)$$

$$\lambda\vec{A} = \lambda A_x\hat{u}_x + \lambda A_y\hat{u}_y + \lambda A_z\hat{u}_z.$$

Por tanto las componentes del vector $\lambda\vec{A}$ son λA_x, λA_y y λA_z, lo que se puede escribir en la forma $\lambda\vec{A} = (\lambda A_x, \lambda A_y, \lambda A_z)$.

Si $\lambda > 0$, la magnitud del vector $\lambda\vec{A}$ es $\lambda\left|\vec{A}\right|$, y su dirección es la misma dirección del vector $\vec{A}$.

Si $\lambda < 0$, la magnitud del vector $\lambda\vec{A}$ es $-\lambda\left|\vec{A}\right|$, y su dirección es opuesta a la dirección del vector $\vec{A}$. Lo anterior se puede demostrar de una manera sencilla:

$$\begin{aligned}
\lambda > 0: \quad \left|\lambda\vec{A}\right| &= \sqrt{(\lambda A_x)^2 + (\lambda A_y)^2 + (\lambda A_z)^2} \\
\left|\lambda\vec{A}\right| &= \sqrt{\lambda^2(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)} \\
\left|\lambda\vec{A}\right| &= \lambda\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \\
\left|\lambda\vec{A}\right| &= \lambda\left|\vec{A}\right|.
\end{aligned}$$

Cosenos directores de $\lambda\vec{A}$:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_x^{'} &= \frac{\lambda A_x}{\lambda\left|\vec{A}\right|} = \frac{A_x}{\left|\vec{A}\right|} \\
\cos\alpha_y^{'} &= \frac{\lambda A_y}{\lambda\left|\vec{A}\right|} = \frac{A_y}{\left|\vec{A}\right|} \\
\cos\alpha_z^{'} &= \frac{\lambda A_z}{\lambda\left|\vec{A}\right|} = \frac{A_z}{\left|\vec{A}\right|}
\end{aligned}$$

Como se puede notar, los cosenos directores de $\lambda\vec{A}$ son los mismos cosenos directores del vector $\vec{A}$, por tanto, la dirección del vector $\lambda\vec{A}$ es la misma dirección del vector $\vec{A}$.

$$\lambda < 0: \quad \begin{aligned} \left|\lambda\vec{A}\right| &= \sqrt{(\lambda A_x)^2 + (\lambda A_y)^2 + (\lambda A_z)^2} \\ \left|\lambda\vec{A}\right| &= \sqrt{\lambda^2(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)} \\ \left|\lambda\vec{A}\right| &= -\lambda\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \\ \left|\lambda\vec{A}\right| &= -\lambda\left|\vec{A}\right|. \end{aligned}$$

Cosenos directores de $\lambda\vec{A}$:

$$\cos\alpha'_x = \frac{\lambda A_x}{-\lambda\left|\vec{A}\right|},\ \cos\alpha'_y = \frac{\lambda A_y}{-\lambda\left|\vec{A}\right|},\ \cos\alpha'_z = \frac{\lambda A_z}{-\lambda\left|\vec{A}\right|}$$

$$\cos\alpha'_x = \frac{-A_x}{\left|\vec{A}\right|},\ \cos\alpha'_y = \frac{-A_y}{\left|\vec{A}\right|},\ \cos\alpha'_z = \frac{-A_z}{\left|\vec{A}\right|}.$$

Teniendo en cuenta que $\cos\alpha_x = \frac{A_x}{|\vec{A}|}$, $\cos\alpha_y = \frac{A_y}{|\vec{A}|}$ y $\cos\alpha_z = \frac{A_z}{|\vec{A}|}$, entonces

$\cos\alpha'_x = -\cos\alpha_x$, $\cos\alpha'_y = -\cos\alpha_y$ y $\cos\alpha'_z = -\cos\alpha_z$, o lo que es lo mismo:

$\cos\alpha'_x = \cos(\alpha_x \pm \pi),\ \cos\alpha'_y = \cos(\alpha_y \pm \pi),\ \cos\alpha'_z = \cos(\alpha_z \pm \pi).$

Esto prueba que la dirección del vector $\lambda\vec{A}$ es opuesta a la dirección del vector $\vec{A}$.

1.2.4 Productos entre vectores

Producto escalar de dos vectores

Es el producto de las magnitudes de ambos vectores y el coseno del ángulo entre ellos. De su definición se concluye que es un escalar.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \cos\theta. \tag{1.6}$$

Según esta definición, el producto escalar es conmutativo. Aplicamos la definición del producto escalar a los vectores unitarios $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$ y $\hat{u}_z$.

$$\begin{aligned} \hat{u}_x \cdot \hat{u}_x &= 1, &\quad \hat{u}_x \cdot \hat{u}_y &= 0, \\ \hat{u}_y \cdot \hat{u}_y &= 1, &\quad \hat{u}_x \cdot \hat{u}_z &= 0, \\ \hat{u}_z \cdot \hat{u}_z &= 1, &\quad \hat{u}_y \cdot \hat{u}_z &= 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Si se tiene en cuenta (1.7) y la propiedad distributiva del producto escalar, este se puede expresar en una manera alterna a su definición:

$$\begin{aligned}
\vec{A}\cdot\vec{B} =&(A_x\hat{u}_x + A_y\hat{u}_y + A_z\hat{u}_z)\cdot(B_x\hat{u}_x + B_y\hat{u}_y + B_z\hat{u}_z)\\
\vec{A}\cdot\vec{B} =&A_xB_x(\hat{u}_x.\hat{u}_x) + A_xB_y(\hat{u}_x.\hat{u}_y) + A_xB_z(\hat{u}_x.\hat{u}_z)\\
&+ A_yB_x(\hat{u}_y.\hat{u}_x) + A_yB_y(\hat{u}_y.\hat{u}_y) + A_yB_z(\hat{u}_y.\hat{u}_z)\\
&+ A_zB_x(\hat{u}_z.\hat{u}_x) + A_zB_y(\hat{u}_z.\hat{u}_y) + A_zB_z(\hat{u}_z.\hat{u}_z)\\
\vec{A}\cdot\vec{B} =&A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z.
\end{aligned}$$

Entonces, con esta nueva expresión del producto escalar se puede obtener el ángulo entre dos vectores, así:

$$\begin{aligned}
\vec{A}\cdot\vec{B} &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z,\\
\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\\
\cos\theta &= \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|}. \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

Los tres vectores unitarios se pueden representar con la notación genérica u_i, con $i = 1, 2, 3$; así que $u_1 = \hat{u}_x$, $u_2 = \hat{u}_y$ y $u_3 = \hat{u}_z$. Las expresiones contenidas en (1.7) se sintetizan en la siguiente expresión:

$$\hat{u}_i\cdot\hat{u}_j = \delta_{ij}, \qquad (1.9)$$

δ_{ij} se le denomina delta de Kronecker y vale 1 si $i = j$, o vale 0 si $i \neq j$, esto es:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j\\ 1, & \text{si } i = j\end{cases}$$

Con esta notación basada en subíndices que varían de 1 a 3, el producto escalar se puede escribir como:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \sum_{i=1}^{3} A_iB_i$$

Producto vectorial de dos vectores

El producto vectorial de $\vec{A}$ con $\vec{B}$ es un tercer vector $\vec{C}$ orientado en dirección perpendicular al plano definido por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y apuntando en el sentido de avance de un tornillo de rosca derecha cuando gira de $\vec{A}$ hacia $\vec{B}$.

Su magnitud está dada por el producto de las magnitudes de los vectores y el seno del ángulo entre los dos. Por lo tanto: $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}$ y

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \left|\vec{C}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \operatorname{sen}\theta.$$

El vector $\vec{C}$ al ser perpendicular al plano que contiene los vectores, es perpendicular a cada uno de los vectores, como lo indica la Figura 1.4.

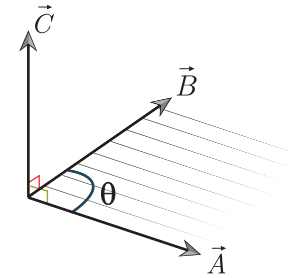


Figura 1.4. Producto vectorial de $\vec{A}$ con $\vec{B}$

Al aplicar la definición del producto vectorial a los tres vectores unitarios cartesianos, se tiene:

$$\left.\begin{aligned}
\hat{u}_x \times \hat{u}_y &= \hat{u}_z \\
\hat{u}_x \times \hat{u}_z &= -\hat{u}_y \\
\hat{u}_y \times \hat{u}_x &= -\hat{u}_z \\
\hat{u}_y \times \hat{u}_z &= \hat{u}_x \\
\hat{u}_z \times \hat{u}_x &= \hat{u}_y \\
\hat{u}_z \times \hat{u}_y &= -\hat{u}_x \\
\hat{u}_x \times \hat{u}_x = \hat{u}_y \times \hat{u}_y &= \hat{u}_z \times \hat{u}_z = 0
\end{aligned}\right\}. \tag{1.10}$$

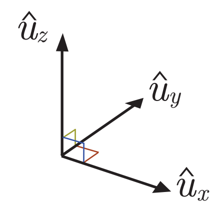


Figura 1.5. Relación de ortogonalidad entre $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$

Teniendo presente el contenido (1.10), el producto vectorial es:

$$\begin{aligned}
\vec{A}\times\vec{B} &= (A_x\hat{u}_x + A_y\hat{u}_y + A_z\hat{u}_z)\times(B_x\hat{u}_x + B_y\hat{u}_y + B_z\hat{u}_z) \\
&= A_xB_x(\hat{u}_x\times\hat{u}_x) + A_xB_y(\hat{u}_x\times\hat{u}_y) + A_xB_z(\hat{u}_x\times\hat{u}_z) \\
&+ A_yB_x(\hat{u}_y\times\hat{u}_x) + A_yB_y(\hat{u}_y\times\hat{u}_y) + A_yB_z(\hat{u}_y\times\hat{u}_z) \\
&+ A_zB_x(\hat{u}_z\times\hat{u}_x) + A_zB_y(\hat{u}_z\times\hat{u}_y) + A_zB_z(\hat{u}_z\times\hat{u}_z)
\end{aligned}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \hat{u}_x(A_yB_z - A_zB_y) - \hat{u}_y(A_xB_z - A_zB_x) + \hat{u}_z(A_xB_y - A_yB_x). \tag{1.11}$$

Pero esta expresión (1.11) no es más que el determinante de la matriz 3x3 en la que la primera fila son los vectores unitarios cartesianos tomados en el orden (x, y, z), la segunda fila son las componentes cartesianas del vector $\vec{A}$, tomadas en el mismo orden y la tercera fila son las componentes cartesianas del vector $\vec{B}$, también en el mismo orden. Esto es:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

Siguiendo la notación con subíndices numéricos, tenemos las componentes del vector $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ según (1.11), de la siguiente manera:

$$C_1 = A_2B_3 - A_3B_2, \quad C_2 = A_3B_1 - A_1B_3, \quad C_3 = A_1B_2 - A_2B_1.$$

Si se introduce el símbolo ε_{ijk}, definido de la siguiente manera:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1,$$

$$\varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = -1.$$

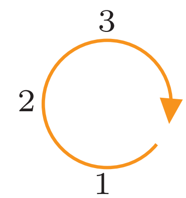


Figura 1.6. Ciclo que define el valor de $\varepsilon_{ijk} = 1$

Si se repiten índices, $\varepsilon_{ijk} = 0$, las componentes del vector $\vec{C}$ se pueden expresar como sigue:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \varepsilon_{123} A_2 B_3 + \varepsilon_{132} A_3 B_2 \\ C_2 &= \varepsilon_{231} A_3 B_1 + \varepsilon_{213} A_1 B_3 \\ C_3 &= \varepsilon_{312} A_1 B_2 + \varepsilon_{321} A_2 B_1 \end{aligned}\right\}. \tag{1.12}$$

Las expresiones dadas por (1.12) se pueden sintetizar así:

$C_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} A_j B_k$, por lo tanto,

$$\vec{C} = \sum_{i=1}^{3} \hat{u}_i C_i = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \hat{u}_i \varepsilon_{ijk} A_j B_k.$$

Entonces, el producto vectorial entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se puede expresar así:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \hat{u}_i \varepsilon_{ijk} A_j B_k.$$

El símbolo ε_{ijk}, se conoce como símbolo de Levi-Civita.

1.2.5 Triple producto escalar

Sean los vectores : $\vec{A} = A_x \hat{u}_x + A_y \hat{u}_y + A_z \hat{u}_z,$
$\vec{B} = B_x \hat{u}_x + B_y \hat{u}_y + B_z \hat{u}_z,$
$\vec{C} = C_x \hat{u}_x + C_y \hat{u}_y + C_z \hat{u}_z$

A la expresión $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$ se le conoce como triple producto escalar. Su módulo representa geométricamente el volumen de un paralelepípedo, que tiene por lados $\left|\vec{A}\right|$, $\left|\vec{B}\right|$ y $\left|\vec{C}\right|$.

$$\left|\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}\right| = \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B} \times \vec{C}\right| \cos\theta,$$

donde $\left|\vec{B} \times \vec{C}\right|$ es el área de la base y $\left|\vec{A}\right| \cos\theta$ es su altura. Ver Figura 1.7.

Sea M la matriz cuadrada 3×3, cuyas filas están definidas por las componentes de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$, respectivamente. Esto es,

$$M = \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{pmatrix}.$$

Su determinante se expresa así:

$$\det M = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}.$$

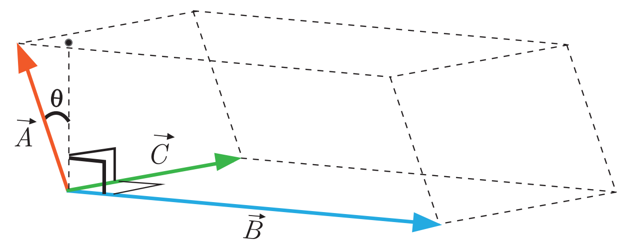


Figura 1.7. Representación espacial del producto $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$

El triple producto escalar se puede expresar como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}.$$

Para demostrar esta igualdad se debe tener presente el determinante de una matriz cuadrada 2 x 2, así:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= (A_x\hat{u}_x + A_y\hat{u}_y + A_z\hat{u}_z) \cdot [\hat{u}_x(B_yC_z - B_zC_y) \\ &+ \hat{u}_y(B_zC_x - B_xC_z) + \hat{u}_z(B_xC_y - B_yC_x)] \\ &= A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x) \\ &= A_x(B_yC_z - B_zC_y) - A_y(B_xC_z - B_zC_x) + A_z(B_xC_y - B_yC_x) \\ &= A_x \begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} - A_y \begin{vmatrix} B_x & B_z \\ C_x & C_z \end{vmatrix} + A_z \begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix} \\ \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Demostrar que $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$.

Si en una matriz cuadrada hay un número par de cambios entre filas o entre columnas, el determinante no cambia. Teniendo en cuenta esta propiedad de los determinantes, podemos establecer que:

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

El primer determinante es $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}$, el segundo determinante es $\vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A}$ y el tercer determinante es $\vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B}$, por tanto:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}=\vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A}=\vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B}.$$

Otra forma de demostrarlo es la siguiente:

Sea $\vec{D}=\vec{B}\times\vec{C}$, entonces $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}=\vec{A}\times\vec{D}$. La componente D_i del vector $\vec{D}$ está dada por:

$$D_i=\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}B_jC_k,$$

$$\vec{A}\cdot\vec{D}=\sum_{i=1}^{3}A_iD_i,$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}=\sum_{i=1}^{3}A_i\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}B_jC_k$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k.$$

El símbolo de Levi-Civita tiene la propiedad de que: $\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{jki}=\varepsilon_{kij}$. Ver Figura 1.8. Por tanto:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k=\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{jki}B_jC_kA_i=\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_{kij}C_kA_iB_j.$$

El término de la izquierda es $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}$, el término del medio es $\vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A}$ y el término de la derecha es $\vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B}$; por lo tanto se demuestra que:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}=\vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A}=\vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B}.$$

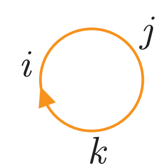


Figura 1.8. Disposición cíclica de los índices i, j, k

Teniendo en cuenta las definiciones de producto escalar y producto vectorial, los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ son coplanares (están en un mismo plano) si y sólo si $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}=0$.

1.2.6 Triple producto vectorial

Sean los vectores :
$$\begin{aligned}\vec{A}&=A_x\hat{u}_x+A_y\hat{u}_y+A_z\hat{u}_z,\\ \vec{B}&=B_x\hat{u}_x+B_y\hat{u}_y+B_z\hat{u}_z,\\ \vec{C}&=C_x\hat{u}_x+C_y\hat{u}_y+C_z\hat{u}_z.\end{aligned}$$

A la expresión $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ se le conoce como triple producto vectorial.

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}). \tag{1.13}$$

Demostrar esta identidad.
Teniendo en cuenta la definición de producto vectorial se tiene:

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \hat{u}_x \begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} - \hat{u}_y \begin{vmatrix} B_x & B_z \\ C_x & C_z \end{vmatrix} + \hat{u}_z \begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix}.$$

Ahora:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ \begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} B_x & B_z \\ C_x & C_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = {} & \hat{u}_x \left[A_y \begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix} + A_z \begin{vmatrix} B_x & B_z \\ C_x & C_z \end{vmatrix} \right] - \hat{u}_y \left[A_x \begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix} \right. \\ & \left. - A_z \begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} \right] + \hat{u}_z \left[-A_x \begin{vmatrix} B_x & B_z \\ C_x & C_z \end{vmatrix} - A_y \begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = {} & \hat{u}_x \left[A_y(B_xC_y - B_yC_x) + A_z(B_xC_z - B_zC_x) \right] - \hat{u}_y \left[A_x(B_xC_y - C_xB_y) \right. \\ & \left. - A_z(B_yC_z - B_zC_y) \right] + \hat{u}_z \left[-A_x(B_xC_z - B_zC_x) - A_y(B_yC_z - B_zC_y) \right] \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = {} & \hat{u}_x(A_yB_xC_y - A_yB_yC_x + A_zB_xC_z - A_zB_zC_x) \\ & + \hat{u}_y(A_xB_yC_x - A_xB_xC_y + A_zB_yC_z - A_zB_zC_y) \\ & + \hat{u}_z(A_xB_zC_x - A_xB_xC_z + A_yB_zC_y - A_yB_yC_z) \end{aligned} \right\}. \tag{1.14}$$

Con el fin de obtener los productos escalares que aparecen a la derecha de la identidad, es necesario agregar en el primer renglón de (1.2.6) $B_xA_xC_x - B_xA_xC_x$, en el segundo renglón $B_yA_yC_y - B_yA_yC_y$ y en el tercer renglón $B_zA_zC_z - B_zA_zC_z$, esto es,

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = {} & \hat{u}_x(A_yB_xC_y - A_yB_yC_x + A_zB_xC_z - A_zB_zC_x + A_xB_xC_x - A_xB_xC_x) \\ & + \hat{u}_y(A_xB_yC_x - A_xB_xC_y + A_zB_yC_z - A_zB_zC_y + A_yB_yC_y - A_yB_yC_y) \\ & + \hat{u}_z(A_xB_zC_x - A_xB_xC_z + A_yB_zC_y - A_yB_yC_z + A_zB_zC_z - A_zB_zC_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = {} & \hat{u}_xB_x(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z) - \hat{u}_xC_x(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) \\ & + \hat{u}_yB_y(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z) - \hat{u}_yC_y(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) \\ & + \hat{u}_zB_z(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z) - \hat{u}_zC_z(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = {} & (\hat{u}_xB_x + \hat{u}_yB_y + \hat{u}_zB_z)(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z) \\ & - (\hat{u}_xC_x + \hat{u}_yC_y + \hat{u}_zC_z)(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) \end{aligned}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right).$$

Una forma más corta de llevar a cabo esta demostración es haciendo uso de la notación indicial. Para ello, se parte de la base sin demostrar que:

$$\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\, \delta_{jm} - \delta_{im}\, \delta_{jl}, \tag{1.15}$$

donde los símbolos ε_{ijk} y δ_{il} son el símbolo de Levi-Civita y delta de Kronecker, respectivamente.
Sea $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{D}$, con $\vec{D} = \vec{B} \times \vec{C}$.
El producto vectorial $\vec{A} \times \vec{D} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\hat{u}_i A_j D_k$, pero $D_k = \sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} \varepsilon_{klm} B_l C_m$, así que:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{klm}\, \hat{u}_i\, A_j B_l\, C_m. \tag{1.16}$$

Pero $\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{lmk}$, siguiendo el orden cíclico que se indica en Figura 1.9. Por tanto,

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}\hat{u}_i A_j B_l C_m. \tag{1.17}$$

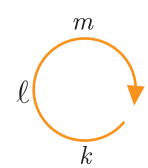


Figura 1.9. Disposición cíclica de los índices k, l, m

Teniendo en cuenta (1.15) en (1.2.6), se tiene:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\hat{u}_i A_j B_l C_m$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} \delta_{il}\delta_{jm}\hat{u}_i A_j B_l C_m - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} \delta_{im}\delta_{jl}\hat{u}_i A_j B_l C_m$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \sum_{i=1}^{3} \hat{u}_i B_i \sum_{j=1}^{3} A_j C_j - \sum_{i=1}^{3} \hat{u}_i C_i \sum_{j=1}^{3} A_j B_j,$$

donde, al ser $m = i$ y $l = j$, desaparecen las sumas sobre l y m tanto en el primer término como en el segundo del lado derecho de la igualdad.
Ahora,

$$\sum_{i=1}^{3} \hat{u}_i B_i = \vec{B}, \qquad \sum_{j=1}^{3} A_j C_j = \vec{A} \cdot \vec{C},$$

$$\sum_{i=1}^{3} \hat{u}_i C_i = \vec{C}, \qquad \sum_{j=1}^{3} A_j B_j = \vec{A} \cdot \vec{B},$$

así que: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$.

1.2.7 Diferenciales de desplazamiento, superficie y volumen

Para la realización de integrales de línea, de superficie y de volumen, es necesario expresar los diferenciales de desplazamiento, superficie y volumen en los tres sistemas de coordenadas más usados: coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

Coordenadas cartesianas:

En la Figura 1.10, el vector diferencial $d\vec{\ell}$ conecta el punto $P(x, y, z)$ con el punto $Q(x+dx, y+dy, z+dz)$, por lo tanto, $d\vec{\ell} = dx\hat{u}_x + dy\hat{u}_y + dz\hat{u}_z$,

$$dx = d\vec{\ell}.\hat{u}_x,\ dy = d\vec{\ell}.\hat{u}_y,\ dz = d\vec{\ell}.\hat{u}_z$$

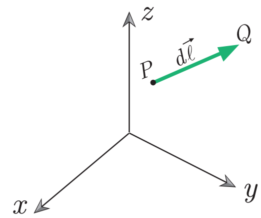


Figura 1.10. Desplazamiento diferencial entre dos puntos

En forma de terna ordenada

$$d\vec{\ell} = (dx, dy, dz)$$

En la Figura 1.11 se muestran tres diferenciales de superficie ubicadas así:

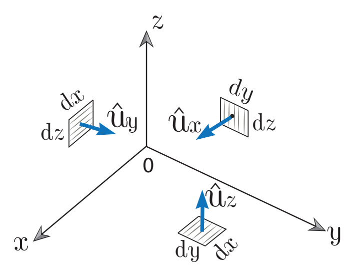


Figura 1.11. Diferenciales de superficie en coordenadas cartesianas

En el plano $x-y$: $d\vec{S_z} = dxdy\,\hat{u}_z$.
En el plano $x-z$: $d\vec{S_y} = dxdz\,\hat{u}_y$.
En el plano $y-z$: $d\vec{S_x} = dydz\,\hat{u}_x$.

Si el diferencial de superficie tiene una dirección arbitraria, entonces:

$d\vec{S} = dS\hat{u}_n$, ver Figura 1.12.
$d\vec{S} = (dS_x, dS_y, dS_z)$

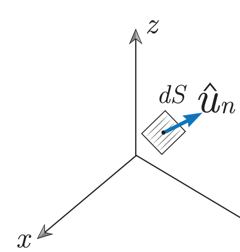


Figura 1.12. Diferenciales de superficie con orientación arbitraria

En la Figura 1.13, se representa el volumen diferencial $dV = dx\,dy\,dz$

Coordenadas cilíndricas:

Las coordenadas cilíndricas del punto P son ρ, ϕ, z. Los vectores unitarios son $\hat{u}_\rho$, $\hat{u}_\phi$, $\hat{u}_z$, los cuales se muestran en la Figura 1.14.
Las coordenadas cilíndricas de un segundo punto Q localizado a una distancia diferencial son $\rho+d\rho$, $\phi+d\phi$ y $z+dz$, de tal manera que $d\vec{\ell} = d\rho\hat{u}_\rho + \rho d\phi\hat{u}_\phi + dz\hat{u}_z$.
Escrito en forma de terna queda:

$$d\vec{\ell} = (d\rho, \rho d\phi, dz).$$

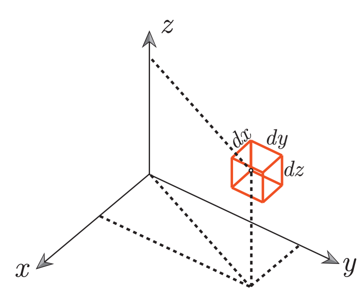


Figura 1.13. Diferencial de volumen en coordenadas cartesianas

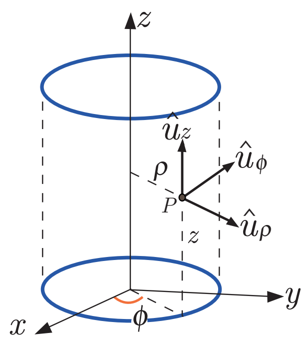


Figura 1.14. Vectores unitarios en coordenadas cilíndricas

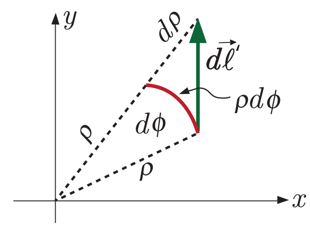


Figura 1.15. Proyección de $d\vec{\ell}$ en el plano $x - y$

La proyección de $d\vec{\ell}$ en el plano $x - y$ es $d\vec{\ell}' = (d\rho, \rho d\phi)$. Ver Figura 1.15.

Los vectores unitarios también siguen la regla del producto vectorial y del producto escalar.

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_\rho \times \hat{u}_\phi &= \hat{u}_z, \quad \hat{u}_\phi \times \hat{u}_\rho = -\hat{u}_z, \quad \hat{u}_\rho \times \hat{u}_\rho = 0,\\
\hat{u}_\phi \times \hat{u}_z &= \hat{u}_\rho, \quad \hat{u}_z \times \hat{u}_\phi = -\hat{u}_\rho, \quad \hat{u}_\phi \times \hat{u}_\phi = 0,\\
\hat{u}_z \times \hat{u}_\rho &= \hat{u}_\phi, \quad \hat{u}_\rho \times \hat{u}_z = -\hat{u}_\phi, \quad \hat{u}_z \times \hat{u}_z = 0,\\
&\hat{u}_\rho.\hat{u}_\phi = \hat{u}_\rho.\hat{u}_z = \hat{u}_\phi.\hat{u}_z = 0\\
&\hat{u}_\rho.\hat{u}_\rho = \hat{u}_z.\hat{u}_z = \hat{u}_\phi.\hat{u}_\phi = 1.
\end{aligned}
$$

Los diferenciales de superficie en coordenadas cilíndricas aparecen en la Figura 1.16.

En la Figura 1.18 se muestra el diferencial de volumen y se halla como el producto de los tres componentes escalares del vector $d\vec{\ell}$ así:

$$dV = (\rho d\phi)(d\rho)(dz) \qquad dV = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz.$$

Coordenadas esféricas:

En la Figura 1.19, se muestran las coordenadas del punto P y los vectores unitarios asociados a dichas coordenadas.

Las coordenadas de un segundo punto Q localizado en el espacio a una distancia diferencial del punto P son $r + dr$, $\theta + d\theta$ y $\phi + d\phi$. La diferencia de posición entre estos dos puntos es:

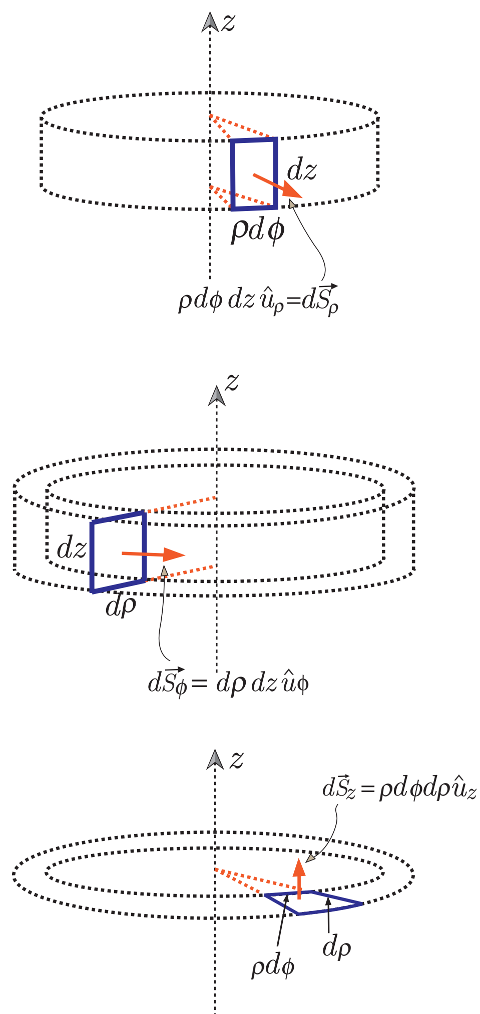


Figura 1.16. Diferenciales de superficie en coordenadas cilíndricas

$d\vec{\ell} = \hat{u}_r dr + \hat{u}_\theta r d\theta + \hat{u}_\phi r \operatorname{sen}\theta d\phi$ ó
$d\vec{\ell} = (dr, rd\theta, r \operatorname{sen}\theta d\phi)$.

La Figura 1.20 muestra estas componentes.
La proyección de $d\vec{\ell}$ sobre el plano meridional $z-z'$ está dado por:

$$d\vec{l'} = (dr, rd\theta, 0)$$

y se muestra en la Figura 1.17.
Los vectores unitarios también siguen las reglas de los productos escalar y vectorial.

$$\begin{aligned}
\hat{u}_r.\hat{u}_r =& \hat{u}_\theta.\hat{u}_\theta = \hat{u}_\phi.\hat{u}_\phi = 1,\\
\hat{u}_r.\hat{u}_\theta =& \hat{u}_r.\hat{u}_\phi = \hat{u}_\theta.\hat{u}_\phi = 0,\\
\hat{u}_r \times \hat{u}_\theta =& \hat{u}_\phi,\ \hat{u}_\theta \times \hat{u}_\phi = \hat{u}_r,\ \hat{u}_\phi \times \hat{u}_r = \hat{u}_\theta,\\
\hat{u}_\theta \times \hat{u}_r =& -\hat{u}_\phi,\ \hat{u}_\phi \times \hat{u}_\theta = -\hat{u}_r,\ \hat{u}_r \times \hat{u}_\phi = -\hat{u}_\theta,\\
\hat{u}_r \times \hat{u}_r =& \hat{u}_\theta \times \hat{u}_\theta = \hat{u}_\phi \times \hat{u}_\phi = 0.
\end{aligned}$$

Los diferenciales de superficie se muestran en las Figuras 1.21(a), 1.21(b), 1.21(c) y se definen así:

$$\begin{aligned}
d\vec{S}_\theta &= r \text{ sen } \theta dr d\,\phi\, \hat{u}_\theta,\\
d\vec{S}_\phi &= r\, dr\, d\theta\, \hat{u}_\phi,\\
d\vec{S}_r &= r^2 \operatorname{sen}\, \theta\, d\theta\, d\phi\, \hat{u}_r.
\end{aligned}$$

El diferencial de volumen se muestra en la Figura 1.21(d), y se halla como el producto de las tres componentes escalares del vector $d\vec{\ell}$, así:

$$\begin{aligned}
dV &= (r \operatorname{sen}\theta d\phi)(rd\theta)(dr),\\
dV &= r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi.
\end{aligned}$$

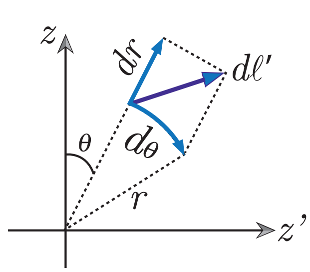


Figura 1.17. Proyección de $d\vec{\ell}$ en el plano meridional $z-z'$

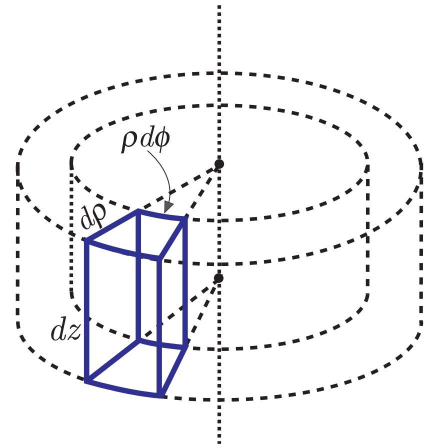


Figura 1.18. Diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas

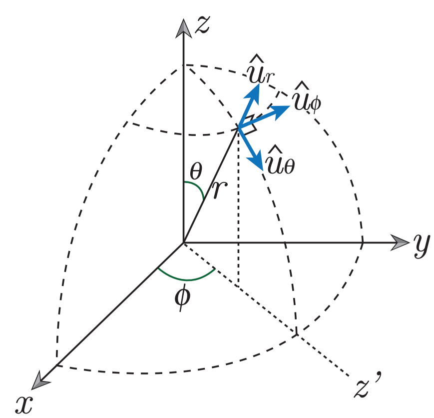


Figura 1.19. Vectores unitarios en coordenadas esféricas

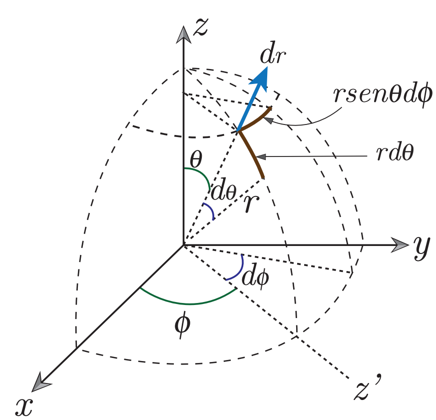


Figura 1.20. Diferenciales de longitud en coordenadas esféricas

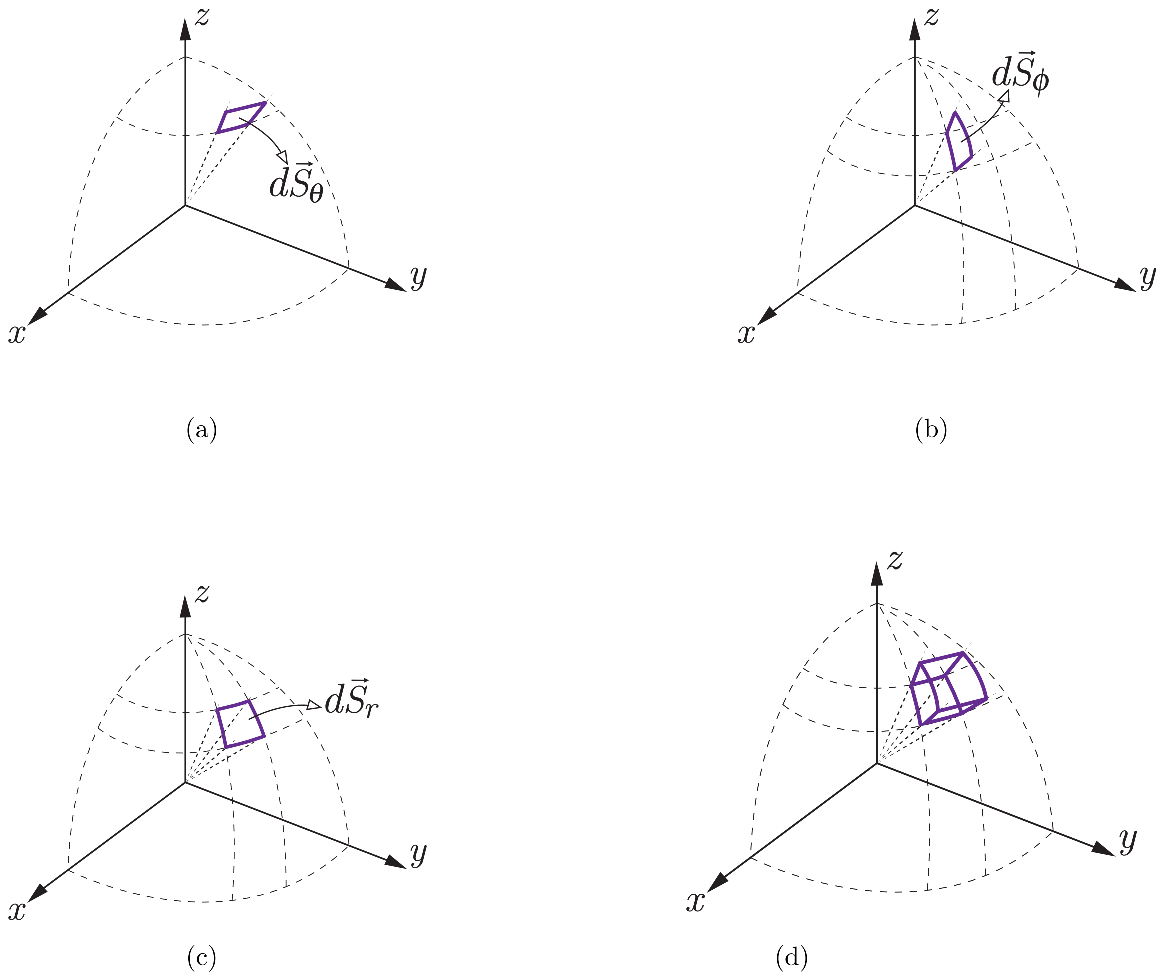


Figura 1.21. a) Diferencial de superficie en dirección $\hat{u}_\theta$. b) Diferencial de superficie en dirección $\hat{u}_\phi$. c) Diferencial de superficie en dirección $\hat{u}_r$. d) Diferencial de volumen en coordenadas esféricas

1.3 Integrales de línea, superficie y volumen

Sea L un camino o trayectoria que une dos puntos P_1 y P_2 en el que la función posición posee derivada continua.
Sea $\vec{V}(x, y, z)$ una función vectorial de posición continua a largo de L. La integral

$$\int_{P1}^{P_2} \vec{V}.d\vec{\ell},$$

se denomina integral de línea, donde $d\vec{\ell}$ se define como un diferencial de trayectoria:

$$\int_{P1}^{P_2} \vec{V}.d\vec{\ell} = \int_L \vec{V}.d\vec{\ell} = \int_L (V_x dx + V_y dy + V_z dz).$$

Si L es un camino cerrado, la integral se convierte en una integral cerrada, la cual se representa así:

$$\oint \vec{V}.d\vec{\ell}.$$

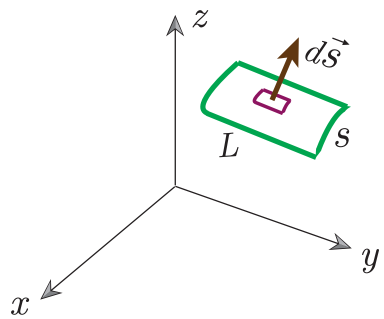


Figura 1.22. Camino L para la circulación de $\vec{V}$

Esta integral se conoce como circulación de $\vec{V}$ a lo largo del camino L.

$$\oint \vec{V}.d\vec{\ell} = \oint (V_x dx + V_y dy + V_z dz).$$

Sea S una superficie sobre la que se evalúa el campo vectorial $\vec{V}$ como una función de la posición. Sea $d\vec{S}$ un diferencial de superficie que se define vectorialmente en dirección normal a la superficie tomando como positivo de manera arbitraria uno de los dos sentidos.

La integral

$$\iint\limits_S \vec{V}.d\vec{S} = \iint\limits_S \vec{V}.\hat{u}_n dS,$$

se conoce como integral de superficie. Esta expresión se puede abreviar escribiendo una sola integral así:

$$\int\limits_S \vec{V}.\hat{u}_n dS.$$

Esta integral se puede interpretar como el flujo del campo vectorial $\vec{V}$ a través de la superficie S. Si la superficie es cerrada, la integral de superficie se expresa como:

$$\oiint_S \vec{V}.\hat{u}_n \, dS = \oint_S \vec{V}.\hat{u}_n dS.$$

Otras integrales de superficie son:

$$\int\limits_S \phi dS \ , \qquad \int\limits_S \phi \hat{u}_n dS \ , \qquad \int\limits_S \vec{V} \times d\vec{S}.$$

donde ϕ es una función escalar. Una superficie cerrada encierra un volumen V del espacio. Las integrales

$$\iiint\limits_V \vec{V} dV = \int\limits_V \vec{V} dV, \quad \iiint\limits_V \phi dV = \int\limits_V \phi dV$$

se conocen como integrales de volumen.

1.4 Transformación de coordenadas

En la solución de problemas de campos, además de las coordenadas cartesianas, se requiere el uso de los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas, ya que son las coordenadas adecuadas para dar solución a problemas con simetrías cilíndricas y esféricas.

Las coordenadas cartesianas de un punto se dan por la terna (x, y, z), las coordenadas cilíndricas se dan por la terna (ρ, ϕ, z), y las coordenadas esféricas se dan por la terna (r, θ, ϕ).

Así como los vectores unitarios cartesianos son $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$, $\hat{u}_z$, los vectores unitarios cilíndricos son $\hat{u}_\rho$, $\hat{u}_\phi$, $\hat{u}_z$; de igual manera los vectores unitarios asociados a las coordenadas esféricas son $\hat{u}_r$, $\hat{u}_\theta$, $\hat{u}_\phi$.

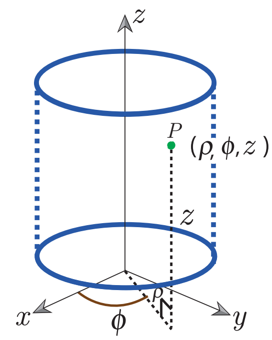


Figura 1.23. Coordenadas cilíndricas de un punto

La Figura 1.23 muestra las coordenadas cilíndricas de un punto P, y la Figura 1.24, muestra la orientación de los vectores unitarios asociados a coordenadas cilíndricas. En la Figura 1.25 aparecen los vectores unitarios $\hat{u}_\rho$ y $\hat{u}_\phi$ proyectados en el plano $x - y$. Ahora, se expresan en coordenadas cartesianas:

$$\hat{u}_\rho = \cos\phi\hat{u}_x + \operatorname{sen}\phi\hat{u}_y, \tag{1.18}$$
$$\hat{u}_\phi = \cos(\phi + \pi/2)\hat{u}_x + \operatorname{sen}(\phi + \pi/2)\hat{u}_y,$$

$$\hat{u}_\phi = -\operatorname{sen}\phi\hat{u}_x + \cos\phi\hat{u}_y. \tag{1.19}$$

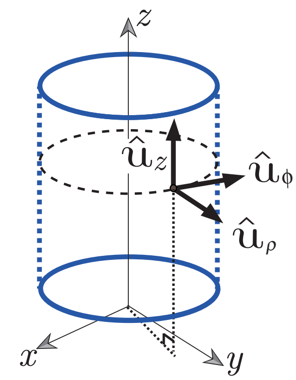


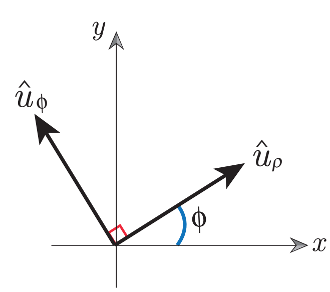
Figura 1.24. Vectores unitarios en coordenadas cilíndricas

Sea un vector $\vec{C}$ expresado en coordenadas cilíndricas

$$\vec{C} = C_\rho\hat{u}_\rho + C_\phi\hat{u}_\phi + C_z\hat{u}_z. \tag{1.20}$$

1.18 y 1.19 se reemplazan en 1.20

$$\vec{C} = C_\rho(\cos\phi\hat{u}_x + \operatorname{sen}\phi\hat{u}_y) + C_\phi(-\operatorname{sen}\phi\hat{u}_x + \cos\phi\hat{u}_y) + C_z\hat{u}_z$$
$$\vec{C} = (C_\rho\cos\phi - C_\phi\operatorname{sen}\phi)\hat{u}_x + (C_\rho\operatorname{sen}\phi + C_\phi\cos\phi)\hat{u}_y + C_z\hat{u}_z.$$



Las componentes cartesianas del vector $\vec{C}$ en términos de las componentes cilíndricas son:

$$C_x = C_\rho\cos\phi - C_\phi\operatorname{sen}\phi, \tag{1.21}$$

$$C_y = C_\rho\operatorname{sen}\phi + C_\phi\cos\phi, \tag{1.22}$$

Figura 1.25. Orientación relativa entre $\hat{u}_\phi$ y $\hat{u}_\rho$

$$C_z = C_z. \tag{1.23}$$

En forma matricial quedan:

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\rho \\ C_\phi \\ C_z \end{bmatrix}. \tag{1.24}$$

Si 1.21 se multiplica por $\cos\phi$ y 1.22 se multiplica por $\operatorname{sen}\phi$, se tiene

$$\begin{aligned} C_x \cos\phi =& C_\rho \cos^2\phi - C_\phi \operatorname{sen}\phi \cos\phi, \\ C_y \operatorname{sen}\phi =& C_\rho \operatorname{sen}^2\phi + C_\phi \operatorname{sen}\phi \cos\phi. \end{aligned}$$

Al sumar se tiene:

$$C_\rho = C_x \cos\phi + C_y \operatorname{sen}\phi.$$

Si 1.21 se multiplica por $-\operatorname{sen}\phi$ y 1.22 se multiplica por $\cos\phi$, se tiene:

$$\begin{aligned} -C_x \operatorname{sen}\phi =& -C_\rho \cos\phi \operatorname{sen}\phi + C_\phi \operatorname{sen}^2\phi, \\ C_y \cos\phi =& C_\rho \cos\phi \operatorname{sen}\phi + C_\phi \cos^2\phi. \end{aligned}$$

Al sumar se tiene:

$$C_\phi = -C_x \operatorname{sen}\phi + C_y \cos\phi.$$

Las componenetes cilíndricas del vector $\vec{C}$ en términos de las componentes cartesianas son:

$$C_\rho = C_x \cos\phi + C_y \operatorname{sen}\phi, \tag{1.25}$$

$$C_\phi = -C_x \operatorname{sen}\phi + C_y \cos\phi, \tag{1.26}$$

$$C_z = C_z. \tag{1.27}$$

En forma matricial quedan:

$$\begin{bmatrix} C_\rho \\ C_\phi \\ C_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix}. \tag{1.28}$$

El resultado dado por 1.28 también se puede obtener utilizando la matriz inversa de la dada en 1.24.
La Figura 1.26 muestra las coordenadas esféricas de un punto P, y la Figura 1.27 muestra la orientación de los vectores unitarios asociados a coordenadas esféricas.

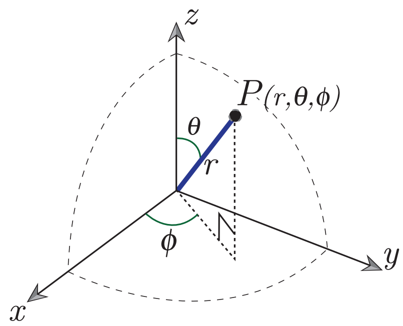


Figura 1.26. Coordenadas esféricas de un punto

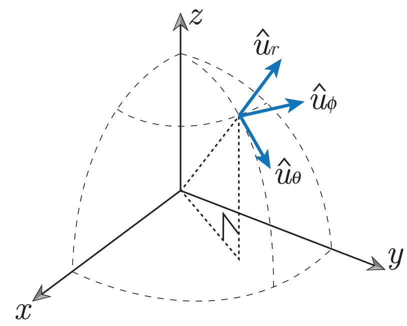


Figura 1.27. Vectores unitarios en coordenadas esféricas

En la Figura 1.28,

$$\hat{u}_r = \operatorname{sen}\theta\cos\phi\hat{u}_x + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\hat{u}_y + \cos\theta\hat{u}_z, \qquad (1.29)$$

En la Figura 1.29,

$$\hat{u}_\theta = \cos\theta\cos\phi\hat{u}_x + \cos\theta\operatorname{sen}\phi\hat{u}_y - \operatorname{sen}\theta\hat{u}_z. \qquad (1.30)$$

De la Figura 1.27, se ve que el vector unitario $\hat{u}_\phi$ se puede proyectar sobre el plano $x - y$ como lo indica la Figura 1.30.

$$\hat{u}_\phi = \cos(\phi + \pi/2)\hat{u}_x + \operatorname{sen}(\phi + \pi/2)\hat{u}_y \qquad (1.31)$$
$$\hat{u}_\phi = -\operatorname{sen}\phi\hat{u}_x + \cos\phi\hat{u}_y.$$

Sea un vector $\vec{C}$ expresado en coordenadas esféricas,

$$\vec{C} = C_r\hat{u}_r + C_\theta\hat{u}_\theta + C_\phi\hat{u}_\phi. \qquad (1.32)$$

Reeemplazando las ecuaciones 1.29, 1.30 y 1.31 en 1.32

$$\begin{aligned}\vec{C} =& C_r(\operatorname{sen}\theta\cos\phi\hat{u}_x + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\hat{u}_y + \cos\theta\hat{u}_z)\\ &+ C_\phi(-\operatorname{sen}\phi\hat{u}_x + \cos\phi\hat{u}_y)\\ &+ C_\theta(\cos\theta\cos\phi\hat{u}_x + \cos\theta\operatorname{sen}\phi\hat{u}_y - \operatorname{sen}\theta\hat{u}_z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{C} =& (C_r\operatorname{sen}\theta\cos\phi + C_\theta\cos\theta\cos\phi - C_\phi\operatorname{sen}\phi)\hat{u}_x\\ &+ (C_r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi + C_\theta\cos\theta\operatorname{sen}\phi + C_\phi\cos\phi)\hat{u}_y\\ &+ (C_r\cos\theta - C_\theta\operatorname{sen}\theta)\hat{u}_z.\end{aligned}$$

Las componentes cartesianas del vector $\vec{C}$ en términos de las componentes esféricas son:

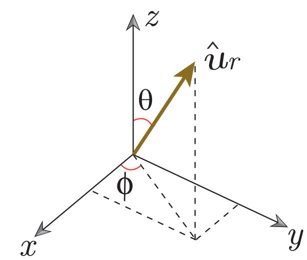


Figura 1.28. Esquema para hallar las componentes cartesianas de $\hat{u}_r$

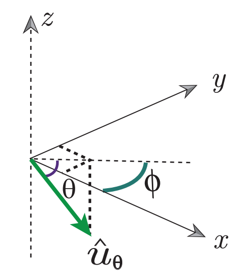


Figura 1.29. Esquema para hallar las componentes cartesianas de $\hat{u}_\theta$

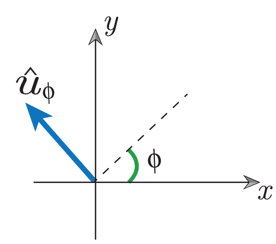


Figura 1.30. Esquema para hallar las componentes cartesianas de $\hat{u}_\phi$

$$C_x = C_r \operatorname{sen}\theta\cos\phi + C_\theta\cos\theta\cos\phi - C_\phi\operatorname{sen}\phi \tag{1.33}$$
$$C_y = C_r \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi + C_\theta\cos\theta\operatorname{sen}\phi + C_\phi\cos\phi \tag{1.34}$$
$$C_z = C_r\cos\theta - C_\theta\operatorname{sen}\theta. \tag{1.35}$$

En forma matricial quedan:

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_r \\ C_\theta \\ C_\phi \end{bmatrix} \tag{1.36}$$

Para expresar las componentes esféricas en términos de las componentes cartesianas, se halla la matriz inversa de la matriz dada en 1.36. Sea:

$$A = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

La matriz inversa se obtiene como $A^{-1} = \dfrac{(A^\dagger)^t}{detA}$, $A^\dagger =$ adjunta de A Sea:

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix},$$

donde α_{ij} es el elemento adjunto de a_{ij}. $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$.

$$\alpha_{11} = \det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \operatorname{sen}\theta\cos\phi,$$
$$\alpha_{12} = -\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23}, \\ a_{31} & a_{33} \\ & \end{bmatrix} = \cos\theta\cos\phi,$$
$$\alpha_{13} = \det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = -\operatorname{sen}\phi,$$
$$\alpha_{21} = -\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,$$
$$\alpha_{22} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} = \cos\theta\operatorname{sen}\phi,$$
$$\alpha_{23} = -\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \cos\phi,$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{31} &= \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \cos\theta, \\
\alpha_{32} &= -\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} = -\operatorname{sen}\theta, \\
\alpha_{33} &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = 0.
\end{aligned}
$$

Por tanto:

$$
A^{\dagger} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
(A^{\dagger})^{t} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix},
$$

$\det A = \operatorname{sen}\theta\cos\phi(\operatorname{sen}\theta\cos\phi) - \cos\theta\cos\phi(-\cos\theta\cos\phi) - \operatorname{sen}\phi(-\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\phi - \cos^2\theta\operatorname{sen}\phi)$.

Se ha hecho el desarrollo, tomando la primera fila de A.

$$
\begin{aligned}
\det A &= \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) \\
\det A &= (\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi \\
\det A &= 1.
\end{aligned}
$$

Por tanto:

$$
A^{-1} = (A^{\dagger})^{t}.
$$

Así, entonces, las componentes esféricas del vector $\vec{C}$, en términos de las componentes cartesianas quedan expresadas por:

$$
\begin{bmatrix} C_r \\ C_\theta \\ C_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} \tag{1.37}
$$

Obtener la divergencia de un campo vectorial a partir de la definición de flujo de campo vectorial a través de una superficie cerrada.

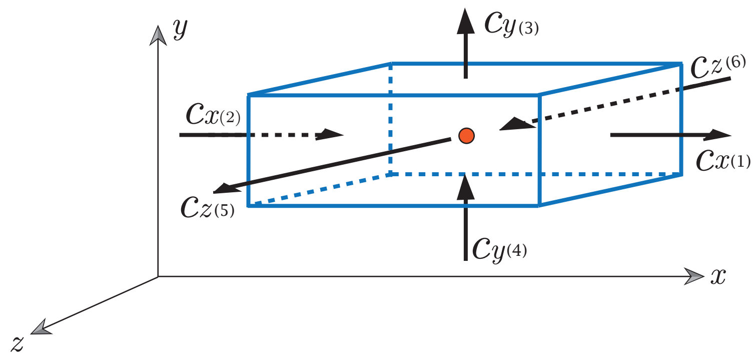


Figura 1.31. Esquema para la divergencia del campo $\vec{C}$

Sea un campo vectorial $\vec{C} = (C_x, C_y, C_z)$ que fluye a través de la superficie que encierra un volumen diferencial con dimensiones dx, dy, dz y que contiene un punto P de coordenadas x_0, y_0, z_0 ubicado en su centro. Cada componente del campo $\vec{C}$ se asume uniforme sobre la superficie a través de la cual fluye.

Sea Φ el flujo total a través de las seis caras del diferencial de volumen mostrado en la Figura 1.31

El flujo en la cara 1 es $\Phi_1 = C_x(1)dydz$.
El flujo en la cara 2 es $\Phi_2 = -C_x(2)dydz$.
El flujo en la cara 3 es $\Phi_3 = C_y(3)dxdz$.
El flujo en la cara 4 es $\Phi_4 = -C_y(4)dxdz$.
El flujo en la cara 5 es $\Phi_5 = C_z(5)dxdy$.
El flujo en la cara 6 es $\Phi_6 = -C_z(6)dxdy$.

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6.$$

La expansión en series de Taylor en tres dimensiones es:

$$\begin{aligned}
C_x(x,y,z) &= C_x(x_0,y_0,z_0) + \left.\frac{\partial C_x}{\partial x}\right|_P (x-x_0) + \left.\frac{\partial C_x}{\partial y}\right|_P (y-y_0) + \left.\frac{\partial C_x}{\partial z}\right|_P (z-z_0) \\
&\quad + \text{términos de orden superior}, \\
C_y(x,y,z) &= C_y(x_0,y_0,z_0) + \left.\frac{\partial C_y}{\partial x}\right|_P (x-x_0) + \left.\frac{\partial C_y}{\partial y}\right|_P (y-y_0) + \left.\frac{\partial C_y}{\partial z}\right|_P (z-z_0) \\
&\quad + \text{ términos de orden superior}, \\
C_z(x,y,z) &= C_z(x_0,y_0,z_0) + \left.\frac{\partial C_z}{\partial x}\right|_P (x-x_0) + \left.\frac{\partial C_z}{\partial y}\right|_P (y-y_0) + \left.\frac{\partial C_z}{\partial z}\right|_P (z-z_0) \\
&\quad + \text{términos de orden superior}.
\end{aligned}$$

Teniendo presente las series de Taylor, las componentes del campo que fluyen a través de cada una de las caras en la Figura 1.31, se expresan así:

$$\begin{aligned}
C_x(1) =& C_x(x, y_0, z_0) = C_x(P) + \left.\frac{\partial C_x}{\partial x}\right|_P (x - x_0) + \text{más términos de orden superior,} \\
& \text{donde } x = x_0 + dx/2, \\
C_x(2) =& C_x(x, y_0, z_0) = C_x(P) + \left.\frac{\partial C_x}{\partial x}\right|_P (x - x_0) + \text{más términos de orden superior,} \\
& \text{donde } x = x_0 - dx/2, \\
C_y(3) =& C_y(x_0, y, z_0) = C_y(P) + \left.\frac{\partial C_y}{\partial y}\right|_P (y - y_0) + \text{más términos de orden superior,} \\
& \text{donde } y = y_0 + dy/2, \\
C_y(4) =& C_y(x_0, y, z_0) = C_y(P) + \left.\frac{\partial C_y}{\partial y}\right|_P (y - y_0) + \text{más términos de orden superior,} \\
& \text{donde } y = y_0 - dy/2, \\
C_z(5) =& C_z(x_0, y_0, z) = C_z(P) + \left.\frac{\partial C_z}{\partial z}\right|_P (z - z_0) + \text{más términos de orden superior,} \\
& \text{donde } z = z_0 + dz/2, \\
C_z(6) =& C_z(x_0, y_0, z) = C_z(P) + \left.\frac{\partial C_z}{\partial z}\right|_P (z - z_0) + \text{más términos de orden superior,} \\
& \text{donde } z = z_0 - dz/2.
\end{aligned}$$

El flujo neto a través de cada par de caras paralelas entre sí es:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 + \Phi_2 =& [C_x(1) - C_x(2)]dydz = \left.\frac{\partial C_x}{\partial x}\right|_P dxdydz, \\
\Phi_3 + \Phi_4 =& [C_y(3) - C_y(4)]dxdz = \left.\frac{\partial C_y}{\partial y}\right|_P dxdydz, \\
\Phi_5 + \Phi_6 =& [C_z(5) - C_z(6)]dxdy = \left.\frac{\partial C_z}{\partial z}\right|_P dxdydz.
\end{aligned}$$

El flujo total a través de la superficie que envuelve el volumen diferencial es:

$$\Phi = \left.\left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}\right)\right|_P dxdydz$$

$$\Phi = \vec{\nabla}.\vec{C}\Big|_P dV.$$

Pero el flujo de un campo a través de una superficie cerrada está dado por:

$$\Phi = \oint \vec{C}.d\vec{S}, \quad \text{por lo tanto}$$

$$\oint \vec{C}.d\vec{S} = \vec{\nabla}.\vec{C}\Big|_P dV,$$

$$dV = \Delta V \to 0,$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{C}\Big|_P = \frac{\oint \vec{C}\cdot d\vec{S}}{\Delta V \to 0}.$$

La divergencia de un campo vectorial en un punto P es el flujo por unidad de volumen a través de la superficie envolvente a medida que este se cierra entorno al punto P.

Comprobar el teorema de la divergencia. Considérese un volumen V encerrado por una superficie S y dividido en un número muy grande de celdas, cada una con un volumen infinitesimal, es decir, $\Delta V \to 0$. Entonces $V = \sum_i \Delta V_i$. En cada una de las celdas se debe cumplir que:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{C} = \frac{\oint_s \vec{C}\cdot d\vec{S}}{\Delta V \to 0}.$$

Ahora, al sumar sobre todas las posibles celdas en que se divide el volumen, se tiene que:

$$\sum_i \vec{\nabla}\cdot\vec{C}\,\Delta V_i = \sum_i \frac{\oint_{si} \vec{C}\cdot\, d\vec{S}}{\Delta V_i \to 0}\,\Delta V_i$$

$$\sum_i \vec{\nabla}\cdot\vec{C}\,\Delta V_i = \sum_i \oint_{si} \vec{C}\cdot d\vec{S}.$$

Al sumar el flujo a través de todas las celdas infinitesimales, el flujo neto en la superficie que separan dos celdas consecutivas, al ser positivo para una de ellas, lo es negativo para la otra. Ver Figura 1.32. Por tanto al sumar todas las contribuciones a través de las superficies internas, el resultado es nulo, solo queda la contribución dada por la superficie externa, así que:

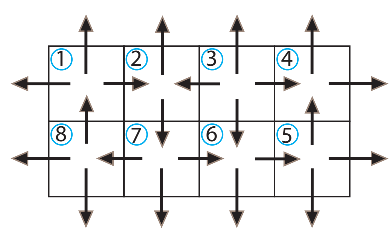


Figura 1.32. Flujo a través de celdas infinitesimales continuas

$$\sum_i \oint_{si} \vec{C}\cdot d\vec{S} = \oint_s \vec{C}\cdot d\vec{S},$$

por lo tanto

$$\sum_i \vec{\nabla} \cdot \vec{C} \Delta V_i = \oint_s \vec{C} \cdot d\vec{S},$$

lo que es equivalente a

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{C} dV = \oint_s \vec{C} \cdot d\vec{S}.$$

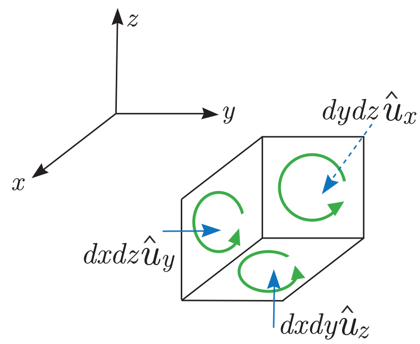


Figura 1.33. Contornos diferenciales para definir el rotacional de $\vec{C}$

Obtener el rotacional de un campo vectorial a partir de la definición de circulación de un campo vectorial a lo largo de un camino cerrado. Sea un campo vectorial $\vec{C} = \vec{C}(x, y, z)$ que circula por un camino que rodea a una superficie diferencial

$d\vec{S} = dydz\,\hat{u}_x + dxdz\,\hat{u}_y + dxdy\,\hat{u}_z,$ donde

$dS = \Delta S \to 0,\; dydz = \Delta S_x \to 0,\quad dxdz = \Delta S_y \to 0$

$y \quad dxdy = \Delta S_z \to 0.$

La circulación del campo vectorial $\vec{C}$ a lo largo del contorno cerrado que limita la superficie diferencial $d\vec{S}$, es igual a la suma de las circulaciones por cada uno de los caminos rectangulares en el sentido indicado en la Figura 1.33.

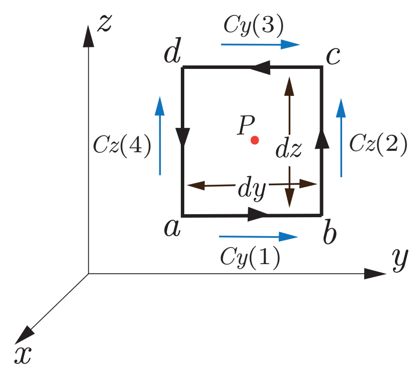


Figura 1.34. Circulación por el contorno que rodea a $d\vec{S}_x$

Circulación por el contorno que rodea al elemento de superficie $dydz$. Sea P un punto de coordenadas $x_0.y_0, z_0$ ubicado en el centro del diferencial $dydz$

$$\begin{aligned}\oint_{abcda} \vec{C}.d\vec{\ell} = &\oint_{a\to b} \vec{C}.d\vec{\ell} + \oint_{b\to c} \vec{C}.d\vec{\ell} + \oint_{c\to d} \vec{C}.d\vec{\ell} + \oint_{d\to a} \vec{C}.d\vec{\ell}\\ =&C_y(1)dy + C_z(2)dz - C_y(3)dy - C_z(4)dz.\end{aligned} \tag{1.38}$$

Para evaluar cada uno de estos términos se deben conocer los campos C_y y C_z. Una expresión general para los campos se expresa a través de una serie de Taylor tridimensional, así:

$$\begin{aligned}C_y = C_y(x, y, z) = C_y(x_0, y_0, z_0) + \left.\frac{\partial C_y}{\partial x}\right|_P (x - x_0) + \left.\frac{\partial C_y}{\partial y}\right|_P (y - y_0) + \left.\frac{\partial C_y}{\partial z}\right|_P (z - z_0)\\ + \text{ términos de orden superior,}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_z = C_z(x, y, z) = C_z(x_0, y_0, z_0) + \left.\frac{\partial C_z}{\partial x}\right|_P (x - x_0) + \left.\frac{\partial C_z}{\partial y}\right|_P (y - y_0) + \left.\frac{\partial C_z}{\partial z}\right|_P (z - z_0)\\ + \text{términos de orden superior.}\end{aligned}$$

El análisis del campo en el trayecto $a \to b$, denominado $C_y(1)$.

En cada punto del camino $a \to b$ que es igual a dy, el campo debe ser el mismo, por lo tanto $C_y(1) = C_y(x, y, z) = C_y(x_0, y_0, z_0)$ que es el vector en el punto medio del trayecto $a \to b$. Por lo tanto,

$$C_y(1) = C_y(x_0, y_0, z) = C_y(x_0, y_0, z_0) + \left.\frac{\partial C_y}{\partial z}\right|_P (z - z_0) + \text{ términos de orden superior.}$$

Para los puntos de este trayecto, $z = z_0 - dz/2$, entonces:

$$C_y(1) = C_y(x_0, y_0, z_0) - \left.\frac{\partial C_y}{2\partial z}\right|_P dz + \text{ términos de orden superior.} \tag{1.39}$$

Análisis del campo en el trayecto $b \to c$, denominado $C_z(2)$.

En cada punto del camino $b \to c$ que es igual a dz, el campo debe ser el mismo, por lo tanto $C_z(2) = C_z(x, y, z) = C_z(x_0, y, z_0)$ que es el valor en el punto medio del trayecto $b \to c$. Por lo tanto,

$$C_z(2) = C_z(x_0, y, z_0) = C_z(x_0, y_0, z_0) + \left.\frac{\partial C_z}{\partial y}\right|_P (y - y_0) + \text{ términos de orden superior.}$$

Para los puntos de este trayecto, $y = y_0 + dy/2$, entonces:

$$C_z(2) = C_z(x_0, y_0, z_0) + \left.\frac{\partial C_z}{2\partial y}\right|_P dy + \text{ términos de orden superior.} \tag{1.40}$$

Análisis del campo en el trayecto $c \to d$, denominado $C_y(3)$.

En cada punto del camino $c \to d$ que es igual en magnitud a dy, el campo debe ser el mismo, por lo tanto, $C_y(3) = C_y(x, y, z) = C_y(x_0, y_0, z)$ que es el valor en el punto medio del trayecto $c \to d$. Por lo tanto,

$$C_y(3) = C_y(x_0, y_0, z) = C_y(x_0, y_0, z_0) + \left.\frac{\partial C_y}{\partial z}\right|_P (z - z_0) + \text{ términos de orden superior.}$$

Para los puntos de este trayecto $z = z_0 + dz/2$, entonces:

$$C_y(3) = C_y(x_0, y_0, z_0) + \left.\frac{\partial C_y}{2\partial z}\right|_P dz + \text{ términos de orden superior.} \tag{1.41}$$

Análisis del campo en el trayecto $d \to a$, denominado $C_z(4)$.

En cada punto del camino $d \to a$ que es igual en magnitud a dz, el campo debe ser el mismo, por lo tanto, $C_z(4) = C_z(x, y, z) = C_z(x_0, y, z_0)$ que es valor en el punto medio del trayecto $d \to a$. Por lo tanto:

$$C_z(4) = C_z(x_0, y, z_0) = C_z(x_0, y_0, z_0) + \left.\frac{\partial C_z}{\partial y}\right|_P (y - y_0) + \text{ términos de orden superior.}$$

Para los puntos de este trayecto, $y = y_0 - dy/2$, entonces:

$$C_z(4) = C_z(x_0, y_0, z_0) - \left.\frac{\partial C_z}{2\partial y}\right|_P dy + \text{ términos de orden superior.} \tag{1.42}$$

Teniendo en cuenta 1.38, 1.39, 1.40, 1.41, 1.42 y despreciando la contribución de términos de orden superior,

$$\begin{aligned}\oint_{abcda} \vec{C}.d\vec{\ell} &= (C_y(1) - C_y(3))dy + (C_z(2) - C_z(4))dz \\ &= \left(\frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z}\right) dydz.\end{aligned}$$

La expresión entre paréntesis es la componente en dirección x del rotacional de $\vec{C}$, esto es, $(\vec{\nabla} \times \vec{C}) \cdot \hat{u}_x$. Así entonces,

$$\oint_{abcda} \vec{C} \cdot d\vec{\ell} = ((\vec{\nabla} \times \vec{C}) \cdot \hat{u}_x)(\Delta S_x \to 0)$$

$$\oint_{abcda} \vec{C} \cdot d\vec{\ell} = (\vec{\nabla} \times \vec{C}) \cdot (\Delta S_x \to 0)\hat{u}_x. \tag{1.43}$$

Circulación por el contorno que rodea al elemento de superficie $dydz$.

Teniendo en cuenta el contorno definido en la Figura 1.35 en el que el lado ad es común al de la Figura 1.34,

$$\oint_{adefa} \vec{C}.d\vec{\ell} = -C_x(1)dx + C_z(2)dz + C_x(3)dx - C_z(4)dz.$$

Haciendo un análisis semejante al realizado para el contorno de la Figura 1.34, las expresiones de los campos indicados son:

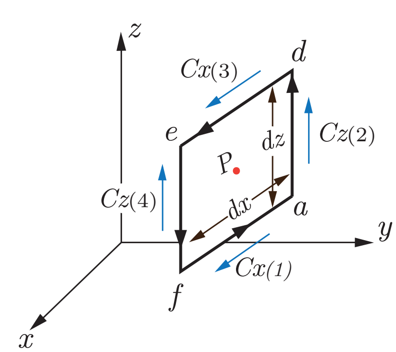


Figura 1.35. Circulación por el contorno que rodea a $d\vec{S}_y$

$$C_x(1) = C_x(x_0, y_0, z_0) - \left.\frac{\partial C_x}{2\partial z}\right|_P dz + \text{ términos superiores,}$$
$$C_z(2) = C_z(x_0, y_0, z_0) - \left.\frac{\partial C_z}{2\partial x}\right|_P dx + \text{ términos superiores,}$$
$$C_x(3) = C_x(x_0, y_0, z_0) + \left.\frac{\partial C_x}{2\partial z}\right|_P dz + \text{ términos superiores,}$$
$$C_z(4) = C_z(x_0, y_0, z_0) + \left.\frac{\partial C_z}{2\partial x}\right|_P dx + \text{ términos superiores,}$$

$$\begin{aligned}\oint_{adefa} \vec{C} \cdot d\vec{\ell} &= (C_x(3) - C_x(1))dx + (C_z(2) - C_z(4))dz \\ &= \left.\frac{\partial C_x}{\partial z}\right|_P dxdz - \left.\frac{\partial C_z}{\partial x}\right|_P dxdz, \text{ donde se han despreciado} \\ &\qquad\qquad \text{los términos de orden superior} \\ &= \left(\frac{\partial C_x}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial x}\right) dxdz \\ &= ((\vec{\nabla} \times \vec{C}) \cdot \hat{u}_y)(\Delta S_y \to 0)\end{aligned}$$

$$\oint_{adefa} \vec{C} \cdot d\vec{\ell} = (\vec{\nabla} \times \vec{C}) \cdot (\Delta S_y \to 0)\hat{u}_y. \tag{1.44}$$

La circulación por el contorno que rodea al elemento de superficie $dxdy$

Teniendo en cuenta el contorno definido en la Figura 1.36 en el que los lados ab y af son comunes a los lados respectivos de las Figuras 1.34 y 1.35,

$$\oint_{afgba} \vec{C}.d\vec{\ell} = -C_y(1)dy + C_x(2)dx + C_y(3)dy - C_x(4)dx.$$

Haciendo un análisis semejante al hecho para el contorno de la Figura 1.34, las expresiones de los campos indicados son:

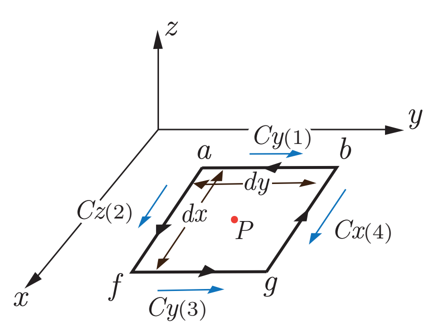


Figura 1.36. Circulación por el contorno que rodea a $d\vec{S}_z$

$$
\begin{aligned}
C_y(1) =& C_y(x_0, y_0, z_0) - \left.\frac{\partial C_y}{2\partial x}\right|_P dx + \text{ términos superiores,} \\
C_x(2) =& C_x(x_0, y_0, z_0) - \left.\frac{\partial C_x}{2\partial y}\right|_P dy + \text{ términos superiores,} \\
C_y(3) =& C_y(x_0, y_0, z_0) + \left.\frac{\partial C_y}{2\partial x}\right|_P dx + \text{ términos superiores,} \\
C_x(4) =& C_x(x_0, y_0, z_0) + \left.\frac{\partial C_x}{2\partial y}\right|_P dy + \text{ términos superiores,}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\oint_{afgba} \vec{C}.d\vec{\ell} =& (C_x(2) - C_x(4))dx + (C_y(3) - C_y(1))dy \\
=& -\left.\frac{\partial C_x}{\partial y}\right|_P dxdy + \left.\frac{\partial C_y}{\partial x}\right|_P dxdy, \text{ donde se han despreciado} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \text{los términos de orden superior} \\
=& \left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y}\right) dxdy \\
=& ((\vec{\nabla} \times \vec{C}) \cdot \hat{u}_z)(\Delta S_z \to 0)
\end{aligned}
$$

$$
\oint_{afgba} \vec{C} \cdot d\vec{\ell} = ((\vec{\nabla} \times \vec{C})).(\Delta S_z \to 0)\hat{u}_z. \tag{1.45}
$$

Sumando 1.43, 1.44 y 1.45 se tiene la circulación por el contorno anterior de la Figura 1.33, esto es,

$$
\oint_{abcda} \vec{C}.d\vec{\ell} + \oint_{adefa} \vec{C}.d\vec{\ell} + \oint_{afgba} \vec{C}.d\vec{\ell} = \oint_L \vec{C}.d\vec{\ell},
$$

donde el contorno L rodea la superficie $dS(\Delta S \to 0)$.

$$
\begin{aligned}
\oint_L \vec{C} \cdot d\vec{\ell} =& (\vec{\nabla} \times \vec{C}) \cdot (\Delta S_x \to 0)\hat{u}_x + (\vec{\nabla} \times \vec{C}).(\Delta S_y \to 0)\hat{u}_y + (\vec{\nabla} \times \vec{C}).(\Delta S_z \to 0)\hat{u}_z \\
=& (\vec{\nabla} \times \vec{C}) \cdot [(\Delta S_x \to 0)\hat{u}_x + (\Delta S_y \to 0)\hat{u}_y + (\Delta S_z \to 0)\hat{u}_z] \\
=& (\vec{\nabla} \times \vec{C}) \cdot (\Delta \vec{S} \to 0).
\end{aligned}
$$

Variando la dirección de $(\Delta \vec{S} \to 0)$ se puede lograr maximizar la integral, y esto se da cuando se alinee con el vector rotacional. Así que:

$$
\left(\oint_L \vec{C} \cdot d\vec{\ell}\right)_{\max} = |\vec{\nabla} \times \vec{C}| \ |\Delta \vec{S} \to 0|.
$$

Si en ambos lados se multiplica por un vector unitario normal al área ($\Delta S \to 0$) y en la misma dirección del vector rotacional, se tiene:

$$\left(\oint_L \vec{C} \cdot d\vec{\ell}\right)_{\max} \hat{u}_n = |\vec{\nabla} \times \vec{C}|\hat{u}_n \; |\Delta \vec{S} \to 0|,$$

$$|\vec{\nabla} \times \vec{C}|\hat{u}_n = \left(\frac{\oint_L \vec{C} \cdot d\vec{\ell}}{\Delta \vec{S} \to 0}\right)_{\max} \hat{u}_n$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{C} = \left(\frac{\oint_L \vec{C} \cdot d\vec{\ell}}{\Delta S \to 0}\right)_{\max} \hat{u}_n.$$

Teniendo claro la definición de circulación de un campo $\vec{C}$, se define el rotacional así: el rotacional de un campo $\vec{C}$ es un vector perpendicular a $\vec{C}$ que tiene por magnitud a la circulación máxima de $\vec{C}$ por unidad de área cuando esta tiende a cero y tiene la dirección de la normal al área cuando ésta se orienta de tal manera que la circulación sea máxima.

Comprobar el teorema de Stokes. Considérese una superficie S delimitada por el contorno L y dividida en un número muy grande de celdas infinitesimales, es decir, con $\Delta S \to 0$.

Para cada una de esas celdas se debe cumplir que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{C} = \frac{\oint_{L_k} \vec{C} \cdot d\vec{\ell}}{\Delta S_k \to 0} \quad \hat{u}_{nk},$$

así que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{C} \cdot \hat{u}_{nk} = \frac{\oint_{L_k} \vec{C} \cdot d\vec{\ell}}{\Delta S_k \to 0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{C} \cdot \hat{u}_{nk}(\Delta S_k \to 0) = \frac{\oint_{L_k} \vec{C}.d\vec{\ell}}{\Delta S_k \to 0} \quad (\Delta S_k \to 0)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{C} \cdot (\Delta \vec{S}_k \to 0) = \frac{\oint_{L_k} \vec{C}.d\vec{\ell}}{\Delta S_k \to 0} \quad (\Delta S_k \to 0),$$

$$\sum_k \vec{\nabla} \times \vec{C} \cdot (\Delta \vec{S}_k \to 0) = \sum \oint_{L_k} \vec{C} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\int \vec{\nabla} \times \vec{C} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{C} \cdot d\vec{\ell}.$$

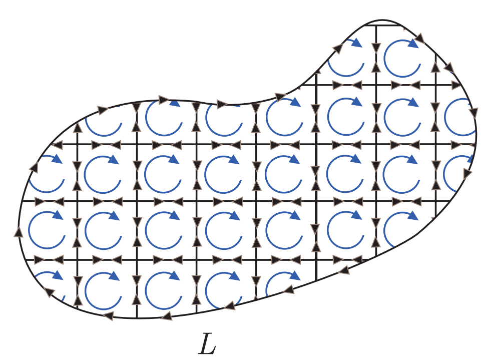


Figura 1.37. Circulación a través de celdas infinitesimales continuas

Referencias

Alonso, M. & Finn, E.J. (2002). *Física* (Spanish Edition). Madrid: Addison-Wesley.

Bauer, W. & Westfall, G.D. (2011). *University Physics with Modern Physics* (2nd Ed). Nueva York: McGraw-Hill.

Gettys, W. E., Keller, F.J. & Skove, M.J. (1989). *Física Clásica y Moderna.* Madrid: McGraw-Hill.

Griffiths, D.J. (1999). *Introduction to Electrodynamics* (Third Ed). New Jersey: Pearson Addison Wesley.

Halliday, D., Resnick, R. & Walker, J. (2014). *Fundamentals of Physics* (10th Ed). New Jersey: John Wiley.

Kraus, J.D. & Fleisch, D.A. (1999). *Electromagnetismo con aplicaciones* (5ª ed.) Mexico: McGraw-Hill.

Pocovi, M.C. & Collivadino, C. (2014). Traducción entre lenguajes simbólicos de distintas áreas del conocimiento: el caso del flujo del campo eléctrico. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 32 (02), 53-68.

Sadiku, M.N.O. (2015). *Elements of Electromagnetics.* (6th Ed). Nueva York: Oxford University Press.

Sears, F.W., Zemansky, M.W., Young, H.D. & Fredman, R.A. (2013). *Física Universitaria con Física Moderna* (13ª ed.) México: Pearson Education.

Serway, R.A. & Jewett, J.W. (2016). *Física: Electricidad y Magnetismo* (9ª ed.) México: Cengage Learning.

Figuras

Prof. Jorge David Garcés Gómez
Electromecánico, Instituto Tecnológico Metropolitano, 2017. Maestro en Artes Plásticas, Universidad Nacional de Colombia, 2013; Teólogo, Universidad Bautista, 2013 y Pedagogo, Universidad Autónoma Latinoamericana, 2013; docente de Matemáticas y Física CEP, docente de la Facultad de Ingeniería ITM.

inaudax@gmail.com

Prof. Lope Alberto Ciro López
Físico, Universidad de Antioquia, 1984. Magíster en Física, Universidad de Antioquia, 1991, y Doctor en Física de la Universidad de Antioquia, 2012; docente de la Facultad de Ciencias Exactas y Aplicadas ITM.

albertociro@itm.edu.co

La fuente tipográfica empleada es: Times New Roman
12 puntos en texto corrido.

La física de campos electromagnéticos es un área fundamental en carreras científicas y de ingeniería. Este libro surge de la necesidad de ilustrar cómo solucionar problemas modelo, y por ello ofrece a estudiantes una colección suficiente de problemas de electricidad y magnetismo resueltos de la manera más explícita posible, con el fin de acompañarlos en el logro de competencias, tales como saber solucionar y saber explicar.

The physics of electromagnetic fields is a fundamental field in science and engineering programs. For that reason, this book offers students a comprehensive collection of problems in electricity and magnetism, which are solved and explained as explicitly as possible to support the development of their solving and explanatory skills.

ITM
Institución Universitaria
Acreditada en Alta Calidad